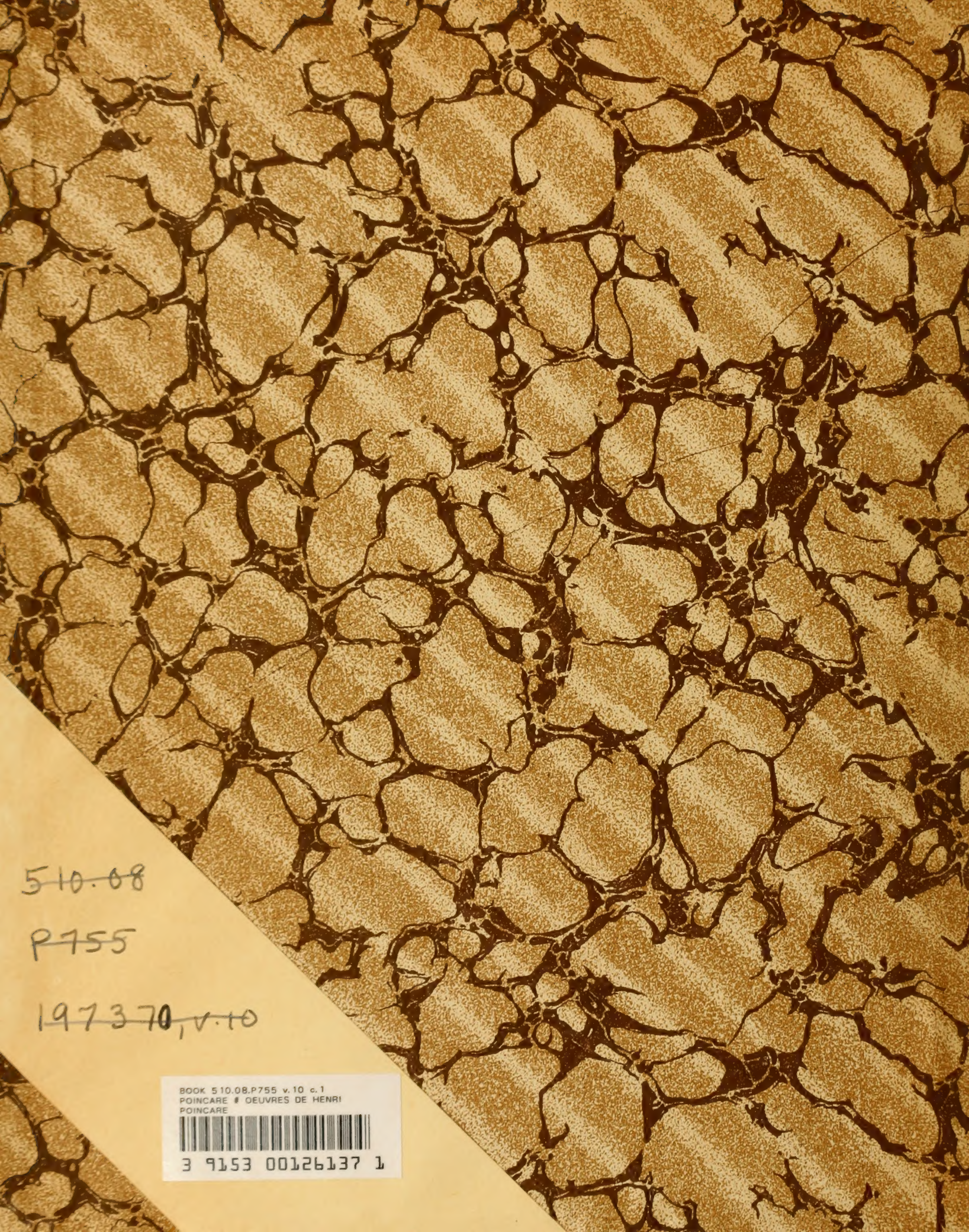


510.08
P755
197370, v.10
BOOK 510.08.P755 v.10 c.1
POINCARE # OEUVRES DE HENRI
POINCARE
3 9153 00126137 1


Date Due
Demco 293-5

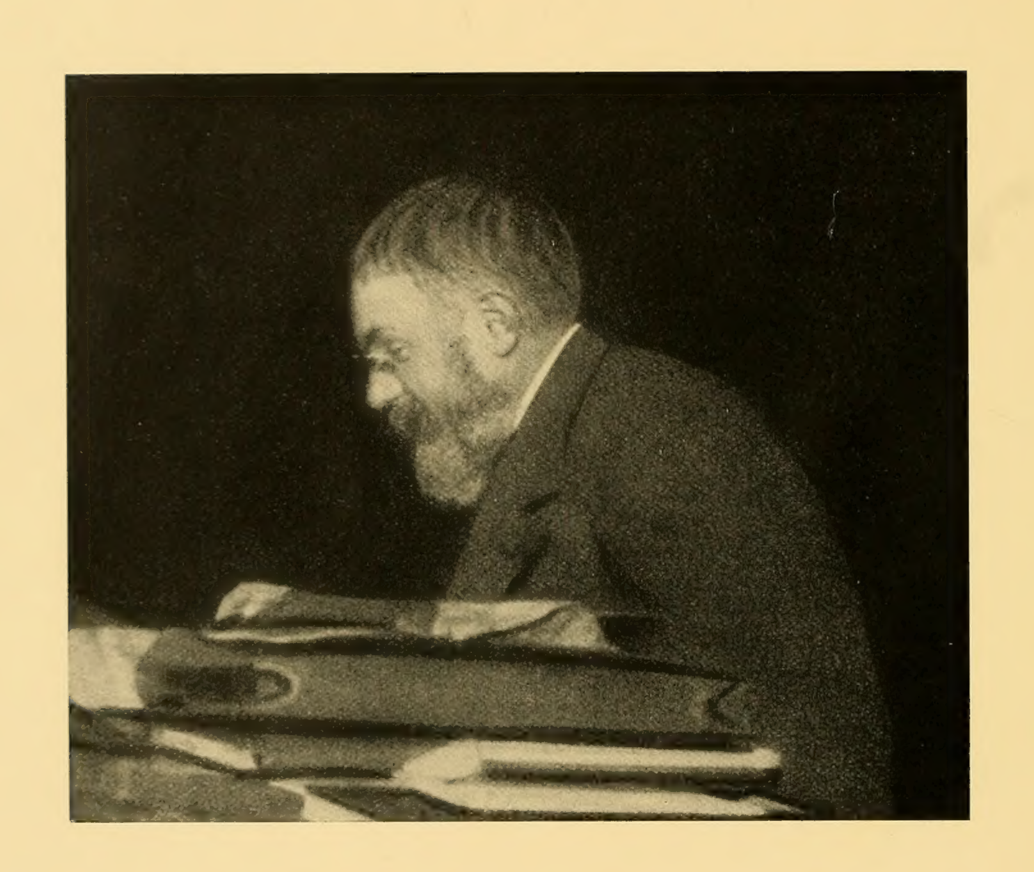
ŒUVRES

DE

HENRI POINCARÉ

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS
Quai des Grands-Augustins, 55.

·144 731-54



ŒUVRES

DE

HENRI POINCARÉ

PUBLIÉES

SOUS LES AUSPICES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES

PAR

LA SECTION DE GÉOMÉTRIE

TOME X

PUBLIÉ AVEC LA COLLABORATION

DE

GÉRARD PETIAU

MAITRE DE RECHERCHES

Préface de M. Gaston JULIA

MEMBRE DE L'INSTITUT
PROFESSEUR A LA SORBONNE ET A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE



PARIS
GAUTHIER-VILLARS, ÉDITEUR-IMPRIMEUR-LIBRAIRE
Quai des Grands-Augustins, 55

1954

PHYSIQUE MATHÉMATIQUE

PRÉFACE

DU TOME X DES ŒUVRES DE HENRI POINCARÉ

Avec l'actuel tome X s'achève aujourd'hui la publication des Œuvres d'Henri Poincaré, dont l'Académie des Sciences nous avait confié la charge en 1948.

Nous sommes heureux d'adresser ici nos remerciements à tous ceux qui nous ont permis de réaliser cette publication.

Et d'abord à ceux de nos collègues qui ont bien voulu assurer la mise au point des manuscrits et des notes visant à la meilleure compréhension des textes et à l'indication des principaux développements ultérieurs; MM. G. Valiron, A. Châtelet, J. Leray, R. Garnier, J. Lévy, P. Sémirot, G. Petiau.

A nos confrères aussi de la Commission académique chargée de suivre la réalisation de cette publication.

A nos collègues du Comité Poincaré de la Société des *Amis de l'École Polytechnique*, qui ont bien voulu assurer les moyens matériels de la publication en assumant toutes les charges financières. Qu'il nous soit permis de rappeler en particulier le concours très actif que nous ont apporté nos amis R. Boutteville, auprès des sociétés nationalisées, P. Ricard, agissant comme premier vice-président du Conseil national du Patronat français, auprès des sociétés industrielles privées et des chambres de commerce.

Nous n'aurions garde d'oublier ici l'appui constant que nous a généreusement accordé le Centre National de la Recherche Scientifique sous l'impulsion de MM. J. Pérès et G. Dupouy.

Le concours de toutes ces bonnes volontés nous a permis de mener à bien notre tâche avant la célébration du centenaire de la naissance d'Henri Poincaré.

Il nous est extrêmement agréable d'exprimer maintenant notre reconnaissance à tous les souscripteurs de cette publication, en particulier aux *souscripteurs bienfaiteurs*, c'est-à-dire ceux qui ont contribué à la souscription pour un minimum de 200.000 francs, certains pour plusieurs fois, ou pour plusieurs dizaines de fois cette somme. Voici la liste, par ordre alphabétique, de nos bienfaiteurs, liste que le comité Poincaré nous a prié de rendre publique dans cette préface, en leur adressant ses vifs remerciements.

SOUSCRIPTEURS BIENFAITEURS

Association du cercle Haussmann
Bureau Veritas
Centre national de la recherche scientifique
Centre technique des industries de la fonderie
Chambre de commerce de Marseille
Chambre de commerce de Paris
Chambre de commerce de Saint-Quentin et de l'Aisne
Chambre syndicale de la sidérurgie française
Chambre syndicale des constructeurs d'automobiles
Chambre syndicale des entrepreneurs d'installations thermiques
Charbonnages de France
Compagnie des forges et aciéries de la Marine et de Saint-Étienne
Compagnie des Produits chimiques et électro-métallurgiques Alais, Froges et Camargue (Péchiney)
Campagnie générale d'électricité
Compagnie pour la fabrication des compteurs et matériels d'usines à gaz
Conseil national du patronat français
Électricité de France
Établissements Cotelle et Foucher
Fédération des syndicats des producteurs de papier, carton et cellulose

Fédération nationale du bâtiment
Fédération nationale des fabricants de chaux et ciments
Forges et aciéries de Vœlklingen
Forges et ateliers de constructions électriques de Jeumont
Gaz de France
Institut de recherches de la sidérurgie
Johns Hopkins University, Baltimore (Maryland)
Les élèves de l'école polytechnique (promotions 46, 47, 47 sp, 48 sp)
Les petits-fils de F. de Wendel et Cie
Manufacture des glaces et produits chimiques de Saint-Gobain, Chauny et Cirey
Société alsacienne de constructions mécaniques
Société anonyme des chaux et ciments de Lafarge et du Teil
Société des aciéries de Longwy
Société des hauts fourneaux de Saulnes
Société des fonderies de Pont à Mousson
Société française de constructions Babcock et Wilcox
Société française de constructions mécaniques (anciens établissements Cail)
Société Gazelec de Bruxelles
Société générale de constructions électriques et mécaniques Alsthom
Société générale de Fonderie
Société Kodak Pathé
Syndicat général de la construction électrique
Syndicat général des fondeurs de France
Syndicat général des industries mécaniques
Unesco, Union astronomique internationale
Union des chambres syndicales de l'industrie du pétrole
Union des industries chimiques
Union des industries métallurgiques et minières
Union sidérurgique du Nord de la France

Pour tous les souscripteurs, nous joindrons aussi les remerciements de l'Académie des Sciences, heureuse aujourd'hui d'avoir pu terminer l'œuvre entreprise dès 1916 par G. Darboux et malheureusement retardée par les vicissitudes historiques souvent déplorées.

Il nous reste enfin à exprimer notre gratitude aux services de reproduction photographique de l'Observatoire de Paris, mis obligeamment à notre disposition par notre confrère André Danjon, ainsi qu'à la maison Gauthier-Villars, pour la conscience scrupuleuse, la bonne volonté et l'empressement qu'elle a montrés en assurant une parfaite impression de ces œuvres dans un temps minimum.

Le 27 Mars 1954.

Gaston JULIA.

CONTRIBUTION A LA THÉORIE

DES

EXPÉRIENCES DE M. HERTZ

Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. 111, p. 322-326 (18 août 1890).

I. Dans les calculs qui accompagnent les admirables expériences de M. Hertz, il s'est glissé une erreur importante qui n'a pas, à ce que je crois, été encore signalée.

Pour calculer la période de l'excitateur primaire, M. Hertz applique une formule de Sir W. Thomson relative aux décharges oscillantes d'une bouteille de Leyde. D'après cette formule, la période est égale à

$$2\pi\sqrt{LC},$$

C étant la capacité du condensateur et L la self-induction du fil qui réunit les deux armatures. La capacité C est, par définition, le rapport de la charge d'une des deux armatures à la différence de potentiel des deux armatures.

Dans les expériences de M. Hertz, le condensateur est remplacé par deux sphères de 15^{cm} de rayon, séparées par une distance de $1^m,50$. Soient q la charge d'une des sphères, V son potentiel; soient $-q$ et $-V$ la charge et le potentiel de l'autre sphère; on aura, en mesure électrostatique,

$$q = V \times 15^{cm}.$$

La charge d'une des armatures est q; la différence de potentiel est $2V$; on

aura donc, d'après la définition de C,

$$C = \frac{q}{2V} = 7^{cm},5,$$

au lieu de 15^{cm}.

La période calculée par M. Hertz se trouve ainsi égale à la véritable multipliée par $\sqrt{2}$.

Pour l'excitateur auquel se rapporte le calcul du tome XXXI des *Annales de Wiedemann*, calcul que je viens de citer, la demi-longueur d'onde serait donc 375^{cm} au lieu de 531^{cm}. Pour celui qui a servi dans les expériences du tome XXXIV, elle serait 339^{cm} au lieu de 480^{cm}.

Les expériences ayant donné dans l'air une demi-longueur d'onde de 480^{cm}, il en résulterait, si le calcul de la période était correct d'autre part, que la vitesse de propagation dans l'air serait égale à celle de la lumière multipliée par $\sqrt{2}$.

C'est là une conclusion à laquelle on ne se résignerait déjà plus aisément. Heureusement, elle ne s'impose pas.

En premier lieu, le calcul de la période n'est que grossièrement approximatif et M. Hertz est obligé d'y négliger diverses circonstances dont le rôle est peut-être important. Ainsi, il ne tient pas compte des courants de déplacement qui peuvent exister autour de l'excitateur et exercer une influence. M. J.-J. Thomson a cherché depuis à tenir compte de quelques-unes des circonstances négligées par M. Hertz, mais son calcul est encore assez grossièrement approché.

Le calcul de la période, effectué rigoureusement en partant des hypothèses de Maxwell, nous donnerait-il la longueur d'onde observée? Il est difficile de le savoir sans l'avoir fait, mais cela me semble peu probable : l'influence des circonstances négligées me paraît trop petite pour qu'il en soit ainsi. Il est vraisemblable qu'on sera conduit à modifier la théorie de Maxwell, non pas dans ses traits essentiels, mais dans quelques-unes des hypothèses secondaires, par exemple en ce qui touche les conditions aux limites. Ainsi cette théorie, sous sa forme actuelle, exige que, dans le cas d'oscillations très rapides, les lignes de force électrique soient normales à la surface des conducteurs. Cette condition paraissait déjà à M. Hertz mal confirmée par ses expériences; ce que je viens de dire nous donne une nouvelle raison de l'abandonner.

De nouvelles expériences pourront seules trancher ces questions. Je ne doute pas que l'admirable méthode expérimentale créée par M. Hertz ne nous en

fournisse les moyens. Si le but que l'on croyait atteint est peut-être encore loin de nous, M. Hertz n'en a pas moins eu le rare bonheur, qui n'a été donné qu'à quelques hommes de génie, d'ouvrir aux investigations des chercheurs un champ entièrement nouveau.

2. Après ce que je viens de dire, il peut paraître superflu de tirer les conséquences mathématiques de la théorie de Maxwell sous sa forme actuelle. Mais d'abord, s'il semble que cette théorie doive être abandonnée, ce n'est là qu'une probabilité et non une certitude, et la comparaison des expériences avec un calcul *rigoureux* pourra seule nous donner cette certitude. D'autre part, si cette théorie doit être modifiée, c'est encore cette comparaison qui seule pourra nous faire savoir dans quel sens doivent se faire ces modifications.

J'ai donc cherché, en partant des hypothèses actuellement admises, à calculer rigoureusement la période d'un excitateur de forme donnée. Je n'y ai pas complètement réussi; mais les résultats obtenus, si incomplets qu'ils soient, ne me paraissent pas tout à fait indignes d'intérêt.

Deux cas sont à distinguer : celui où l'excitateur se trouve placé dans un espace indéfini; celui où il est placé dans une chambre close par des parois conductrices et remplie par un diélectrique. Dans le premier cas, l'énergie se dissipe constamment par radiation, et l'amplitude des oscillations va en diminuant. On exprime ce fait, en langage analytique, en disant que la période est imaginaire et que la partie réelle représente la période observée et la partie imaginaire le décrément logarithmique.

C'est dans le premier cas qu'on est placé dans les expériences ordinaires, pourvu que les parois de la salle soient, au moins en partie, assez éloignées pour n'exercer aucune influence; c'est malheureusement le second cas seulement que j'ai pu traiter. Peut-être des procédés analogues sont-ils applicables au premier cas, qui est plus compliqué.

Un excitateur peut donner naissance à des vibrations de périodes différentes et qu'on peut appeler *harmoniques*, bien que ces périodes ne soient pas multiples les unes des autres.

Soient

$$T_1, \quad T_2, \quad T_3, \quad \ldots$$

ces périodes rangées par ordre d'acuité croissante.

Dans le second cas, la phase est la même en tous les points du diélectrique,

ce qui n'arriverait pas dans le premier cas. Si nous désignons par L, M, N les composantes de la force magnétique, et si nous supposons que la vibration de période T_i existe seule, nous pourrons écrire

(1) $$L = L_i \cos n_i t, \qquad M = M_i \cos n_i t, \qquad N = N_i \cos n_i t,$$

$$n_i = \frac{2\pi}{T_i},$$

L_i, M_i et N_i étant des fonctions dépendant de x, y, z seulement et indépendantes du temps t.

Je désigne par A l'inverse de la vitesse de la lumière, par $d\tau$ un élément de volume du diélectrique qui remplit la chambre close où est placé l'excitateur; toutes les intégrales que nous allons rencontrer sont des intégrales triples étendues à tous les éléments $d\tau$ de l'espace occupé par ce diélectrique à l'extérieur de l'excitateur et à l'intérieur de la chambre.

Cela posé, considérons trois fonctions X, Y et Z de x, y et z assujetties aux conditions suivantes :

1° Elles doivent être finies et continues, ainsi que leurs dérivées du premier ordre, en tous les points du diélectrique;

2° Elles doivent satisfaire, dans tout le diélectrique, à l'équation dite *solénoïdale*

$$\frac{dX}{dx} + \frac{dY}{dy} + \frac{dZ}{dz} = 0;$$

3° A la surface qui limite le diélectrique, c'est-à-dire tant à la surface de l'excitateur qu'à celle des parois de la chambre, elles doivent être telles que le vecteur X, Y, Z soit tangent à cette surface.

Dans ces conditions, la valeur du rapport

$$\rho = \frac{\int \left[\left(\frac{dZ}{dy} - \frac{dY}{dz} \right)^2 + \left(\frac{dX}{dz} - \frac{dZ}{dx} \right)^2 + \left(\frac{dY}{dx} - \frac{dX}{dy} \right)^2 \right] d\tau}{\int (X^2 + Y^2 + Z^2)\, d\tau}$$

ne peut décroître au delà de toute limite.

On peut donc choisir les fonctions X, Y et Z de telle façon que ce rapport soit minimum.

Ce minimum est égal à $\frac{4\pi^2 A^2}{T_1^2}$, et il est atteint quand on a

$$\frac{X}{L_1} = \frac{Y}{M_1} = \frac{Z}{N_1},$$

L_1, M_1 et N_1 étant les trois fonctions définies par les équations (1).

Assujettissons encore les fonctions X, Y, Z à la condition

$$(2) \qquad \int (XL_1 + YM_1 + ZN_1)\,d\tau = 0;$$

le rapport ρ admettra encore un minimum plus grand évidemment que le précédent. Ce minimum seral égal à $\frac{4\pi^2 A^2}{T_2^2}$, et sera atteint quand on aura

$$\frac{X}{L_2} = \frac{Y}{M_2} = \frac{Z}{N_2}.$$

Si l'on assujettit maintenant X, Y, Z, non seulement à la condition (2), mais encore à la condition

$$(3) \qquad \int (XL_2 + YM_2 + ZN_2)\,d\tau = 0,$$

le nouveau minimum de ρ sera égal à $\frac{4\pi^2 A^2}{T_3^2}$, et sera atteint pour

$$\frac{X}{L_3} = \frac{Y}{M_3} = \frac{Z}{N_3},$$

et ainsi de suite.

On a ainsi les valeurs des périodes T_1, T_2, ..., ou tout au moins des inégalités auxquelles satisfont ces valeurs, et les conséquences mathématiques des hypothèses de Maxwell se prêteraient sans doute à une vérification expérimentale.

J'ajouterai que les résultats précédents devraient être modifiés si la chambre, au lieu d'avoir une forme convexe, avait par exemple la forme d'un tore. En réalité, la différence se réduirait à ceci qu'on trouverait $T_1 = \infty$.

SUR LE CALCUL
DE LA
PÉRIODE DES EXCITATEURS HERTZIENS

Archives des Sciences physiques et naturelles (Genève), 3e période, t. 25, p. 5-25 (1891).

La periode des excitateurs a d'abord été calculée à l'aide de la formule de Thomson :

$$\lambda = 2\pi \sqrt{LC},$$

λ désignant la longueur d'onde, L la self-induction en unités électromagnétiques, C la capacité en unités électrostatiques.

On a eu des doutes sur la valeur qu'il convient d'attribuer à L et à C. La self-induction L dépend en effet non seulement du coefficient k de Helmholtz qui est inconnu, mais de la distribution du courant dans le fil : il est certain que ce courant est presque entièrement à la surface de ce fil, mais on peut se demander s'il se transporte tout entier d'une extrémité à l'autre.

D'autre part, la capacité dépend évidemment de la distribution de l'électricité sur les conducteurs au commencement de chaque oscillation et il n'y a pas de raison pour que cette distribution soit celle qui correspondrait à l'état statique.

Mais il y a une autre difficulté bien plus grave ; dans la formule de Thomson on néglige complètement les courants de déplacement dont le rôle devient prépondérant dans des oscillations aussi rapides. D'où cette première différence : avec cette formule, l'amplitude des oscillations semblerait constante, tandis qu'elle décroît très rapidement.

Ces incertitudes montrent assez quel intérêt il y aurait à posséder une méthode qui permettrait de calculer rigoureusement la période d'un excitateur

donné. L'importance du sujet m'engage à publier les résultats que j'ai obtenus dans cet ordre d'idées, quelque incomplets qu'ils soient.

Le problème à résoudre peut s'énoncer comme il suit :

Trouver un nombre μ et six fonctions X, Y, Z, L, M, N, des trois coordonnées x, y et z qui satisfassent aux conditions suivantes :

1° Ces six fonctions sont analytiques en tous points de l'espace occupé par le diélectrique.

2° Si cet espace s'étend à l'infini, ces six fonctions doivent s'annuler à l'infini.

3° En tous les points du diélectrique, elles doivent satisfaire aux équations suivantes :

$$(1)\quad \begin{cases} X = \dfrac{dN}{dy} - \dfrac{dM}{dz}, & K\mu^2 L = \dfrac{dZ}{dy} - \dfrac{dY}{dz}; \\ Y = \dfrac{dL}{dz} - \dfrac{dN}{dx}, & K\mu^2 M = \dfrac{dX}{dz} - \dfrac{dZ}{dx}; \\ Z = \dfrac{dM}{dx} - \dfrac{dL}{dy}, & K\mu^2 N = \dfrac{dY}{dx} - \dfrac{dX}{dy}; \end{cases}$$

d'où

$$\frac{dX}{dx} + \frac{dY}{dy} + \frac{dZ}{dz} = \frac{dL}{dx} + \frac{dM}{dy} + \frac{dN}{dz} = 0.$$

4° A la surface des conducteurs et en particulier de l'excitateur, le vecteur, dont les composantes sont X, Y, Z, est normal à cette surface.

Le nombre μ et nos six fonctions peuvent d'ailleurs être soit réels soit imaginaires. Cela posé, si l'on fait :

$$\begin{aligned} 4\pi f &= \text{partie réelle de } e^{i\mu t}X, & \alpha &= \text{partie réelle de } i\mu e^{i\mu t}L; \\ 4\pi g &= \text{partie réelle de } e^{i\mu t}Y, & \beta &= \text{partie réelle de } i\mu e^{i\mu t}M; \\ 4\pi h &= \text{partie réelle de } e^{i\mu t}Z, & \gamma &= \text{partie réelle de } i\mu e^{i\mu t}N; \end{aligned}$$

le déplacement électrique (f, g, h) et la force magnétique (α, β, γ) satisferont aux équations de Maxwell. On aura ainsi défini une perturbation électromagnétique périodique compatible avec ces équations.

La période sera égale à 2π divisé par la partie réelle de μ.

Si le nombre μ est réel, l'amplitude des oscillations est constante.

Si le nombre μ est imaginaire, cette amplitude décroît suivant une loi exponentielle; il y a un *décrément logarithmique* dépendant de la partie imaginaire de μ.

Cela posé, deux cas sont à distinguer :

1° ou bien l'excitateur est placé dans une chambre entièrement close, à parois conductrices, de sorte que l'espace occupé par le diélectrique est fini ;

2° ou bien l'excitateur est placé dans un espace indéfini occupé par le diélectrique.

Le premier cas est beaucoup plus simple. Malheureusement c'est le second qui a été réalisé dans les expériences ; les salles où l'on opérait étaient assez grandes, par rapport aux dimensions de l'excitateur, pour pouvoir être assimilées à un espace indéfini. Je reviendrai sur ce point dans un instant.

Les différences entre les deux cas sont très grandes.

Dans le premier cas, l'énergie ne peut se dissiper au dehors par rayonnement ; l'amplitude des oscillations est donc constante et μ est réel.

Dans le second cas, au contraire, il y a rayonnement et, par conséquent, il y a un décrément logarithmique et μ est imaginaire.

Dans le premier cas μ étant réel, on peut toujours supposer que les six fonctions sont également réelles, car si six fonctions imaginaires satisfaisaient aux équations (1), il en serait de même de leurs parties réelles.

Si les six fonctions sont réelles, cela signifie que la *phase* est la même en tous les points du diélectrique.

Au contraire, dans le second cas, la phase est différente aux divers points du diélectrique et les six fonctions sont imaginaires.

D'ailleurs une comparaison simple permet de se rendre compte de ce fait. Si un diapason vibre dans une atmosphère indéfinie le son se propagera dans toutes les directions avec une vitesse déterminée et la phase ne sera pas la même aux divers points de cette atmosphère, mais dépendra de la distance au diapason.

Si, au contraire, ce diapason vibre dans un espace clos, par exemple, dans l'espace compris entre deux plans parallèles, le son se réfléchira sur ces deux plans et les ondes réfléchies interféreront de manière à produire des nœuds et des ventres, ou ce qu'on appelle un système d'*ondes stationnaires*. La phase sera la même en tous les points.

Cet état définitif où les ondes sont stationnaires ne peut s'établir, bien entendu, qu'au bout d'un certain temps, car il faut que le son émané du diapason (ou dans le cas qui nous occupe, la perturbation émanée de l'excitateur) ait eu le temps de se propager jusqu'à la paroi réfléchissante.

Il faut ensuite, pour que les ondes stationnaires soient appréciables, que la perturbation ne soit pas, avant d'atteindre la paroi réfléchissante, assez affaiblie par le rayonnement pour devenir insensible.

C'est pour cette raison que si la salle où l'on opère est très grande, tout se passe comme si l'on était placé dans un espace indéfini. C'est donc le second cas qui est réalisé dans les expériences et qui est, par conséquent, de beaucoup le plus intéressant. C'est malheureusement au premier cas que j'ai dû me borner.

Considérons donc une chambre close limitée intérieurement par la surface de l'excitateur, extérieurement par des parois conductrices qui, au point de vue analytique, joueront le même rôle que cette surface, et remplie par un diélectrique. Je désignerai par $d\omega$ un élément quelconque du volume du diélectrique, par $d\tau$ un élément de la surface des conducteurs, par l, m, n les cosinus directeurs de la normale à cet élément.

Soient L, M, N trois fonctions quelconques assujetties seulement aux conditions suivantes, que j'appellerai les conditions (2) :

1° Elles sont analytiques et uniformes dans tout le diélectrique.

2° On a dans le diélectrique

$$\frac{dL}{dx}+\frac{dM}{dy}+\frac{dN}{dz}=0.$$

3° Le vecteur (L, M, N) en tous points de la surface des conducteurs est tangent à cette surface.

4° L'intégrale

$$T=\int (L^2+M^2+N^2)\,d\tau$$

étendue au diélectrique est égale à 1.

Cela posé, envisageons l'intégrale

$$U=\int\left[\left(\frac{dN}{dy}-\frac{dM}{dz}\right)^2+\left(\frac{dL}{dz}-\frac{dN}{dx}\right)^2+\left(\frac{dM}{dx}-\frac{dL}{dy}\right)^2\right]d\tau.$$

Cette intégrale ne peut s'annuler. En effet, si elle s'annulait, on aurait :

$$\frac{dN}{dy}=\frac{dM}{dz},\qquad \frac{dL}{dz}=\frac{dN}{dx},\qquad \frac{dM}{dx}=\frac{dL}{dy}$$

et, par conséquent,

$$L\,dx+M\,dy+N\,dz=d\varphi,$$

$d\varphi$ étant la différentielle exacte d'une fonction φ qui doit être uniforme, puisque les fonctions L, M, N le sont (cette dernière partie de la démonstration suppose que la chambre est un « espace simplement connexe, » c'est-à-dire n'a pas, par exemple, la forme d'un tore). On a donc :

$$L = \frac{d\varphi}{dx}, \qquad M = \frac{d\varphi}{dy}, \qquad N = \frac{d\varphi}{dz}.$$

Les conditions (2) signifient alors que $\Delta\varphi$ est nul en tous les points du diélectrique et $\frac{d\varphi}{dn}$ nul en tous les points de la surface qui le limite. Mais cela ne peut avoir lieu que si φ est une constante, c'est-à-dire si

$$L = M = N = 0.$$

Il est aisé de voir que c'est impossible, puisque $T = 1$.

L'intégrale U ne pouvant s'annuler admet un *minimum*. Il existe donc trois fonctions L, M, N pour lesquelles ce *minimum* est atteint.

Ces fonctions doivent être telles que $\delta U = 0$ toutes les fois que $\delta T = 0$ et que

(3) $$\frac{d\,\delta L}{dx} + \frac{d\,\delta M}{dy} + \frac{d\,\delta N}{dz} = \sum \frac{d\,\delta L}{dx} = 0$$

et que le vecteur $(\delta L, \delta M, \delta N)$ est tangent à la surface des conducteurs en tous les points de cette surface.

Cette dernière condition s'exprime par l'équation :

(4) $$l\,\delta L + m\,\delta M + n\,\delta N = \Sigma\, l\,\delta L = 0.$$

Posons pour abréger :

$$X = \frac{dN}{dy} - \frac{dM}{dz}, \qquad Y = \frac{dL}{dz} - \frac{dN}{dx}, \qquad Z = \frac{dM}{dx} - \frac{dL}{dy}.$$

Il viendra :

$$\delta U = 2\int (X\,\delta X + Y\,\delta Y + Z\,\delta Z)\,d\tau,$$

$$\delta T = 2\int (L\,\delta L + M\,\delta M + N\,\delta N)\,d\tau.$$

La valeur de δU peut être transformée par l'intégration par parties ; on trouve :

$$\int X\,\delta X\,d\tau = \int X(m\,\delta N - n\,\delta M)\,d\omega - \int \left(\delta N \frac{dX}{dy} - \delta M \frac{dX}{dy}\right) d\tau,$$

de sorte que la condition $\delta U = 0$ peut s'écrire :

$$\frac{\delta U}{2} = \int \begin{vmatrix} X & Y & Z \\ l & m & n \\ \delta L & \delta M & \delta N \end{vmatrix} d\omega - \int \Sigma \left[\delta L \left(\frac{dY}{dz} - \frac{dZ}{dy} \right) \right] d\tau = 0.$$

Cette condition doit être remplie quelles que soient les variations δL, δM, δN, pourvu qu'elles satisfassent aux relations (3) et (4) et à la relation $\delta T = 0$.

Le calcul des variations nous permet d'en conclure ce qui suit :

On peut trouver un nombre $K\mu^2$ et deux fonctions φ et ψ telles que la condition

(5) $$\frac{\delta U}{2} - \frac{K\mu^2}{2} \delta T - \int \varphi \Sigma \left(\frac{d\,\delta L}{dx} \right) d\tau - \int \psi \Sigma (l\,\delta L)\, d\omega = 0$$

soit remplie quand les variations δL, δM, δN sont *absolument quelconques*. Nous transformerons encore l'une de ces intégrales par l'intégration par parties en écrivant :

$$\int \varphi \Sigma \left(\frac{d\,\delta L}{dx} \right) d\tau = \int \varphi \Sigma (l\,\delta L)\, d\omega - \int \varphi \Sigma \left(\delta L \frac{d\varphi}{dx} \right) d\tau.$$

L'équation (5) peut alors s'écrire :

$$\int d\tau \Sigma \left[\delta L \left(\frac{dZ}{dy} - \frac{dY}{dz} - K\mu^2 L - \frac{d\varphi}{dx} \right) \right] + \int d\omega \left[\delta L (Yn - Zm + [\varphi + \psi] l) \right] = 0.$$

On doit donc avoir en tous les points du diélectrique :

(6) $$\begin{cases} K\mu^2 L = \dfrac{dZ}{dy} - \dfrac{dY}{dy} - \dfrac{d\varphi}{dx}, \\ K\mu^2 M = \dfrac{dX}{dz} - \dfrac{dZ}{dx} - \dfrac{d\varphi}{dy}, \\ K\mu^2 N = \dfrac{dY}{dx} - \dfrac{dZ}{dy} - \dfrac{d\varphi}{dz} \end{cases}$$

et en tous les points de la surface des conducteurs :

(7) $$\begin{cases} Zm - Yn = l\,(\varphi + \psi), \\ Xn - Zl = m(\varphi + \psi), \\ Yl - Xm = n\,(\varphi + \psi). \end{cases}$$

Si l'on ajoute les trois équations (7) après les avoir respectivement multipliées par l, m, n, il vient :

$$(l^2 + m^2 + n^2)(\varphi + \psi) = 0.$$

Donc $\varphi - \psi$ est nul en tous les points de la surface des conducteurs et on a :

$$\frac{X}{l} = \frac{Y}{m} = \frac{Z}{n}, \tag{8}$$

ce qui est une des conditions que nous nous sommes imposées.

On peut en tirer la conséquence suivante :

Envisageons l'intégrale :

$$\int (X\,dx + Y\,dy + Z\,dz) = \int \Sigma X\,dx$$

prise le long d'une courbe fermée quelconque tracée sur la surface des conducteurs. Cette intégrale est nulle puisque le vecteur X, Y, Z est normal au conducteur, ce qui est exprimé par l'équation (8).

Si nous transformons cette intégrale simple en intégrale double par la formule connue, il vient :

$$\int \Sigma l \left(\frac{dZ}{dy} - \frac{dY}{dz} \right) d\omega = 0$$

et comme cela a lieu pour un contour fermé quelconque :

$$\Sigma l \left(\frac{dZ}{dy} - \frac{dY}{dz} \right) = 0. \tag{9}$$

Ajoutons les équations (6) après les avoir respectivement différentiées par rapport à x, y et z, il vient :

$$K \mu^2 \Sigma \frac{dL}{dx} = - \Delta \varphi.$$

Mais on a, par hypothèse :

$$\frac{dL}{dx} + \frac{dM}{dy} + \frac{dN}{dz} = 0.$$

Il reste donc

$$\Delta \varphi = 0.$$

En un point de la surface des conducteurs on a, en ajoutant les équations (6) multipliées respectivement par l, m, n et tenant compte de la relation (9) :

$$K \mu^2 \Sigma l L = - \frac{d\varphi}{dn},$$

mais on a, par hypothèse, en tous les points de la surface :

$$l L + m M + n N = 0, \qquad \text{d'où} \qquad \frac{d\varphi}{dn} = 0.$$

On en conclut que φ est une constante ; on a donc

$$K\mu^2 L = \frac{dZ}{dy} - \frac{dY}{dz}$$

et deux autres équations analogues. Nos six fonctions X, Y, Z, L, M, N satisfont donc bien aux conditions imposées.

Remarquons maintenant que nous avons :

$$U = \int (X^2 + Y^2 + Z^2)\, d\tau = \int \Sigma X \left(\frac{dN}{dy} - \frac{dM}{dz}\right) d\tau$$

ou en intégrant par parties, d'après les mêmes règles que plus haut :

$$U = \int \begin{vmatrix} X & Y & Z \\ l & m & n \\ L & M & N \end{vmatrix} d\omega - \int \Sigma L \left(\frac{dY}{dz} - \frac{dZ}{dy}\right) d\tau.$$

La première intégrale est nulle, la seconde est égale à $-K\mu^2 T$.

On a donc :

$$\frac{U}{T} = K\mu^2.$$

D'où la règle suivante : le nombre $K\mu^2$ dont dépend la période la plus grave est le *minimum* de l'expression $\frac{U}{T}$ quand cette expression est formée à l'aide de trois fonctions L, M, N satisfaisant aux conditions (2).

Mais à côté de cette période la plus grave, il peut y avoir des harmoniques supérieures dont je dirai quelques mots, bien que l'expérience ne les ait pas encore décelées.

Soit μ_1, le nombre μ qui correspond à la période la plus grave, soient L_1, M_1, N_1, X_1, Y_1, Z_1, les fonctions L, M, N, X, Y, Z que je viens de définir et qui correspondent à cette période $\frac{2\pi}{\mu_1}$, de sorte que :

$$X_1 = \frac{dN_1}{dy} - \frac{dM_1}{dz}, \qquad K\mu_1^2 L_1 = \frac{dZ_1}{dy} - \frac{dY_1}{dz}, \qquad \ldots.$$

Soient maintenant L, M, N trois fonctions quelconques assujetties seulement d'une part à satisfaire aux conditions (2) et d'autre part à la condition

$$(10) \qquad \int (LL_1 + MM_1 + NN_1)\, d\tau = 0.$$

Je dis d'abord que si l'on pose pour abréger

$$X = \frac{dN}{dy} - \frac{dM}{dz},$$

cette condition (10) entraîne la suivante :

$$(11) \qquad \int (XX_1 + YY_1 + ZZ_1)\,d\tau = 0.$$

Appelons V le premier membre de l'équation (11) à démontrer, il vient :

$$V = \int \Sigma XX_1\,d\tau = \int \Sigma\left(\frac{dN}{dy} - \frac{dM}{dz}\right) X_1\,d\tau$$

ou en intégrant par parties :

$$V = \int \Sigma (Nm - Mn) X_1\,d\omega - \int \Sigma\left(N\frac{dX_1}{dy} - M\frac{dX_1}{dz}\right) d\tau,$$

ce qui peut s'écrire :

$$V = \int \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ l & m & n \\ L & M & N \end{vmatrix} d\omega - \int \Sigma L\left(\frac{dY_1}{dz} - \frac{dZ_1}{dy}\right) d\tau.$$

La première intégrale est nulle, parce que

$$\frac{X_1}{l} = \frac{Y_1}{m} = \frac{Z_1}{n}$$

et il reste :

$$V = K\mu_1^2 \int \Sigma LL_1\,d\tau = 0.$$

Cela posé, formons avec nos trois fonctions L, M, N l'intégrale U. Cette intégrale ne peut s'annuler; elle admettra donc un *minimum* qui sera plus grand que le *minimum* $K\mu_1^2$ dont U était susceptible quand on n'imposait à ces fonctions que les conditions (2) et qu'on n'avait pas encore ajouté la condition supplémentaire (10).

Supposons ce *minimum* atteint; on devra avoir $\delta U = 0$ toutes les fois que

$$\delta T = 0, \qquad \sum \frac{d\,\delta L}{dx} = 0, \qquad \delta \int \Sigma LL_1\,d\tau = 0$$

et que, de plus, on aura à la surface des conducteurs :

$$\Sigma\, l\,\delta L = 0.$$

Ce sont les conditions auxquelles nous avons été conduits plus haut et auxquelles j'ai dû ajouter une condition supplémentaire, à savoir que la variation du premier membre de (10) doit être nulle.

Le calcul des variations nous apprend alors que l'on peut trouver deux nombres $K\mu^2$ et h et deux fonctions φ et ψ telles que la condition

$$(12)\qquad \frac{\delta U}{2} - \frac{K\mu^2}{2}\delta T + h\int \Sigma L_1\,\delta L\,d\tau - \int \varphi\,\Sigma\frac{d\,\delta L}{dx}\,d\tau + \int \psi\,\Sigma(l\,\delta L)\,d\omega = 0$$

soit remplie pour des variations L, M et N *quelconques*.

En tenant compte des valeurs trouvées plus haut pour les intégrales

$$\delta U \quad \text{et} \quad \int \varphi \sum \frac{d\,\delta L}{dx}\,d\tau,$$

je puis écrire :

$$\int d\tau\,\Sigma\left[\delta L\left(\frac{dZ}{dy} - \frac{dY}{dz}\right) - K\mu^2 L + hL_1 - \frac{d\varphi}{dx}\right]$$
$$+ \int d\omega\left[\delta L(Yn - Zm + [\varphi - \psi]\,l)\right] = 0,$$

d'où les conditions

$$(13)\qquad K\mu^2 L = \frac{dZ}{dy} - \frac{dY}{dz} - \frac{d\varphi}{dx} + hL_1, \quad \ldots,$$

$$(14)\qquad Zm - Yn = l(\varphi - \psi), \quad \ldots$$

analogues aux conditions (6) et (7).

On verrait comme plus haut que $\varphi - \psi$ est nul en tous les points de la surface des conducteurs et que l'on a, à la surface de ces conducteurs :

$$\frac{X}{l} = \frac{Y}{m} = \frac{Z}{n},$$

$$\Sigma\, l\left(\frac{dZ}{dy} - \frac{dY}{dz}\right) = 0.$$

Si nous ajoutons l'équation (13) et les deux équations analogues après les avoir respectivement différentiées par rapport à x, y, z et si nous remarquons que

$$\Sigma\frac{dL}{dx} = \Sigma\frac{dL_1}{dx} = 0,$$

nous trouverons :

$$\Delta\varphi = 0.$$

Ajoutons maintenant l'équation (13) et les deux équations analogues après

les avoir multipliées par l, m, n et rappelons que :

$$\Sigma l L = \Sigma l L_1 = \Sigma l \left(\frac{dZ}{dy} - \frac{dY}{dz}\right) = 0,$$

il viendra, à la surface des conducteurs :

$$\frac{d\varphi}{dn} = 0,$$

ce qui montre que φ est identiquement nul.

Il me reste à établir que $h = 0$.

Pour cela j'ajoute les équations (13) après les avoir multipliées par L_1, M_1, N_1, j'intègre ensuite par rapport à $d\tau$ dans toute l'étendue du diélectrique.

En me rappelant que

$$\int (\Sigma L_1^2)\, d\tau = 1, \qquad \int \Sigma L L_1\, d\tau = 0,$$

je trouve :

$$h = \int \Sigma L_1 \left(\frac{dY}{dz} - \frac{dZ}{dy}\right) d\tau$$

ou en intégrant par parties :

$$h = \int \Sigma L_1 (Yn - Zm)\, d\omega - \int \Sigma \left(Y \frac{dL_1}{dz} - Z \frac{dL_1}{dy}\right) d\tau.$$

La première intégrale est nulle parce que :

$$\frac{X}{l} = \frac{Y}{m} = \frac{Z}{n}$$

et il reste :

$$h = \int \Sigma X \left(\frac{dM_1}{dz} - \frac{dN_1}{dy}\right) d\tau = -\int \Sigma X X_1\, d\tau = 0.$$

On reconnaîtrait ensuite comme plus haut que l'on a :

$$\frac{U}{T} = K\mu^2.$$

Appelons μ_2 la valeur de μ qui correspond à ce *minimum*, appelons L_2, M_2, N_2, X_2, Y_2, Z_2 les valeurs correspondantes de nos six fonctions. Nous aurons défini une nouvelle vibration de période $\frac{2\pi}{\mu_2}$, que l'on pourra appeler la première harmonique. Le nombre μ_2 est donné par la règle suivante : on forme l'intégrale U avec trois fonctions L, M, N satisfaisant aux conditions (2) et (10) et la plus petite valeur que puisse prendre cette intégrale est $K\mu_2^2$.

On définirait de la même manière la seconde harmonique.

On considérerait trois fonctions L, M, N satisfaisant aux conditions (2) et (10) et satisfaisant, en outre, à la condition

$$\int (LL_2 + MM_2 + NN_2)\,d\tau = 0$$

et l'on chercherait à déterminer ces trois fonctions de telle sorte que l'intégrale U soit *minimum*. On arriverait ainsi à trois équations analogues à (13) et dont la première serait :

$$(13\ bis) \qquad K\mu_2^2 L = \frac{dZ}{dy} - \frac{dY}{dz} - \frac{d\varphi}{dx} + h_1 L_1 + h_2 L_2,$$

h_1 et h_2 étant deux nombres constants. On verrait, comme plus haut, que $\varphi = 0$. On démontrerait ensuite que $h_1 = 0$ en multipliant les équations (13 *bis*) par L_1, M_1, N_1 ajoutant et intégrant; et que $h_2 = 0$ en multipliant ces équations par L_2, M_2, N_2 ajoutant et intégrant.

On mettrait donc ainsi en évidence l'existence d'une seconde harmonique et la période de cette harmonique serait $\frac{2\pi}{\mu_2}$, $K\mu_2^2$ étant le *minimum* de U.

Et ainsi de suite.

Tous ces raisonnements supposent que la chambre où est enfermé l'excitateur constitue un local simplement connexe, limité par une ou plusieurs surfaces simplement connexes. Ils s'appliqueraient par exemple à une chambre parallélépipédique contenant un excitateur sphérique et plusieurs sphères conductrices. Ils ne s'appliqueraient plus si la chambre avait la forme d'un tore ou si elle contenait un ou plusieurs conducteurs en forme de tore.

Dans ce cas il ne serait plus permis, en effet, de conclure $\varphi = 0$ de ce que

$$\Delta\varphi = \frac{d\varphi}{dn} = 0.$$

Voyons comment les résultats se trouveraient modifiés dans ce cas.

En premier lieu, si nous supposons les fonctions L, M et N assujetties seulement aux conditions (2), nous n'avons plus le droit d'en conclure que l'intégrale U ne peut jamais s'annuler.

Supposons en effet, pour fixer les idées, qu'on opère dans une chambre en forme de tore et qu'on prenne l'axe de ce tore pour axe des z; posons ensuite :

$$\varphi_1 = k \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x}$$

et que l'on prenne ensuite :

$$L_1 = \frac{d\varphi_1}{dx}, \qquad M_1 = \frac{d\varphi_1}{dy}, \qquad N_1 = 0.$$

Si k est un coefficient numérique choisi de telle sorte que

$$\int (L_1^2 + M_1^2 + N_1^2)\, d\tau = k \int \frac{d\tau}{(x^2+y^2)} = 1,$$

les fonctions L_1, M_1 et N_1 satisferont aux conditions (2) et la valeur correspondante de U est nulle.

Je supposerai, pour simplifier, que dans cette chambre en forme de tore ne se trouve aucune surface conductrice qui ne soit simplement connexe. Alors, des conditions

$$\Delta\varphi = \frac{d\varphi}{dn} = 0$$

il ne nous est plus permis de conclure que φ soit identiquement nulle, mais que φ se réduit à φ_1 à un facteur constant près.

Le premier *minimum* de U étant nul, le son fondamental serait de période infinie, et cette première solution doit être rejetée. Mais si l'on continue à appliquer le procédé que j'ai exposé plus haut, le second *minimum* que l'on rencontre (ainsi que les suivants) nous fournit une véritable solution du problème.

Imaginons en effet que les fonctions L, M, N, au lieu d'être assujetties seulement aux conditions (2), le soient en outre à la condition :

$$(10) \qquad \int (LL_1 + MM_1 + NN_1)\, d\tau = \int \left(L\frac{d\varphi_1}{dx} + M\frac{d\varphi_1}{dy} \right) d\tau = 0.$$

Alors U ne peut plus s'annuler; en effet, pour que U fût nul, il faudrait que :

$$L = \frac{d\varphi}{dx}, \qquad M = \frac{d\varphi}{dy}, \qquad N = \frac{d\varphi}{dz}$$

avec les conditions

$$\Delta\varphi = \frac{d\varphi}{dn} = 0,$$

ce qui entraîne, comme nous l'avons vu,

$$\varphi = h\varphi_1,$$

h étant une constante. La relation (10) devient alors

$$h \int \Sigma \left(\frac{d\varphi_1}{dx} \right)^2 d\tau = 0.$$

d'où

$$h = 0, \qquad L = M = N = 0,$$

ce qui est contraire à l'hypothèse $T = 1$.

Si U ne peut pas s'annuler, il a un *minimum* et si nous supposons que les fonctions L, M, N aient été choisies de façon que ce *minimum* soit atteint, on arrivera, par le calcul exposé précédemment en détail, aux équations (13) et (14); je récris la première équation (13) :

$$K\mu^2 L = \frac{dZ}{dy} - \frac{dY}{dz} - \frac{d\varphi}{dx} + h L_1.$$

On verrait, comme plus haut, que

$$\Delta\varphi = \frac{d\varphi}{dn} = 0$$

et on en conclurait que φ est égal à φ_1 à un facteur constant près et, par conséquent, $\frac{d\varphi}{dx}, \frac{d\varphi}{dy}, \frac{d\varphi}{dz}$ égaux à L_1, M_1, N_1, à ce même facteur constant près.

On peut donc faire rentrer le terme $-\frac{d\varphi}{dx}$ dans le terme hL_1 en attribuant à h une valeur considérable.

Le reste du calcul s'achèverait comme dans le cas que nous avions d'abord envisagé.

On verrait aisément ce qu'il convient de faire si les surfaces présentaient des connexions plus compliquées. Je ne veux pas m'attarder à des cas qui ne se rencontreront vraisemblablement jamais dans la pratique, ni abuser plus longtemps de l'hospitalité qui m'est offerte.

Paris, 26 novembre 1890.

SUR LA RÉSONANCE MULTIPLE

DES

OSCILLATIONS HERTZIENNES

Archives des Sciences physiques et naturelles (Genève), 3e période, t. 25, p. 609-627 (1891).

On connaît le phénomène de la résonance multiple découvert par MM. Sarasin et de la Rive et l'explication que ces savants en ont donnée (¹). L'excitateur émettrait, non pas une vibration simple, mais une sorte de spectre continu et chaque résonateur renforcerait ensuite celle des vibrations de ce spectre avec laquelle il serait en harmonie. La théorie semblerait exiger au contraire que le spectre émis par l'excitateur fût composé seulement d'un certain nombre d'harmoniques distinctes, et fût, par conséquent, discontinu. Mais, outre que cette théorie est encore assez mal établie, elle ne tient aucun compte des phénomènes sans doute très complexes dont l'interrupteur à étincelles est le siège et qui nous sont totalement inconnus. On conçoit que le rôle de cette étincelle puisse être de donner un certain flou aux raies du spectre de l'excitateur et l'on peut se demander si elles ne peuvent de cette façon s'élargir assez pour rendre compte des apparences observées par les physiciens genevois. Ce serait donc se méprendre singulièrement sur la portée de cette théorie que de rejeter la façon de voir de MM. Sarasin et de la Rive.

Mais il est permis néanmoins de rechercher si une autre explication n'est pas possible. Dans l'état actuel de la Science, il pourrait être dangereux de s'en

(¹) Ed. Sarasin et L. de la Rive, *Sur la résonance multiple des ondulations électriques de M. Hertz se propageant le long de fils conducteurs* (*Arch. Sc. phys. et nat.*, t. 23, 1890, p. 113).

tenir à une interprétation unique. Il faut au contraire examiner toutes celles qui sont possibles, en attendant que de nouvelles expériences permettent de décider entre elles. C'est ce qui m'a engagé à proposer, dans mon Ouvrage : *Électricité et Optique*, une explication nouvelle du phénomène de la résonance multiple. Je n'y ai consacré que peu de lignes, trop peu de lignes peut-être pour être complètement clair; aussi suis-je très reconnaissant à M. le Directeur des *Archives*, de l'hospitalité qu'il m'offre et qui me permet de développer ma pensée.

Cette explication repose sur le rapide amortissement des oscillations émises par l'excitateur. Il paraît certain, en effet, qu'elles s'éteignent très promptement et c'est là un fait dont toute théorie doit tenir compte. Je chercherai à montrer qu'il suffit peut-être pour expliquer tous les phénomènes observés et qu'en tout cas il doit contribuer à les produire autant que la cause à laquelle MM. Sarasin et de la Rive les attribuaient uniquement. Une raie spectrale d'une certaine largeur doit, grâce à lui, produire l'effet d'une bande beaucoup plus large encore.

Il est difficile de parler convenablement de ces faits si mal connus encore et si compliqués; le langage ordinaire est insuffisant pour rendre leur prodigieuse complexité et le langage mathématique, auquel je serai forcé de recourir, prêtera à ma pensée une précision factice, que ne comporte ni l'état actuel de nos connaissances, ni l'imperfection de nos moyens d'observation. Le lecteur m'excusera et il se rendra compte que toutes les formules qui vont suivre ne peuvent être que de grossières approximations.

De l'amortissement des oscillations.

Tout nous porte à croire que l'amortissement des oscillations de l'excitateur doit être considérable. Le calcul a pu être fait complètement pour l'excitateur sphérique de Lodge; il a montré que si la théorie de Maxwell est supposée exacte, l'amplitude de chaque demi-oscillation doit être à celle de la demi-oscillation précédente dans le rapport de 0,163 à 1.

Mais dans l'excitateur de Hertz les oscillations paraissent décroître avec une rapidité beaucoup moindre, quoique très grande encore.

Ce décrément dépend de plusieurs causes; la principale est le rayonnement, mais il faut tenir compte également de la résistance des conducteurs et de celle

de l'interrupteur à étincelles; cette dernière est elle-même de deux sortes : l'interrupteur peut d'abord être assimilé à un conducteur ordinaire de résistance assez grande et il peut également être le siège d'une force contre-électromotrice ; cette force existe certainement avant que l'étincelle n'éclate, puisque c'est elle qui en empêche l'explosion immédiate et il est probable qu'elle ne disparaît ensuite que partiellement.

Il est difficile de tenir compte à la fois de toutes ces causes; Hertz a calculé la part du rayonnement; son calcul semble suffisamment approché, mais il a adopté une valeur de la longueur d'onde qui est probablement inexacte, $4^{m},80$ au lieu de 3^{m}. Il convient donc de corriger son résultat. L'énergie rayonnée pendant une demi-oscillation n'est pas la vingtième partie, mais la sixième partie de l'énergie totale. Si l'on tient compte de toutes les causes de perte, on trouvera, bien entendu, un amortissement plus rapide encore.

Du résonateur rectiligne.

Imaginons un excitateur ou un résonateur formé d'un fil rectiligne de diamètre d et de longueur l, interrompu en son milieu. On peut admettre que la demi-longueur d'onde est précisément l. Pour évaluer le décrément, nous allons appliquer à cet excitateur le calcul de Hertz.

Soit H l'énergie totale au commencement des oscillations, P l'énergie rayonnée pendant une demi-oscillation. Nous nous proposons de calculer le rapport de P à H.

Considérons maintenant une distribution électrique quelconque; multiplions chaque masse électrique par sa distance à un plan et faisons la somme de ces produits. Cette somme pourra s'appeler le moment de cette distribution par rapport à ce plan. Si la somme algébrique de toutes les masses est nulle, le moment sera le même par rapport à deux plans parallèles.

Envisageons la distribution qui existe au début des oscillations et appelons M le moment de cette distribution par rapport à un plan perpendiculaire au fil.

Le calcul de Hertz donne, en appelant λ la demi-longueur d'onde :

$$P = \frac{\pi}{3}\frac{M^2}{\lambda^2}.$$

Quelle est la distribution électrique au début des oscillations ? On peut admettre que si nous appelons $e\,dx$ la quantité d'électricité qui se trouve entre

deux sections du fil situées respectivement à des distances x et $x + dx$ du milieu de ce fil, on aura approximativement :

$$e = \alpha \sin \frac{\pi x}{l},$$

α étant une constante. Il vient alors :

$$M = \alpha \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \sin \frac{\pi x}{l} x \, dx = \frac{2 \alpha l^2}{\pi^2},$$

d'où, puisque $\lambda = l$,

$$P = \frac{4 \alpha^2 l}{3 \pi^3}.$$

Calculons maintenant H.

Je me bornerai à dire, ce qui est très suffisant pour mon objet, que H est certainement très notablement supérieur à

$$\frac{\alpha^2 l}{4} \left(\log \frac{l}{d} - 1 \right).$$

On a donc :

$$\frac{P}{H} < \frac{16}{3 \pi^2 \left(\log \frac{l}{d} - 1 \right)}.$$

Si l'on a, par exemple, en centimètres : $l = 300$, $d = \frac{1}{2}$; d'où

$$\log \frac{l}{d} = \log 600 = 6,396,$$

il vient :

$$\frac{P}{H} < \frac{1}{30}.$$

Si l'on observe que mon approximation dans le calcul de H est grossière et que cette quantité est probablement beaucoup au-dessus de la limite que je lui ai assignée; si, d'autre part, on considère que les fils employés dans les résonateurs sont souvent plus fins que je ne l'ai supposé, on conclura que l'amortissement avec un excitateur rectiligne est incomparablement moins rapide qu'avec l'excitateur de Hertz.

Du résonateur circulaire.

Un résonateur circulaire peut fonctionner de deux manières différentes. Quand l'étincelle a jailli, il se comporte comme un circuit fermé ; au contraire,

avant que l'étincelle paraisse, on doit considérer le courant comme nul aux deux extrémités. Dans mon Ouvrage : *Électricité et Optique*, je me suis surtout occupé du premier mode de fonctionnement ; j'ai peut-être eu tort, car le second cas paraît, d'après les faits expérimentaux les mieux constatés, jouer un rôle prépondérant.

Il est aisé d'ailleurs d'y appliquer la même analyse dont j'ai fait usage dans le chapitre X de mon Ouvrage. Reprenons les notations de ce chapitre et désignons par s l'arc du résonateur, par i l'intensité du courant, par S la longueur totale du fil, par X la force électromotrice ; soient C et K deux constantes ; la dernière est l'inverse du carré de la vitesse de la lumière ; l'équation à laquelle on a à satisfaire devient :

$$(1) \qquad \frac{d^2 i}{ds^2} - K \frac{d^2 i}{dt^2} = \frac{K}{C} \frac{dX}{dt}.$$

De plus, i doit être nul aux deux extrémités du fil, c'est-à-dire pour $s = 0$ et pour $s = S$.

Voyons d'abord comment se comportera notre résonateur, si l'on suppose qu'après y avoir fait naître des courants on l'abandonne à lui-même, c'est-à-dire que X soit nul. Il vient alors :

$$\frac{d^2 i}{ds^2} - K \frac{d^2 i}{dt^2} = 0.$$

C'est l'équation des cordes vibrantes. Il vient donc, en désignant par A_1, $A_2, \ldots, A_m, \ldots, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m, \ldots,$ des constantes d'intégration :

$$(2) \qquad i = A_1 \sin \frac{\pi s}{S} \cos\left(\frac{\pi t}{S\sqrt{k}} + \alpha_1\right)$$
$$+ A_2 \sin \frac{2\pi s}{S} \cos\left(\frac{2\pi t}{S\sqrt{k}} + \alpha_2\right) + \ldots + A_m \sin \frac{m\pi s}{S} \cos\left(\frac{m\pi t}{S\sqrt{k}} + \alpha_m\right) + \ldots.$$

On reconnaît ainsi la possibilité d'une série d'harmoniques qui pourront coexister dans le résonateur, mais la première harmonique (pour laquelle le résonateur présente deux nœuds pour $s = 0$ et pour $s = S$, et un seul ventre pour $s = \frac{S}{2}$) paraît seule susceptible de jouer un rôle et nous ne nous occuperons pas des autres.

Pour établir cette équation (1), nous avons négligé le rayonnement qui produit l'amortissement des oscillations ; c'est pour cette raison que dans la

formule (2) le temps t n'entre que sous des signes cosinus et non pas sous des signes exponentiels. « Le terme F'', ai-je dit dans l'Ouvrage cité, page 199, est absolument négligeable. » Avant d'aller plus loin, je dois faire voir que cette manière de voir est légitime, c'est-à-dire que l'amortissement des oscillations propres du résonateur est beaucoup plus lent que celui des vibrations de l'excitateur.

Nous avons déjà reconnu qu'il en est ainsi pour le résonateur rectiligne; montrons que les vibrations du résonateur circulaire doivent s'amortir plus lentement encore. En effet, la quantité que nous avons appelée H, c'est-à-dire l'énergie totale, doit être très sensiblement la même dans les deux cas pour deux fils de même longueur totale et de même diamètre. Calculons maintenant P, c'est-à-dire l'énergie rayonnée pendant une demi-oscillation. En un point très éloigné du résonateur, la perturbation électromagnétique peut être assimilée à une onde plane et la quantité d'énergie rayonnée à travers un élément de surface est sensiblement proportionnelle au carré de la force électrique. La force électrique a pour première composante :

$$-\frac{dF}{dt}-\frac{d\varphi}{dx},$$

φ étant le potentiel électrostatique et F, G, H les composantes du potentiel vecteur.

Le premier terme qui provient de l'action électrodynamique est pour un point très éloigné du résonateur beaucoup plus grand que le second qui provient de l'action électrostatique. Pour évaluer maintenant le potentiel vecteur, voici comment il convient d'opérer. Voyons d'abord quel est le champ électromagnétique produit par les oscillations du résonateur. Le calcul de Hertz qui se trouve au commencement du tome 36 des *Annales de Wiedemann* et que j'ai reproduit dans le chapitre IX de mon Ouvrage cité nous apprend quel est le champ produit par un excitateur rectiligne de longueur infiniment petite. Pour avoir le champ produit par un excitateur filiforme quelconque, on décomposera le fil en éléments de longueur très petite, on calculera le champ produit par chacun de ces éléments en tenant compte de l'intensité du courant dans chacun d'eux et l'on composera ensuite ces divers champs élémentaires, le champ résultant sera le champ total produit par l'excitateur tout entier.

On est ainsi conduit à la règle suivante pour évaluer le potentiel vecteur en un point très éloigné de l'excitateur. Tout se passera comme si les courants de déplacement n'existaient pas et si les courants de conduction existaient seuls et

comme si l'induction se conformait à la loi de Neumann, avec cette différence, toutefois, que sa propagation ne serait pas instantanée, mais se ferait avec la vitesse de la lumière.

On comprend ainsi que le potentiel vecteur soit notablement moindre avec un résonateur ou un excitateur circulaire qu'avec un excitateur rectiligne de même longueur. En effet, chacun des éléments du fil donne naissance à un potentiel vecteur élémentaire qui est le même en grandeur dans les deux cas si l'on compare deux éléments également éloignés des extrémités du fil; mais si l'excitateur est rectiligne, tous ces potentiels élémentaires ont même direction et s'ajoutent arithmétiquement, tandis que leur direction n'est pas la même si l'excitateur est circulaire. Il convient également de tenir compte de la différence de phase entre les divers potentiels vecteurs élémentaires, qui est due à ce que l'induction n'a pas mis le même temps pour venir de deux éléments différents de l'excitateur qui ne se trouvent pas à la même distance. Mais cette différence de phase varie de o à $\frac{1}{8}$ de période.

Sans entrer dans les détails d'un calcul qui serait assez long, il nous est donc permis de conclure que l'amortissement du résonateur est négligeable devant celui de l'excitateur.

Continuons maintenant le calcul en ne supposant plus que X soit nul.

Posons :

$$y = \int_0^S i \sin\frac{\pi s}{S}\, ds,$$

y sera une fonction de t. Posons ensuite :

$$z = \int_0^t y\, dt$$

z sera encore une fonction de t dont y sera la dérivée. C'est de cette quantité z que dépend l'amplitude des oscillations correspondant à la première harmonique, qui est la seule sensible; c'est donc cette quantité qu'il convient de calculer.

L'intégration par parties nous donne :

$$\int \frac{d^2 i}{ds^2} \sin\frac{\pi s}{S}\, ds = \frac{di}{ds} \sin\frac{\pi s}{S} - i\frac{\pi}{S} \cos\frac{\pi s}{S} - \frac{\pi^2}{S^2}\int i \sin\frac{\pi s}{S}\, ds$$

ou, puisque $\sin\frac{\pi s}{S}$ et i s'annulent aux deux limites :

$$\int_0^S \frac{d^2 i}{ds^2} \sin\frac{\pi s}{S}\, ds = -\frac{\pi^2 y}{S^2}.$$

L'équation (1) devient aussi :

$$(3) \qquad \frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{\pi^2}{KS^2} z = \int_0^S \frac{X}{C} \sin \frac{\pi s}{S} \, ds.$$

Le second membre de l'équation (3) est une fonction de t seulement. Cette fonction dépend de la valeur de la force électrique X en tous les points du résonateur, puisque l'intégration doit être étendue de $s = 0$ à $s = S$, c'est-à-dire d'une extrémité à l'autre du fil. Mais elle dépend principalement de la valeur de X au point $s = \frac{S}{2}$, c'est-à-dire au point opposé à l'interrupteur, parce qu'en ce point le coefficient de $\frac{X}{C}$ sous le signe S, c'est-à-dire $\sin \frac{\pi s}{S}$ est maximum et égal à 1. Ce résultat est conforme à ce qu'a annoncé Hertz dans ses premiers écrits.

Voyons maintenant comment X et le second membre de (3) dépendent du temps t. Soit M un point du résonateur correspondant à une certaine valeur de s, la force X en ce point M peut être représentée par les formules suivantes :

$$X = 0 \qquad \text{pour} \quad t < t_0,$$

$$X = e^{-\alpha(t-t_0)} \cos n(t - t_0)\, \varphi(s) \qquad \text{pour} \quad t > t_0,$$

$\varphi(s)$ étant une fonction de s seulement, n et α sont des constantes qui définissent la période et l'amortissement de l'excitateur. Enfin, si nous prenons pour origine du temps le moment où l'étincelle de l'excitateur éclate, le temps t_0 est égal à la distance de l'excitateur au point M divisée par la vitesse de la lumière.

Si l'on suppose que le résonateur est placé dans un plan parallèle à l'excitateur, de façon que la droite qui joint le milieu de l'excitateur au centre du résonateur soit perpendiculaire à la fois à l'excitateur et au plan du résonateur, l'époque t_0 est sensiblement la même pour tous les points du résonateur. Il n'en serait plus de même pour les autres positions du résonateur et il s'ensuivrait de nouvelles complications dans le calcul, qui n'auraient pas d'ailleurs d'influence sensible sur le résultat. Nous nous en tiendrons donc à la première hypothèse, de sorte que l'époque t_0 sera la même pour tous les points du résonateur.

Le second membre de (3) sera alors égal à 0 pour $t < t_0$ et à :

$$A e^{-\alpha(t-t_0)} \cos n(t - t_0)$$

pour $t > t_0$, A étant une constante.

Si nous posons :

$$m = \frac{\pi}{S\sqrt{K}},$$

l'équation (3) devient :

$$(4)\qquad \frac{d^2 z}{dt^2} + m^2 z = A e^{-a(t-t_0)} \cos n(t-t_0)$$

ou en posant, pour abréger, $t' = t - t_0$:

$$\frac{d^2 z}{dt'^2} + m^2 z = A e^{-at'} \cos nt'.$$

De la résonance multiple.

Le problème revient donc à intégrer l'équation (4) avec cette condition que z et $\frac{dz}{dt}$ soient nuls pour $t = t_0$, c'est-à-dire pour $t' = 0$.

L'intégrale générale de l'équation (4) peut s'écrire :

$$z = B e^{-at'} \cos nt' + C e^{-at'} \sin nt' + D \cos mt' + E \sin mt',$$

B et C étant deux constantes convenablement choisies, et D et E deux constantes arbitraires.

On voit ainsi que la valeur de z s'obtient en combinant entre elles deux vibrations simples ; la première a pour période $\frac{2\pi}{n}$ et son amplitude

$$e^{-at'}\sqrt{B^2 + C^2}$$

s'amortit rapidement ; elle a donc même période et même amortissement que la vibration propre de l'excitateur. La seconde a pour période $\frac{2\pi}{m}$ et pour amplitude

$$\sqrt{D^2 + E^2}$$

nous pouvons négliger son amortissement : elle a donc même période que la vibration propre du résonateur.

Au bout d'un temps très long, la première vibration peut être regardée comme éteinte et la seconde subsiste seule.

Il nous reste à voir comment on peut calculer les coefficients B, C, D et E. Nous trouvons d'abord :

$$(5)\qquad B + C\sqrt{-1} = \frac{A}{\left[(a + n\sqrt{-1})^2 + m^2\right]}.$$

Pour calculer ensuite D et E, il faut écrire que pour $t = t_0$ c'est-à-dire pour $t' = 0$ z et $\frac{dz}{dt}$ s'annulent. On trouve ainsi :

$$B + D = 0, \qquad -Ba + Cn + Em = 0.$$

On a, d'autre part :

$$C(m^2 + a^2 - n^2) + 2anB = 0,$$

d'où

$$E = -C\frac{m^2 + n^2 + a^2}{2mn}.$$

On en conclut que

$$E^2 > C^2, \qquad B^2 = D^2$$

et, par conséquent, que :

$$D^2 + E^2 > B^2 + C^2.$$

Donc l'amplitude de la seconde vibration, c'est-à-dire la vibration propre du résonateur est toujours plus grande que l'amplitude initiale de la première vibration, c'est-à-dire de celle qui a même période que l'excitateur.

La différence est très faible si l'amortissement n'est pas très considérable et si les deux périodes ne diffèrent pas beaucoup ; elle augmente avec la différence des deux périodes, mais n'est jamais très considérable.

Voyons maintenant comment varie l'amplitude de la première vibration $\sqrt{B^2 + C^2}$ quand on fait varier m, c'est-à-dire la période du résonateur. On trouve :

$$(6) \qquad \sqrt{B^2 + C^2} = \frac{A}{\sqrt{(m^2 + a^2 - n^2)^2 + 4a^2n^2}}.$$

Quand m varie de 0 à $+\infty$, l'amplitude de $\sqrt{B^2 + C^2}$ croît d'abord jusqu'à un certain maximum et décroît ensuite jusqu'à 0. Le maximum a lieu pour

$$m = \sqrt{n^2 - a^2}$$

et est égal à $\frac{A}{2an}$.

Ce maximum est d'autant plus marqué que $\frac{a}{n}$ est plus faible. Pour des excitateurs dont l'amortissement serait négligeable, la résonance ne pourrait donc se produire que quand l'excitateur et le résonateur seraient en harmonie complète, parce que le maximum serait incomparablement plus grand que les valeurs voisines. Il n'en est plus de même avec un amortissement sensible et

c'est ce qui explique pourquoi la résonance peut encore avoir lieu, quoique avec moins d'intensité quand les deux périodes cessent d'être concordantes.

Posons maintenant pour abréger :

$$z = \mathrm{B}\, e^{-at'} \cos nt' + \mathrm{C}\, e^{-at'} \sin nt' + \mathrm{D} \cos mt' + \mathrm{E} \sin mt' = \psi(t') = \psi(t - t_0)$$

et cherchons à établir de quelle manière varie la fonction ψ quand t' varie de o à $+\infty$.

Supposons d'abord les deux périodes fort peu différentes; au temps $t' = 0$, les deux vibrations ont sensiblement même amplitude, mais elle sont de phase opposée et ψ est nul; l'amplitude de la première vibration va ensuite en décroissant; en même temps la différence de phase change mais avec une extrême lenteur, de sorte que quand les deux vibrations ont pris même phase, la première s'est presque complètement éteinte. Il résulte de là que ψ reste quelque temps très petit, mais ses oscillations vont en croissant jusqu'à un certain moment où leur amplitude devient constante et où leur période devient régulière et égale à celle du résonateur.

Si les deux périodes diffèrent davantage, les choses se passent moins simplement parce que la phase des deux vibrations peut devenir la même avant que la première soit tout à fait éteinte. Alors nous aurons successivement des oscillations très faibles de ψ, puis des oscillations fortes mais irrégulières qui dureront fort peu de temps, puis des oscillations un peu moins fortes et régulières ayant pour période celle du résonateur et qui se prolongeront pendant fort longtemps.

Ces considérations expliquent le fait de la résonance multiple. Hertz, dans un de ses premiers Mémoires, a construit une courbe en prenant pour abscisses les longueurs des résonateurs et pour ordonnées les longueurs des étincelles. Les observations de ce genre ne peuvent avoir une très grande précision et il serait puéril de vouloir comparer de trop près cette courbe avec la formule (6). Je puis dire toutefois que ces observations ne contredisent pas la manière de voir que je viens d'exposer, mais qu'elles s'accorderaient mieux avec l'hypothèse d'un amortissement plus fort que celui qu'a calculé Hertz en tenant compte seulement du rayonnement.

Des interférences.

Il me reste à expliquer pourquoi, dans les expériences d'interférence, l'internœud mesuré correspond à la période du résonateur et non à celle de l'excitateur.

Que se passe-t-il lorsque l'excitateur et le résonateur se trouvent en présence d'une paroi réfléchissante ? Voyons d'abord ce que devient la force électrique X ; nous pourrons poser :

$$X = X_0 - X_1,$$

X_0 représentant la force électrique due à la perturbation émanée directement de l'excitateur et $-X_1$ la force électrique due à l'onde réfléchie sur la paroi ; je mets le signe — devant X_1 à cause du changement de signe dû à la réflexion.

Nous aurons encore :

$$X_0 = 0 \quad \text{pour } t < t_0 \qquad \text{et} \qquad X_0 = \varphi(s)\, e^{-a(t-t_0)} \cos n(t - t_0) \quad \text{pour } t > t_0$$

et

$$X_1 = 0 \quad \text{pour } t < t_1 \qquad \text{et} \qquad X_1 = \varphi(s)\, e^{-a(t-t_1)} \cos n(t - t_1) \quad \text{pour } t > t_1.$$

Ici t_0 représente le temps que met la perturbation à aller directement de l'excitateur au résonateur et t_1 le temps qu'elle met à aller de l'excitateur à la paroi réfléchissante et à revenir de cette paroi au résonateur.

Soit alors une fonction $\theta(t)$ définie de la façon suivante :

$$\theta(t) = 0 \qquad \text{pour} \quad t < 0$$

et

$$\theta(t) = e^{-at} \cos nt \int_0^S \frac{\varphi(s)}{C} \sin \frac{\pi s}{S}\, ds = A e^{-at} \cos nt \qquad \text{pour} \quad t > 0.$$

L'équation à laquelle nous avons à satisfaire peut alors s'écrire :

$$(7) \qquad \frac{d^2 z}{dt^2} + m^2 z = \theta(t - t_0) - \theta(t - t_1)$$

avec cette condition que

$$z = \frac{dz}{dt} = 0 \qquad \text{pour} \quad t = t_0.$$

Jusqu'à l'époque t_0, le résonateur est en repos ; à l'époque t_0 il subit l'effet de la perturbation directe qui continue ensuite à se faire sentir, mais en s'amortissant progressivement ; jusqu'à l'époque t_1 cette perturbation directe agit seule, mais à partir du temps t_1, l'action de la perturbation réfléchie commence à son tour.

L'intégration de l'équation (7) se fait immédiatement, on trouve :

$$z = \psi(t - t_0) - \psi(t - t_1),$$

la notation ψ ayant même sens que plus haut.

Après un intervalle de temps assez court où les oscillations sont faibles ou irrégulières, le régime s'établit et dure beaucoup plus longtemps. Les termes qui contiennent le facteur, l'exponentielle $e^{-\alpha t}$ sont alors évanouis et il reste

$$\psi(t) = \mathrm{D}\cos mt + \mathrm{E}\sin mt,$$

d'où

$$z = \mathrm{D}[\cos m(t-t_0) - \cos m(t-t_1)] + \mathrm{E}[\sin m(t-t_0) - \sin m(t-t_1)].$$

Ainsi donc, une fois le régime établi, les oscillations deviennent régulières, leur période est $\frac{2\pi}{m}$ et leur amplitude est

$$2\sqrt{\mathrm{D}^2+\mathrm{E}^2}\sin\frac{m}{2}(t_0-t_1).$$

Les nœuds nous seront donc donnés par les équations :

$$t_1 - t_0 = \frac{2\mathrm{K}\pi}{m}$$

et les ventres par les équations :

$$t_1 - t_0 = \frac{(2\mathrm{K}+1)\pi}{m},$$

K étant un entier.

On voit que l'internœud correspond à la longueur d'onde du résonateur, ce qui est conforme à l'expérience de MM. Sarasin et de la Rive.

Une circonstance secondaire vient peut-être aider à produire le même effet. Le résonateur, une fois mis en vibration, devient à son tour un centre d'ébranlement. La perturbation qui en émane se réfléchit sur la paroi et revient sur le résonateur dont elle renforce ou affaiblit la vibration suivant que la phase en est concordante ou discordante.

Toute discussion plus approfondie serait prématurée. Des expériences ultérieures pourront seules montrer si l'explication de MM. Sarasin et de la Rive rend mieux ou moins bien compte des faits que la mienne, ou s'il convient de les combiner entre elles.

Paris, 7 mai 1891.

SUR LA THÉORIE

DES

OSCILLATIONS HERTZIENNES

Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. 113, p. 515-519 (26 octobre 1891).

Les équations auxquelles doivent satisfaire, dans la théorie de Maxwell, les oscillations hertziennes, jouissent de quelques propriétés sur lesquelles je crois utile d'attirer l'attention, non seulement parce qu'elles peuvent, dans certains cas, faciliter le calcul de la période, mais surtout parce qu'elles permettent d'étendre à un excitateur quelconque les résultats de Hertz (*Wiedemann*, t. XXXVI) relatifs à l'état du champ électromagnétique et à la radiation de l'énergie. C'est ce que j'ai déjà essayé de faire, mais sans y insister comme il convenait, dans les *Annales de Genève*, en cherchant à déterminer par l'analyse l'amortissement des oscillations propres d'un résonateur circulaire.

J'adopte les notations de Maxwell et je désigne par f, g, h, α, β, γ, F, G, H, u, v, w, p, q, r, φ, ρ les composantes du déplacement électrique, de la force magnétique, du potentiel vecteur, du courant total, du courant de conduction, le potentiel électrostatique et la densité électrique.

Je suppose que le champ ne soit occupé que par des conducteurs et par un diélectrique *unique* de pouvoir inducteur K. Je suppose que ces milieux ne sont pas magnétiques et que $\mu = 1$. On sait d'ailleurs qu'avec des oscillations aussi rapides l'induction magnétique n'a pas le temps de se produire.

Je pose

$$(\alpha)\qquad \frac{dp_0}{dt} = p, \qquad \frac{dq_0}{dt} = q, \qquad \frac{dr_0}{dt} = r, \qquad \frac{dp_0}{dx} + \frac{dq_0}{dy} + \frac{dr_0}{dz} = -\rho.$$

Je rappelle que, pour des oscillations très rapides, tous les conducteurs se comportent comme s'ils étaient parfaits, et que les courants ne pénètrent qu'à une profondeur excessivement faible, de sorte qu'on peut partager le conducteur en deux régions, l'une superficielle où les courants de conduction sont très intenses, l'autre intérieure où ils sont nuls.

On a d'abord dans tout l'espace

$$(1)\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{dF}{dx}+\frac{dG}{dy}+\frac{dH}{dz}=0, &&\Delta F=-4\pi u,\\ &\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}+\frac{dw}{dz}=0, &&u=\frac{df}{dt}+p=\frac{d(f+p_0)}{dt},\\ &\frac{dp_0}{dx}+\frac{dq_0}{dy}+\frac{dr_0}{dz}+\rho=0, &&K\Delta\varphi=-4\pi\rho. \end{aligned} \right.$$

On a dans le diélectrique

$$(2)\qquad \frac{4\pi f}{K}=-\frac{dF}{dt}-\frac{d\varphi}{dx}.$$

Dans la couche superficielle du conducteur, p, q et r sont très grands de sorte que nous pouvons négliger les courants de déplacement devant les courants de conduction. Nous pouvons donc, sans changer le résultat, attribuer à f telle valeur que nous voulons et, par conséquent, supposer que l'équation (2) est encore satisfaite.

Dans la région intérieure, il n'y a pas de courant et l'on a

$$p=f=u=\frac{dF}{dt}+\frac{d\varphi}{dx}=0,$$

de sorte que l'équation (2) est encore satisfaite.

Ainsi on doit satisfaire, dans tout l'espace, aux équations (1) et (2) ainsi qu'à celles qu'on en peut déduire par symétrie.

Les courants de conduction p, q, r sont inconnus; néanmoins, avec les excitateurs de forme simple ordinairement employés, il est plus facile de s'en faire une idée approximative que des autres quantités à calculer. Il peut donc être intéressant d'exprimer toutes ces quantités en fonctions de p, q et r. Voici comment on y parvient :

Soit $d\tau'$ un élément de la couche superficielle du conducteur, x', y', z' ses coordonnées; soit x, y, z un point quelconque de l'espace. Soit R la distance des deux points x, y, z et x', y', z'. Soient p', q', r' les valeurs de p_0, q_0, r_0 au point x', y', z'; ce seront évidemment des fonctions de x', y', z' et de t. Soient

p'', q'', r'' ce que deviennent ces fonctions quand on y remplace t par $t - R\sqrt{K}$.

Posons

$$\xi_1 = \frac{p''}{R}, \qquad \eta_1 = \frac{q''}{R}, \qquad \zeta_1 = \frac{r''}{R}, \qquad \xi_2 = \frac{p'}{R}, \qquad \eta_2 = \frac{q'}{R}, \qquad \zeta_2 = \frac{r'}{R},$$

$$\xi = \xi_1 + \xi_2, \qquad \eta = \eta_1 + \eta_2, \qquad \zeta = \zeta_1 + \zeta_2.$$

Posons ensuite

$$X = \int \xi \, d\tau', \qquad Y = \int \eta \, d\tau', \qquad Z = \int \zeta \, d\tau', \qquad X_1 = \int \xi_1 \, d\tau', \qquad \ldots.$$

On peut observer que les quantités sous le signe $\int$, ξ, η et ζ, deviennent infinies quand la distance R s'annule, et par conséquent quand le point x, y, z vient à l'intérieur de la couche superficielle, mais qu'il n'en est plus de même des quantités ξ_1, η_1 et ζ_1.

Posons encore

$$\Theta = \frac{dX}{dx} + \frac{dY}{dy} + \frac{dZ}{dz}, \qquad \Theta_1 = \frac{dX_1}{dx} + \frac{dY_1}{dy} + \frac{dZ_1}{dz}.$$

On vérifiera aisément les équations

$$\Delta X = K \frac{d^2 X}{dt^2} - 4\pi p_0, \qquad \Delta X_1 = K \frac{d^2 X}{dt^2},$$

$$\Delta\Theta = K \frac{d^2 \Theta}{dt^2} - 4\pi\rho, \qquad \Delta\Theta_1 = K \frac{d^2 \Theta}{dt^2}, \qquad \Theta = \Theta_1 - K\rho.$$

On démontre ensuite qu'on satisfera aux équations (1) et (2), en posant

$$(3) \qquad \begin{cases} K \dfrac{dF}{dt} = K \dfrac{d^2 X}{dt^2} - \dfrac{d\Theta_1}{dx} = \Delta X + 4\pi p_0 - \dfrac{d\Theta_1}{dx}, \\[2ex] -4\pi f = K \dfrac{dF}{dt} + K \dfrac{d\varphi}{dx} = K \dfrac{d^2 X}{dt^2} - \dfrac{d\Theta}{dx} = \Delta X + 4\pi p_0 - \dfrac{d\Theta_1}{dx}, \end{cases}$$

et les équations qu'on en peut déduire par symétrie, ce qui donne la solution du problème.

Dans le diélectrique, p_0 est nul et ces formules se simplifient.

Dans le diélectrique, les composantes de la force magnétique ont pour valeurs

$$\alpha = \frac{d^2 Z}{dy\,dt} - \frac{d^2 Y}{dz\,dt}.$$

Examinons, en particulier, le cas où nos oscillations sont périodiques avec un amortissement.

Dans ce cas, toutes nos fonctions peuvent être mises avantageusement sous la forme suivante :

$$f = \text{partie réelle } f' e^{kt},$$

f' étant une fonction généralement imaginaire de x, y, z, indépendante du temps, et k une constante imaginaire. Il en sera de même de toutes nos autres fonctions; chacune d'elles sera la partie réelle d'un produit dont un facteur est l'exponentielle e^{kt} et l'autre une quantité indépendante du temps et que je désignerai par la même lettre que la fonction correspondante, mais accentuée. Ainsi

$$\xi = \text{partie réelle de } \xi' e^{kt}, \qquad p_0 = \text{partie réelle de } p'_0 e^{kt}.$$

Je désignerai par p^* la valeur de p'_0 au point x', y', z', de telle façon que

$$p' = \text{partie réelle de } p^* e^{kt}.$$

Il vient alors

$$p'' = \text{partie réelle de } p^* e^{k(t - R\sqrt{K})},$$

d'où l'on déduit

$$\xi' = \frac{p^* e^{-kR\sqrt{K}}}{R}.$$

Il en résulte que X, Y, Z sont les parties réelles de $X' e^{kt}$, $Y' e^{kt}$, $Z' e^{kt}$; X' étant un potentiel dû à l'attraction d'une matière fictive répandue dans la couche superficielle du conducteur; la densité de cette matière est p^*, et la loi d'attraction est une fonction de la distance égale à la dérivée de $R^{-1} e^{-kR\sqrt{K}}$.

A l'intérieur du conducteur, f doit être nul; on en conclut que

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz$$

est une différentielle exacte. Réciproquement, si cette condition est remplie, le déplacement et la force électrique sont nuls à l'intérieur du conducteur, et à l'extérieur les lignes de force électrique aboutissent normalement à la surface du conducteur. C'est là la condition à la limite à laquelle on doit satisfaire dans le calcul de la période.

On voit ainsi que le problème peut se présenter sous une double forme :

On peut se proposer de satisfaire aux équations (1) et (2) *dans le diélectrique* de telle sorte que les lignes de force aboutissent normalement aux conducteurs;

Ou bien on peut se proposer de déterminer les courants superficiels de conduction p, q, r de telle sorte que, *à l'intérieur du conducteur*,

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz$$

soit une différentielle exacte.

On remarquera l'analogie avec la double forme que peut prendre le problème de la distribution électrique.

Dans ce problème, on peut, en effet :

Ou bien se proposer de satisfaire dans le diélectrique à l'équation de Laplace, de telle sorte que le potentiel ait une valeur constante à la surface du conducteur.

Ou bien on peut se proposer de déterminer la densité superficielle de l'électricité de telle sorte que, à l'intérieur du conducteur, l'attraction soit nulle.

Je remarque que les conditions (α) ne suffisent pas pour déterminer complètement p_0, q_0 et r_0; mais, quelle que soit la manière dont on détermine ces quantités, pourvu qu'on s'astreigne aux conditions (α), les valeurs du déplacement électrique et de la force magnétique dans le diélectrique ne seront pas changées.

SUR UN MODE ANORMAL

DE

PROPAGATION DES ONDES

Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. 114, p. 16-18 (4 janvier 1892).

La théorie conduit à une solution particulière des équations du mouvement ondulatoire, solution qui présente un certain nombre de particularités remarquables sur lesquelles je désirerais attirer l'attention. Ces circonstances ne se produiront jamais dans la propagation des vibrations lumineuses, à cause de la petitesse de la longueur d'onde; mais il est possible que l'on rencontre des faits analogues, quoique probablement dans des conditions beaucoup moins simples, dans le cas des ondulations hertziennes, et il serait alors nécessaire d'en tenir compte ou tout au moins de s'en défier. C'est ce qui me décide à publier les résultats qui suivent, quoique je n'en voie pas, pour le moment, d'application physique.

L'équation du mouvement ondulatoire est, en appelant V^2 la vitesse de propagation,

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = V^2 \Delta\xi$$

ou, si ξ ne dépend que de z, de t et de $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$,

$$(1) \qquad \frac{d^2\xi}{dt^2} = V^2\left(\frac{d^2\xi}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{d\xi}{d\rho} + \frac{d^2\xi}{dz^2}\right).$$

On voit alors que cette équation admet l'intégrale suivante :

$$(2) \qquad \xi = A J_0(h\rho)\cos 2\pi\left(\frac{z}{l} - \frac{t}{T}\right),$$

où A, h, l et T sont des constantes satisfaisant aux conditions

$$\frac{h^2}{4\pi^2} = \frac{1}{V^2T^2} - \frac{1}{l^2},$$

et où J_0 désigne la fonction de Bessel,

$$J_0(x) = 1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2.4^2} - \frac{x^6}{2^2.4^2.6^2} + \ldots$$

Si l'on pose VT $= \lambda$, λ pourra s'appeler la longueur d'onde *normale*, et l la longueur d'onde *apparente*. On aura

$$\frac{h^2}{4\pi^2} = \frac{1}{\lambda^2} - \frac{1}{l^2}.$$

On voit que la longueur d'onde apparente sera plus grande que la longueur d'onde normale ; la différence sera d'autant plus grande que h sera plus grand, c'est-à-dire que le pinceau de rayons lumineux sera plus délié, mais elle restera toujours petite. Pour nous en rendre compte, introduisons une longueur

$$\rho_0 = \frac{64}{h}.$$

Alors, à l'extérieur d'un cylindre ayant pour axe l'axe des z et pour rayon ρ_0, l'intensité sera au plus égale à la centième partie de ce qu'elle est en un point de l'axe des z.

Si nous prenons $\lambda = 500\mu\mu$, $\rho_0 = 64\mu$, la différence entre les deux longueurs d'onde sera moindre que la trois-centième partie de l'une d'elles.

Si nous prenons $\lambda = 500\mu\mu$, $\rho_0 = 640\mu$ (notre cylindre a alors un peu plus de 1^{mm} de diamètre), la différence entre les deux longueurs d'onde sera moindre que la trente-millième partie de l'une d'elles.

La forme de l'expression (2) pourrait nous induire en erreur. Nous pourrions être tentés de croire que la vitesse de propagation est égale à $\frac{l}{T}$ et, par conséquent, plus grande que la vitesse normale. Ce serait le contraire de la vérité.

Pour nous en rendre compte, supposons que A, au lieu d'être une constante, soit une fonction de z et de t ; je supposerai de plus que cette fonction et ses dérivées sont finies, tandis que $\frac{1}{l}$ et $\frac{1}{\lambda}$ sont de très grandes quantités.

En supprimant le facteur $J_0(h\rho)$ et en posant, pour abréger,

$$2\pi\left(\frac{z}{l} - \frac{t}{T}\right) = \omega,$$

notre équation (1) devient alors

$$(3) \qquad \frac{4\pi}{T}\frac{dA}{dt}\sin\omega + \frac{d^2A}{dt^2}\cos\omega = -\frac{4\pi V^2}{l}\frac{dA}{dz}\sin\omega + V^2\frac{d^2A}{dz^2}\cos\omega.$$

Dans chacun des deux membres de l'équation (3), le premier terme contient en facteur $\frac{1}{T}$ ou $\frac{1}{l}$ et est, par conséquent, très grand ; le second terme est fini et peut être négligé. Il reste alors, en supprimant les facteurs communs,

$$\frac{dA}{dt} + \frac{V^2T}{l}\frac{dA}{dz} = 0,$$

d'où

$$A = f\left(z - \frac{V^2T}{l}t\right),$$

ce qui veut dire que la perturbation se propage avec une vitesse

$$\frac{V^2T}{l} = \frac{V\lambda}{l},$$

c'est-à-dire avec une vitesse *moindre* que la vitesse normale.

SUR LA PROPAGATION

DES

OSCILLATIONS HERTZIENNES

Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. 114, p. 1046-1048 (9 novembre 1892).

Depuis que nous savons avec quelle rapidité s'amortissent les oscillations hertziennes, la théorie donnée par Hertz pour la propagation de ces oscillations le long d'un fil ne peut plus paraître suffisante; je crois qu'on peut la remplacer par une théorie plus approchée en appliquant la méthode que j'ai eu l'honneur d'exposer à l'Académie dans une Communication récente.

Considérons un fil très mince et rectiligne que je prendrai pour axe des z; ce fil aura une extrémité libre ou non que je prendrai pour origine des coordonnées et il sera indéfini dans l'autre sens. Je suppose qu'à l'origine des coordonnées une cause quelconque produise une perturbation quelconque. Comment cette perturbation va-t-elle se propager le long du fil et dans le diélectrique environnant?

Soient A un point quelconque du fil, u la distance du point A à l'origine.

Soient M un point du diélectrique, x, y, z ses coordonnées, ρ sa distance au fil, r sa distance au point M, r_0 sa distance à l'origine, de sorte que

$$\rho^2 = x^2 + y^2, \qquad r^2 = \rho^2 + (z - u)^2, \qquad r_0^2 = \rho^2 + z^2.$$

Je supposerai que la perturbation se propage le long du fil avec une vitesse constante et égale à la vitesse de la lumière; je choisirai les unités de telle façon que cette vitesse soit égale à 1.

Soit alors $F(u - t)$ le courant au point A.

Soit H la fonction de Hertz, c'est-à-dire une fonction de ρ, z et t telle que la force magnétique et les deux composantes de la force électrique perpendiculaire et parallèle au fil soient respectivement :

$$\frac{d^2H}{d\rho\,dt}, \qquad \frac{d^2H}{d\rho\,dz}, \qquad \frac{d^2H}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{dH}{d\rho}.$$

Nous aurons alors, en appliquant la formule que j'ai donnée dans ma Communication citée plus haut,

$$H = \int_0^{\infty} \frac{F(u - t + r)\,du}{r}.$$

En posant

$$u - t + r = \alpha,$$

il vient

$$\int_{r_0 - t}^{\infty} \frac{F(\alpha)\,d\alpha}{\alpha + t - z};$$

d'où

$$\frac{dH}{d\rho} = -\frac{F(r_0 - t)}{r_0 - z}\,\frac{\rho}{r_0}.$$

Si le point M est très voisin du fil, r_0 différera très peu de z, de sorte qu'on aura à peu près

$$\frac{dH}{d\rho} = -2\frac{F(z - t)}{\rho};$$

d'où cette conséquence, que dans le voisinage immédiat du fil, la force magnétique et la composante de la force électrique perpendiculaire au fil varient à peu près en raison inverse de ρ.

On trouvera de même l'expression de la composante parallèle au fil; cette expression est assez compliquée. Je me bornerai à dire que si le point M est très voisin du fil, elle se réduira approximativement à

$$\frac{2}{z}\left[F(z - t) - F'(z - t)\right].$$

Elle reste donc finie pour $\rho = 0$ et est par conséquent beaucoup plus petite que l'autre.

L'équation exacte des lignes de force électrique est

$$F(r_0 - t)\left(1 + \frac{z}{r_0}\right) = \text{const.}$$

On voit que ces lignes viennent couper normalement le fil; cela justifie l'hypothèse faite au début que la vitesse de propagation dans le fil est égale à celle de la lumière.

Mais nous ne rendons pas compte ainsi du fait observé par M. Blondlot, que la perturbation s'amortit en se propageant. Il faudrait donc pousser l'approximation plus loin que je ne l'ai fait; peut-être faudrait-il tenir compte du diamètre du fil.

SUR LA PROPAGATION

DES

OSCILLATIONS ÉLECTRIQUES

Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. 114, p. 1229-1233 (30 mai 1892).

Dans une récente Communication, j'ai étudié la théorie de la propagation des oscillations hertziennes le long d'un fil indéfini; mon but était surtout de voir si la théorie rendait bien compte de l'amortissement observé par M. Blondlot. Mais, comme le calcul complet, en tenant compte immédiatement de cet amortissement, aurait été trop compliqué, j'ai procédé d'une façon indirecte. J'ai commencé par supposer cet amortissement nul et j'ai déduit les conséquences de cette hypothèse. Comme la solution du problème doit être unique, il est clair que, si l'amortissement existe, ces conséquences devront se trouver en contradiction avec les conditions du problème et, en particulier, avec celle-ci, que les lignes de force doivent aboutir normalement aux conducteurs. Or, en supposant le fil infiniment mince, je n'ai pas rencontré ces contradictions, de sorte qu'on devrait conclure à un amortissement nul; j'ai ajouté que, pour rendre compte de cet amortissement, il faudrait sans doute tenir compte du diamètre du fil.

M. Brillouin m'a écrit alors pour me faire part de certaines observations : « Ne pourrait-on se demander, disait-il en substance, si la solution que vous proposez n'est pas en contradiction avec le principe de la conservation de l'énergie, ce qui expliquerait l'amortissement et permettrait de le calculer? » Il est aisé de voir que cette contradiction n'existe pas et que, si les lignes de force aboutissent normalement aux conducteurs, il y a conservation de l'énergie. En

effet, d'après le théorème de Poynting, la quantité d'énergie qui traverse un élément de surface est égale au produit de la surface de cet élément, de la composante tangentielle de la force magnétique, de celle de la force électrique et du cosinus de l'angle de ces deux composantes. Or, si les lignes de force sont normales aux conducteurs, la quantité d'énergie qui traverse la surface de ces conducteurs est nulle parce que l'un de ces facteurs, à savoir la composante tangentielle de la force électrique est toujours nul. Ma conclusion subsiste donc, mais la lecture de la lettre de M. Brillouin m'a suggéré une manière simple de tenir compte du diamètre du fil.

Je reprends les notations de ma Communication citée; j'appelle M un point du diélectrique; x, y, z ses coordonnées; r_0 sa distance à l'origine; ρ sa distance à l'axe des z, c'est-à-dire au fil; A un point du fil; o, o et u ses coordonnées; $F(u - t)$ l'intensité du courant de conduction au point A.

Nous avons trouvé l'expression de la fonction Π de Hertz, et celle de l'une de ses dérivées qui seule nous intéresse; voici cette expression :

$$\frac{d\Pi}{d\rho} = -\frac{F(r_0 - t)}{r_0 - z}\frac{\rho}{r_0}.$$

Désormais, quand je parlerai de la fonction F et de ses dérivées F', F'', ..., il restera sous-entendu que l'argument de cette fonction est $r_0 - t$ quand il n'est pas exprimé explicitement. On trouve ensuite :

Pour la force magnétique

$$\frac{F'}{r_0 - z}\frac{\rho}{r_0};$$

Pour la composante de la force électrique perpendiculaire au fil

$$\frac{F'\rho z}{(r_0 - z)r_0^2} - \frac{F\rho}{r_0^3};$$

Pour la composante de la force électrique parallèle au fil

$$-\frac{F'\rho^2}{(r_0 - z)r_0^2} + \frac{Fz}{r_0^3}.$$

Voyons maintenant ce qui se passe si le fil, au lieu d'être infiniment mince, est un cylindre de révolution de diamètre ρ_0. Je prends encore l'axe de ce cylindre pour axe des z; j'appelle ρ la distance du point M à cet axe; μ sa distance à une génératrice quelconque; r sa distance au point où cette génératrice coupe le

plan des xy; r_0 sa distance à l'origine et enfin φ l'angle dièdre formé par les plans qui se coupent suivant l'axe des z et qui passent l'un par le point M, l'autre par la génératrice considérée. Il vient alors

$$\mu^2 = \rho^2 + \rho_0^2 - 2\rho\rho_0 \cos\varphi$$

et

$$2\pi \frac{dH}{d\rho} = \int_0^{2\pi} \frac{F(r-t)(r+z)}{r} \frac{\rho - \rho_0 \cos\varphi}{\mu^2} d\varphi.$$

Comme si le diamètre n'est pas trop grand, r diffère très peu de r_0, nous pouvons écrire sans erreur sensible

$$-2\pi \frac{dH}{d\rho} = F(r_0 - t)\left(1 + \frac{z}{r_0}\right) \int_0^{2\pi} \frac{\rho - \rho_0 \cos\varphi}{\rho^2 + \rho_0^2 - 2\rho\rho_0 \cos\varphi} d\varphi.$$

ou enfin

$$\frac{dH}{d\rho} = \frac{F}{r_0 - z} \frac{\rho}{r_0};$$

d'où cette conséquence, que le champ électromagnétique est sensiblement le même à l'extérieur du fil que si tout le courant était concentré sur l'axe de ce fil. Les formules précédentes sont donc encore applicables; seulement, dans le calcul de l'énergie, il ne faudra étendre les intégrations qu'au diélectrique, c'est-à-dire aux points tels que $\rho > \rho_0$.

Le carré de la force magnétique est

$$\frac{F'^2}{(r_0 - z)^2} \frac{\rho^2}{r_0^2}.$$

Le carré de la force électrique est

$$\frac{F'^2}{(r_0 - z)^2} \frac{\rho^2}{r_0^2} + \frac{F^2}{r_0^4}.$$

Pour avoir l'énergie, avec les unités adoptées, il faut faire la somme de ces deux carrés, intégrer cette somme en étendant l'intégration à tous les éléments de volume $d\tau$ du diélectrique et diviser par 8π. L'énergie est donc égale, au facteur près, $\frac{1}{8\pi}$, à

$$\int \frac{2F'^2}{(r_0 - z)^2} \frac{\rho^2 \, d\tau}{r_0^2} + \int \frac{F^2 \, d\tau}{r_0^4}.$$

Si je suppose que ρ_0 soit très petit, je vois immédiatement que la première intégrale est très grande, tandis que la seconde est finie. Si l'on fait le

calcul en négligeant les quantités de l'ordre de ρ_0, et si l'on pose, pour abréger, $r_0 - t = v$, de telle façon que F et F' soient des fonctions de v, on trouve que l'énergie totale est égale à

$$E = \int_0^\infty \left[-F'^2 \left(\log \frac{\rho_0}{2(v+t)} - \frac{1}{2} \right) + \frac{F^2}{2(v+t)^2} \right] dv.$$

Cette énergie totale dépend de t que l'on voit figurer sous le signe $\int$; sa dérivée par rapport à t, se réduit à

$$\frac{dE}{dt} = \int_0^\infty \left[\frac{F'^2\, dv}{v+t} - \frac{F^2\, dv}{(v+t)^3} \right].$$

Ce résultat, qu'il est aisé de vérifier à l'aide de l'intégrale de Poynting, montre que $\frac{dE}{dt}$ est fini si ρ_0 est très petit, tandis que E est infiniment grand à cause de la présence du logarithme de ρ_0.

Pour qu'il y eût conservation de l'énergie, il faudrait que $\frac{dE}{dt}$ fût nul ; comme il n'en est pas ainsi, il faudrait, pour conserver au courant de conduction son intensité primitive, lui fournir dans le temps dt une quantité d'énergie égale à $\frac{dE}{dt} dt$; si donc une source étrangère ne fournit pas cette quantité d'énergie, il faut que le courant s'amortisse. Si l'amortissement est assez faible pour que les calculs précédents puissent être acceptés comme première approximation, le taux de cet amortissement (c'est-à-dire la quantité dont le logarithme de l'intensité du courant diminue dans l'unité du temps) peut être regardé comme égal à $\frac{dE}{dt} \frac{1}{2E}$.

Ce rapport est infiniment petit si ρ_0 est lui-même très petit ; c'est ce qui nous explique pourquoi nous avons trouvé un amortissement nul en négligeant le diamètre du fil. J'ajoute que si la longueur d'onde est petite et si l'on suppose que la perturbation a parcouru déjà une grande longueur de fil, on peut négliger dans E et $\frac{dE}{dt}$ les termes en F^2 devant ceux en F'^2.

Il serait curieux, mais sans doute assez difficile, de vérifier expérimentalement les conséquences de cette théorie, en cherchant si l'amortissement dépend du diamètre du fil.

OBSERVATIONS

SUR LA

COMMUNICATION PRÉCÉDENTE

DE

MM. BIRKELAND ET SARASIN [1]

Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. 117, p. 622-624 (6 novembre 1893).

Les expériences de MM. Sarasin et Birkeland paraissent devoir modifier complètement nos idées sur certains phénomènes, et, bien que toute discussion de ces expériences puisse sembler prématurée, il ne sera peut-être pas inutile de les rapprocher du calcul suivant, qui nous montrera à quels résultats nous conduirait la théorie de Maxwell appliquée à ces phénomènes.

---

(1) *Sur la nature de la réflexion des ondes électriques au bout d'un fil conducteur.* Note de MM. Kr. Birkeland et Ed. Sarasin, présentée par M. Poincaré. — Dans une Communication du 17 avril 1893, un de nous a cherché, en partant de la théorie du mouvement de l'énergie électromagnétique dans l'espace, à faire une hypothèse sur ce qui se passe au voisinage du bout d'un fil métallique le long duquel se propagent des ondes électriques.

Nous avons étudié la question expérimentalement ensemble, en explorant le champ électrique autour de l'extrémité du fil, avec de petits résonateurs de $0^m,10$ et $0^m,25$ de diamètre, et, bien que la manière de voir exposée dans la Note précitée n'ait pas été confirmée de tous points par nos résultats, ceux-ci n'en apportent pas moins une contribution expérimentale intéressante aux théories remarquables de M. Poynting.

Voici d'abord quelques brèves indications sur les arrangements des expériences. Les ondes électriques étaient fournies par un petit excitateur à plaques, dont l'étincelle, de 3^{mm} environ, éclatait dans l'huile.

En face d'un des disques primaires se trouvait un disque semblable duquel partait un tube de cuivre de $0^m,01$ de diamètre et de 9^m de longueur.

Le tube, qui se terminait librement dans l'air, était supporté par de minces tiges de bois de $1^m,5$ de hauteur.

Les résonateurs employés étaient toujours circulaires et fixés verticalement, avec l'étincelle en

Considérons un fil rectiligne OA de longueur l, un point N sur ce fil, un point M dans le diélectrique; soit P le pied de la perpendiculaire abaissée de M sur OA. Soient

$$u = \mathrm{ON}, \qquad z = \mathrm{OP}, \qquad \rho = \mathrm{MP},$$
$$r = \mathrm{MN}, \qquad r_0 = \mathrm{OM}, \qquad r_1 = \mathrm{AM}.$$

Soient $F(u - Vt)$ le courant de conduction dû à l'onde directe, et $F_1(u + Vt)$ le courant de conduction dû à l'onde réfléchie; V est la vitesse de propagation.

La fonction Π de Hertz est alors égale à

$$\Pi = \int_0^l \frac{F(u + r - Vt)\,du}{r} + \int_0^l \frac{F_1(u + Vt - r)\,du}{r}.$$

Si nous posons

$$\alpha = u + r - Vt, \qquad \beta = u + Vt - r,$$
$$\alpha_0 = r_0 - Vt, \qquad \beta_0 = Vt - r_0,$$
$$\alpha_1 = l + r_1 - Vt, \qquad \beta_1 = l + Vt - r_1,$$

il vient

$$\Pi = \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} \frac{F(\alpha)\,d\alpha}{\alpha + Vt - z} + \int_{\beta_0}^{\beta_1} \frac{F_1(\beta)\,d\beta}{Vt + z - \beta}.$$

---

haut; ils étaient capables de deux sortes de mouvements, l'un rotatoire autour d'un axe vertical passant par l'étincelle, l'autre translatoire parallèle au tube conducteur.

Nous nous sommes arrangés de manière à pouvoir marquer, même dans l'obscurité : 1° la distance du centre de notre résonateur au bout du fil conducteur (comptée parallèlement à ce fil); 2° l'angle que formait le plan de celui-ci avec ce fil.

Les observations ont été faites à l'aide d'une lunette montée horizontalement à 1^{m} de distance du cercle, ce qui est nécessaire à cause de la perturbation considérable que produit le corps de l'observateur sur les oscillations rapides dont il s'agit.

Nos recherches ont porté sur deux points principaux; nous avons d'abord déterminé les quatre premiers nœuds dans sept distances différentes du fil, le plan du cercle restant toujours normal à celui-ci. Les nœuds sont déterminés au moins par dix mesures chacun; les résultats numériques ainsi obtenus pour le cercle de 10^{cm} sont consignés dans le tableau ci-après. Les différentes distances du résonateur au fil conducteur sont comptées entre l'axe de celui-ci et le point le plus rapproché du cercle. Les nombres dans chaque rubrique donnent la distance de chaque nœud à la normale élevée au bout du fil.

Distance du résonateur au fil conducteur	2cm.	10cm	20cm.	30cm.	40cm	50cm	60cm
1er nœud	16	15,4	9,5	7,7	1,8	9,8	»
2e »	56,4	56,3	54,[illegible]	51,5	47,3	44,8	37,7
3e »	96,5	95,7	95,2	93,5	90,5	88,9	87,5
4e »	135	135,8	135,1	134,6	130,8	129,7	130,5
1er internœud	40,4	40,9	44,7	43,8	45,5	54,6	»
2e »	40,1	39,4	41	42	43,2	44,1	49,8
3e »	38,5	40,1	39,9	41,1	40,3	40,8	43

Dans la figure 1 nous avons représenté par des croix la position *du centre* du résonateur

Tous les phénomènes dépendent de la dérivée $\frac{dH}{d\rho}$, puisque la force magnétique est égale à cette dérivée elle-même; que les composantes de la force électrique sont $\frac{d^2H}{d\rho\,dz}$ et $\frac{d^2H}{d\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{dH}{d\rho}$; et que les lignes de force électrique ont pour équation $\rho\frac{dH}{d\rho}=$ const. Calculons donc cette dérivée, il vient

$$\frac{dH}{d\rho}=\frac{F(\alpha_1)}{l+r_1-z}\,\frac{\rho}{r_1}-\frac{F(\alpha_0)}{r_0-z}\,\frac{\rho}{r_0}-\frac{F_1(\beta_1)}{r_1-l+z}\,\frac{\rho}{r_1}+\frac{F_1(\beta_0)}{r_0+z}\,\frac{\rho}{r_0}.$$

---

de 10^{m} dans les 27 nœuds numériquement donnés plus haut. Les ronds portés sur la même figure marquent les positions des nœuds donnés par un cercle de 25^{cm} de diamètre dans quatre distances différentes du tube conducteur.

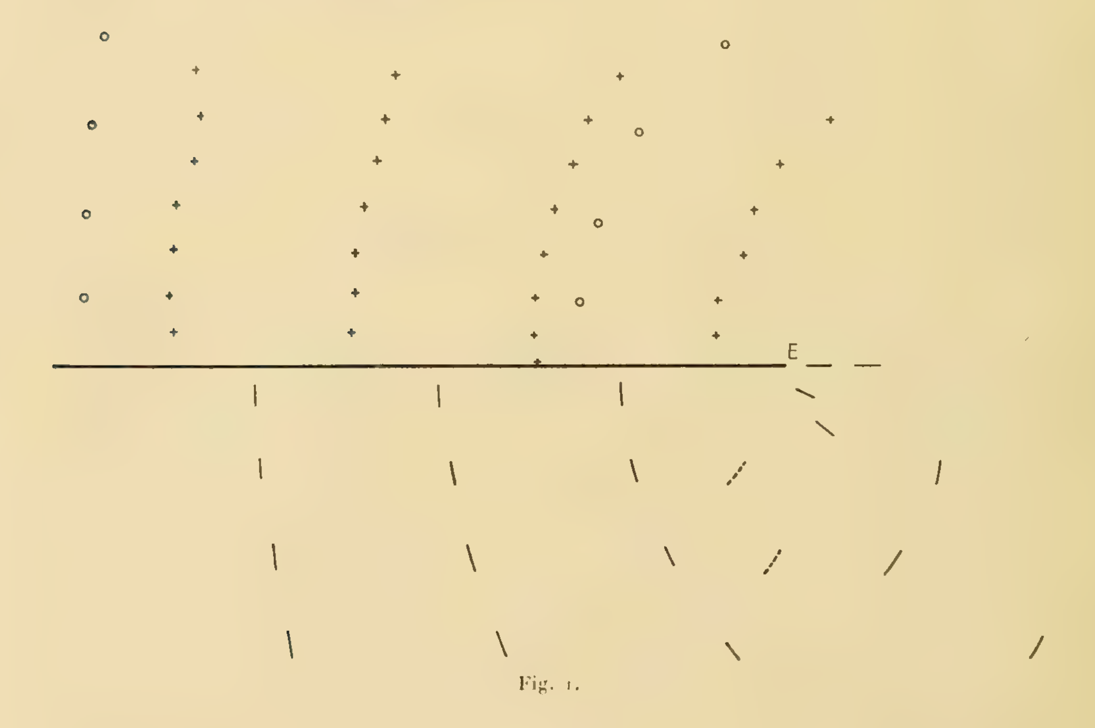


Fig. 1.

L'impression qui résulte immédiatement de la répartition de tous ces nœuds est que, si le premier *choc* arrive au résonateur à peu près parallèlement au fil conducteur, le second doit y arriver par un rayonnement direct partant du voisinage de l'extrémité du fil. En effet, tous les nœuds sont situés sensiblement comme si l'énergie, provoquant le second *choc* dans le résonateur, marchait *tout près* du fil jusqu'au moment où il est arrivé au bout, puis se dirigeait, à partir de là, directement sur le cercle. Il faut remarquer pourtant que cette manière d'envisager la réflexion ne justifie pas le retrait considérable du premier nœud quand le résonateur se trouve tout près du fil conducteur, un retrait qui, selon les expériences de MM. Sarasin et de la Rive, est d'autant plus grand que le cercle est plus grand lui-même. Nous croyons cependant avoir bien constaté maintenant que ce retrait est dû à la forme géométrique du résonateur; les chocs

Supposons que le point M soit voisin du point A et par conséquent éloigné du point O; r_0 différera peu de z; le quatrième terme sera négligeable et le second se réduira à

$$-\frac{2F(z - Vt)}{\rho}.$$

Si nous supposons que

$$F_1(x) = \lambda F(2l - x),$$

le premier et le troisième terme pourront être confondus en un seul, car on aura

$$F_1(\beta_1) = \lambda F(\alpha_1).$$

Si nous posons alors

$$\rho = r_1 \sin\varphi, \qquad l - z = r_1 \cos\varphi,$$

il viendra

$$\frac{dH}{d\rho} = \frac{F(\alpha_1)}{r_1}\left(\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} - \lambda \operatorname{cotg}\frac{\varphi}{2}\right) - \frac{2F(z - Vt)}{\rho}.$$

Comme α_1 dépend seulement de r_1, nous voyons que les deux termes de cette équation correspondent à deux ondes : la première à une onde qui semble

---

électriques arrivant le long de deux conducteurs rectilignes tendent à charger chacun la portion la plus rapprochée du résonateur, de sorte que la première oscillation se produit entre deux parties diamétralement opposées du cercle. L'électricité ne tardant pas cependant à osciller dans toute l'amplitude du cercle, celui-ci prend alors sa période normale et les nœuds se disposent en conséquence le long du fil.

En second lieu, nous avons cherché comment il faut tourner le plan du résonateur autour de son axe vertical pour que l'effet total des deux « chocs » qui en excitent les oscillations soit aussi grand que possible.

On trouvera ces directions indiquées dans la figure 1; elles ont été déterminées pour la plupart là où doivent se trouver les « maxima », d'après les mesures des nœuds. Parmi les autres orientations figurées, il s'en trouve deux qui ont été prises dans des nœuds (traits pointillés). Ces directions d'effet maximum donnent, nous semble-t-il, forcément l'impression d'un rayonnement direct du bout du fil.

Des trois séries d'observations faites dans le milieu des internœuds, il ressort, en effet, que la normale au cercle est dirigée à peu près suivant la bissectrice de l'angle que forme avec la parallèle au fil conducteur la ligne allant directement à l'extrémité du fil. Les deux observations faites dans les nœuds mêmes montrent que, pour y avoir *l'effet maximum,* il faut orienter le cercle de telle sorte que les ondulations électriques venant au bout du fil arrivent normalement sur son plan et que l'action du second choc soit par ce fait annulée.

Les résultats que nous venons d'énoncer permettent de donner un certain développement à la conception « du tube électrique en marche », imaginé par quelques savants anglais. Admettons que le tube électrique de *l'onde directe*, qui se meut en chaque point normalement à sa direction instantanée, est à peu près rectiligne et normal au fil conducteur : il n'en sera plus de même dans l'onde réfléchie.

Or les mesures faites par l'un de nous des interférences sur la surface même du fil conducteur montrent qu'il n'existe dans ce cas aucun retrait sensible du premier nœud, et que, par conséquent, la partie du tube électrique immédiatement voisine du conducteur fait le tour autour de l'extrémité de celui-ci presque sans retard. Mais les parties éloignées du tube ne

émaner du point A, la seconde à une onde qui semble se mouvoir parallèlement à la droite OA.

Cela est conforme aux expériences de MM. Sarasin et Birkeland dont la théorie rend ainsi compte dans leurs traits généraux.

Bien des difficultés subsistent cependant; car la théorie ne me paraît pas très bien expliquer la perte par réflexion observée (dont dépend le coefficient λ); mais, avant de se prononcer, il faut attendre qu'on ait découvert la cause des contradictions entre les résultats expérimentaux obtenus par des méthodes différentes.

---

peuvent pas parcourir simultanément la même distance angulaire; elles restent en arrière et le tube électrique se courbe alors à peu près comme une queue de comète autour de l'extrémité du fil (*fig.* 2).

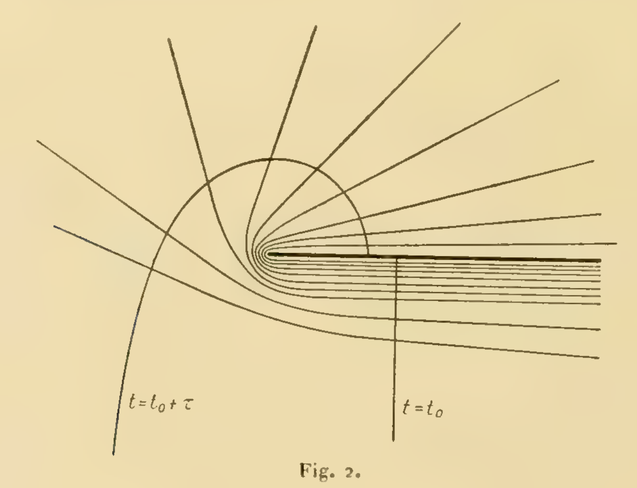


Fig. 2.

Telle serait donc l'origine de ce rayonnement caractéristique partant du bout du conducteur, dont nous croyons pouvoir admettre l'existence. Il résulterait que ces éléments du tube électrique continuant à se mouvoir normalement à leur direction instantanée, l'énergie s'éloigne du bout du fil pour se répandre dans tout l'espace ambiant (*).

(*) Il doit donc se produire une perte sensible d'énergie à la réflexion. Nous avions espéré compléter notre travail sur ce point par des mesures sur le fil même (*cf.* BIRKELAND, *Wied. Ann.*, t. XLVII, p. 583). Pour trois longueurs d'onde $\lambda_1 = 6\,m$, $\lambda_2 = 2{,}7\,m$ et $\lambda_3 = 1{,}2\,m$, nous avons trouvé que l'onde réfléchie est respectivement 0,6, 0,45 et 0,35 de l'onde directe. Or nous avons imaginé une autre méthode pour mesurer directement la perte, et nous n'avons pas retrouvé ces valeurs, de telle sorte que nous ne pouvons les donner que sous toutes réserves, n'ayant pas réussi encore à expliquer ces résultats contradictoires.

SUR LA DIFFRACTION

DES

ONDES ÉLECTRIQUES :

A PROPOS D'UN ARTICLE DE M. MACDONALD

Proceedings Royal Society (London), t. 72, p. 42-52 (1904).

1. Dans le n° 472 des *Proceedings*, M. Macdonald a publié un article intitulé : *The bending of Electric Waves round a Conducting Obstacle*, sur lequel je désire présenter quelques observations. On a annoncé récemment que M. Marconi avait réussi à envoyer des signaux de télégraphie sans fil d'Angleterre en Amérique. Quelle que soit la sensibilité du cohéreur, ce résultat est bien fait pour nous surprendre pour deux raisons : à cause de la grande distance d'abord, et à cause de la courbure de la Terre. Évidemment il faut admettre qu'une grande partie de la radiation a subi une diffraction considérable, pour pouvoir contourner l'obstacle formé par la Terre.

L'importance de cette diffraction est-elle uniquement due à la grande longueur des ondes ? M. Macdonald ne l'a pas pensé. Nous savons que M. Gouy a observé des phénomènes, qu'il appelle de diffraction éloignée, en concentrant de la lumière sur le tranchant d'un rasoir. Les rayons lumineux subissent ainsi des déviations considérables. J'ai fait dans les *Acta Mathematica* la théorie de ces phénomènes, et j'ai montré qu'ils sont indépendants de la longueur d'onde, pourvu que le rayon de courbure du tranchant et la distance de ce tranchant au foyer où se concentre la lumière restent du même ordre de grandeur que cette longueur d'onde.

D'après M. Macdonald, il se passerait quelque chose d'analogue en télégraphie sans fil; l'onde émanée d'un excitateur dont la distance au sol est de l'ordre de la longueur d'onde, suivrait la surface de la sphère terrestre sans s'affaiblir sensiblement. Il y a là une idée qui au premier abord est assez séduisante; mais si l'on examine de plus près l'analyse de M. Macdonald on voit qu'il n'a pas supposé que la source de lumière soit à une distance du sol comparable à la longueur d'onde. Ses formules restent, ou semblent rester, applicables quelle que soit cette distance. Si alors la lumière reste sensible quelle que soit la longueur d'onde et quelle que soit la position de la source, cela veut dire qu'il fait jour pendant toute la nuit; cette conclusion est trop manifestement contredite par l'expérience.

Il est vrai que M. Macdonald suppose que le point d'où l'on observe la lumière est situé sur la surface même de la sphère terrestre; on pourrait imaginer alors qu'il y a une couche très mince, d'épaisseur comparable à la longueur d'onde où la lumière est sensible, et qu'en dehors de cette couche elle est insensible. Mais en regardant de plus près, on voit que l'analyse de M. Macdonald s'applique tout aussi bien si l'on observe d'un point quelconque de l'espace. Il y a donc dans cette analyse un point faible, et il importe de le découvrir afin de voir ce qui reste de ses conclusions.

2. Rappelons le principe de l'analyse de M. Macdonald. Introduisons les fonctions de Bessel :

$$(1) \qquad J_n(x) = A_n x^n \int_{-i}^{+i} e^{zx}(z^2+1)^{\frac{2n-1}{2}}\, dz$$

et

$$(2) \qquad I_n(x) = A_n' x^n \int_{i}^{\infty} e^{zx}(z^2+1)^{\frac{2n-1}{2}}\, dz.$$

Toutes deux satisfont à l'équation différentielle

$$(3) \qquad J'' + \frac{J'}{x} + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right) J = 0.$$

La première est caractérisée par ce fait qu'elle reste finie dans toute l'étendue du plan, et la seconde parce que pour x très grand elle est sensiblement proportionnelle à $\frac{e^{ix}}{\sqrt{x}}$.

Elle ne diffère que par un facteur constant de celle que M. Macdonald

appelle K_n. Quant à A_n et A'_n ce sont des coefficients constants sur lesquels nous reviendrons.

Revenons au problème qui nous occupe. Prenons pour axe des z la droite qui joint le centre de la Terre à l'excitateur; appelons r la distance du point considéré au centre de la Terre, et ρ la distance à l'axe des z. Prenons pour unité le rayon de la Terre de telle sorte que $r = 1$ soit l'équation de la surface de la Terre. Posons enfin $z = r\mu$.

Soit $\frac{2\pi}{k}$ la longueur d'onde, les forces électriques ou magnétiques dépendront des lignes trigonométriques de l'angle kVt, si V est la vitesse de la lumière; et je pourrai, par un artifice bien connu, supposer que chacune de ces forces est la partie réelle d'une expression imaginaire proportionnelle à e^{-ikVt}. Supposons donc que la force magnétique soit la partie réelle de

$$\frac{\psi}{\rho} e^{-ikVt},$$

où ψ est une expression imaginaire indépendante du temps. M. Macdonald indique d'abord qu'elle est la forme générale de l'expression ψ, il trouve :

$$(4) \qquad \psi = \sqrt{r}\,\Sigma\left[B_n J_{n+\frac{1}{2}}(kr) + C_n I_{n+\frac{1}{2}}(kr)\right](1-\mu^2)\frac{dP_n}{d\mu},$$

P_n désignant le polynome de Legendre.

C'est là la solution la plus générale de l'équation :

$$(5) \qquad \frac{d^2\psi}{dr^2} + \frac{1-\mu^2}{r^2}\frac{d^2\psi}{d\mu^2} + k^2\psi = 0,$$

à laquelle doit satisfaire ψ (en dehors des sources) toutes les fois que les sources sont distribuées de telle façon que tout soit de révolution autour de l'axe des z. Si nous considérons une sphère de rayon a, et si en dehors de cette sphère il n'y a pas de source, alors à *l'extérieur* de cette sphère, la fonction ψ devra être représentée par une expression de la forme (4); de plus, pour r très grand, nous devrons avoir des termes contenant en facteurs l'exponentielle : $e^{ik(r-Vt)}$, et qui correspondent à des faisceaux divergents s'éloignant des sources, et ne pas avoir de termes contenant en facteurs l'exponentielle $e^{-ik(r+Vt)}$ et qui correspondraient à des faisceaux convergeant vers les sources. Il en résulte que les coefficients B_n sont nuls.

Supposons au contraire qu'il n'y ait à *l'intérieur* de la sphère de rayon a

ni source ni surface réfléchissante comme serait la surface de la Terre dans le problème qui nous occupe. Alors à l'intérieur de cette sphère la fonction ψ sera encore représentée par une expression de la forme (4), mais comme cette fonction doit demeurer finie pour $r = 0$ ce sont les coefficients C_n qui seront nuls.

Dans le problème qui nous occupe nous poserons :

$$\psi = \psi_1 + \psi_2,$$

où ψ_1 sera ce que serait la fonction ψ avec la même source, si la surface réfléchissante de la Terre était supprimée. On aura alors :

$$\psi_1 = \rho \frac{d}{d\rho} \frac{e^{ikR}}{R},$$

R étant la distance du point considéré à la source ; soit a la distance de cette source au centre de la Terre, à l'extérieur de la sphère de rayon a on aura

$$(4\ bis) \qquad \psi_1 = \sqrt{r}\, \Sigma\, C'_n I_{n+\frac{1}{2}} Q_n,$$

et à l'intérieur

$$(4\ ter) \qquad \psi_1 = \sqrt{r}\, \Sigma\, B'_n J_{n+\frac{1}{2}} Q_n.$$

C'_n et B'_n sont des coefficients constants, et j'ai posé pour abréger :

$$Q_n = (1 - \mu^2) \frac{dP_n}{d\mu}.$$

D'autre part, à l'extérieur de la sphère de rayon 1 on devra avoir :

$$\psi_2 = \sqrt{r}\, \Sigma\, C''_n I_{n+\frac{1}{2}} Q_n.$$

On déterminera les coefficients constants C''_n par la condition :

$$\frac{d\psi}{dr} = 0,$$

qui doit être satisfaite pour $r = 1$. On trouve ainsi :

$$(6) \quad 0 = \frac{d\psi_1}{dr} + \frac{d\psi_2}{dr} = \sqrt{r}\, \Sigma\, B'_n \frac{dJ_{n+\frac{1}{2}}}{dr} Q_n + \Sigma\, C''_n \frac{dI_{n+\frac{1}{2}}}{dr} Q_n + \frac{1}{2\sqrt{r}} \Sigma \left(B'_n I_{n+\frac{1}{2}} + C''_n I_{n+\frac{1}{2}} \right) Q_n,$$

d'où la condition

$$(7) \qquad \left(B'_n \frac{dJ_{n+\frac{1}{2}}}{dr} + C''_n \frac{dI_{n+\frac{1}{2}}}{dr}\right) - \frac{1}{2r}(B'_n J_{n+\frac{1}{2}} + C''_n I_{n+\frac{1}{2}}) = 0$$

qui doit être satisfaite pour $r = 1$ et qui détermine C''_n.

Mais si la longueur d'onde est très petite, k est très grand et $I_{n+\frac{1}{2}}$ est sensiblement égal à :

$$A \frac{e^{ikr}}{\sqrt{kr}}.$$

A étant une constante, sa dérivée par rapport à r est sensiblement

$$ikA \frac{e^{ikr}}{\sqrt{kr}},$$

de sorte que l'on a sensiblement

$$\frac{dI_{n+\frac{1}{2}}}{dr} = ikI_{n+\frac{1}{2}},$$

et par conséquent,

$$(8) \qquad \frac{d\psi_2}{dr} = ik\psi_2 + \frac{1}{2r}\psi_2$$

ou encore comme k est très grand par rapport à $\frac{1}{r}$

$$(8\ bis) \qquad \frac{d\psi_2}{dr} = ik\psi_2.$$

La condition (6) devient donc

$$\frac{d\psi_1}{dr} - ik\psi_1 = 0,$$

de sorte qu'on a pour $r = 1$,

$$\psi = \psi_1 + \psi_2 = \psi_1 + i \frac{d\psi_1}{k\,dr}.$$

Il est aisé de constater que cette expression ne s'annule pas, et même n'est pas très petite, de sorte que sur la surface même de la sphère terrestre il devrait rester de la lumière.

Si nous supposons maintenant $r > 1$; et si nous appelons $I^0_{n+\frac{1}{2}}$, ψ^0_2, ψ^0_1, $\frac{d\psi^0_2}{dr}$, $\frac{d\psi^0_1}{dr}$ les valeurs de $I_{n+\frac{1}{2}}$, ψ_2, ψ_1, $\frac{d\psi_2}{dr}$, $\frac{d\psi_1}{dr}$ pour $r = 1$, nous aurons :

$$I_{n+\frac{1}{2}} = I^0_{n+\frac{1}{2}} \frac{e^{ikr}}{\sqrt{r}}; \qquad \psi_2 = \psi^0_2 e^{ikr} = i \frac{d\psi^0_1}{dr} \frac{e^{ikr}}{k};$$

et l'on aurait

$$\psi = \psi_1 + \psi_2 = \psi_1 + i\,\frac{d\psi_1''}{k\,dr}\,e^{ikr}.$$

Ainsi il devrait y avoir encore de la lumière, même *à l'extérieur* de la sphère terrestre : c'est ce que j'avais annoncé plus haut.

3. Ce résultat étant manifestement erroné, il faut chercher quel est le point faible de l'analyse précédente. C'est évidemment la façon dont nous avons établi les égalités (8) et (8 *bis*). Nous avons :

(9) $$\frac{d\psi_2}{dr} - ik\psi_2 - \frac{1}{2r}\psi_2 = \sqrt{r}\,\Sigma C''_n\left(\frac{dI_{n+\frac{1}{2}}}{dr} - ikI_{n+\frac{1}{2}}\right)Q_n.$$

Le second membre de (9) est une série dont tous les termes tendent vers zéro quand k croît indéfiniment. Nous en avons conclu que la somme de la série tendait aussi vers zéro, et que par conséquent le premier membre de (9) était sensiblement nul pour k très grand, ce qui nous donnait l'égalité (8). *Mais cette conclusion ne serait légitime que si la série était uniformément convergente, j'entends uniformément par rapport à k.*

Or, la condition n'est pas remplie pour notre série, et il est aisé de constater d'abord qu'elle ne l'est pas pour la série analogue

$$\sqrt{r}\,\Sigma C'_n\left(\frac{dI_{n+\frac{1}{2}}}{dr} - ikI_{n+\frac{1}{2}}\right)Q_n$$

formée à l'aide de la série (4 *bis*). Si elle l'était en effet, on aurait :

(10) $$\frac{d\psi_1}{dr} - ik\psi_1 - \frac{1}{2r}\psi_1 = 0$$

et comme l'expression de ψ_1 est connue et très simple, on voit immédiatement qu'il n'en est pas ainsi. Cette relation (10) si elle était exacte, entraînerait comme conséquence que

$$\psi_1 = \rho\,\frac{d}{d\rho}\,\frac{e^{ikR}}{R}$$

serait le produit d'une fonction de r par une fonction de μ, ce qui manifestement n'est pas vrai.

4. Ce qui précède se rattache immédiatement à l'étude des potentiels généralisés. Je désigne ainsi les intégrales de la forme

$$W = \int h \frac{e^{ikR}}{R} d\sigma,$$

où l'intégration doit être étendue à tous les éléments $d\sigma$ d'une surface ou d'un volume attirant; où h est une fonction des coordonnées de l'élément $d\sigma$, représentant la densité de la matière attirante; où enfin R désigne la distance de cet élément $d\sigma$ au point de coordonnées courantes.

On aura d'ailleurs pour W une formule analogue à (4)

$$(11) \qquad W = \Sigma \left| E_n J_{n+\frac{1}{2}}(kr) + F_n I_{n+\frac{1}{2}}(kr) \right| P_n,$$

où P_n est une fonction sphérique d'ordre n, qui se réduit au polynome de Legendre, si comme nous le supposons ici tout est de révolution autour de l'axe des z.

Soient

$$x' = r' \sqrt{1-\mu'^2} \cos\theta', \qquad y' = r' \sqrt{1-\mu'^2} \sin\theta', \qquad z' = r'\mu',$$

les coordonnées de l'élément $d\sigma$; si tout est de révolution autour de l'axe des z comme nous le supposons, h ne dépendra que de r' et de μ'. On aura d'ailleurs :

$$\psi = \rho \frac{dW}{d\rho}.$$

Si toutes les masses attirantes sont à l'intérieur de la sphère de rayon a, on aura à l'extérieur de cette sphère : $E_n = 0$; et d'un raisonnement tout pareil à celui qui précède, il semblera résulter que l'on doit avoir :

$$\frac{dW}{dr} = ikW.$$

Seulement ici, il sera plus aisé de voir dans quels cas ce raisonnement est légitime.

Commençons par étudier le cas d'un potentiel de simple couche répandu à la surface d'une sphère de rayon 1; nous devons donc supposer que l'on a

$$r = 1, \qquad d\sigma = d\mu' \, d\theta',$$

et que h est fonction de μ' seulement.

Nous examinerons seulement deux cas : 1° celui où h est une fonction

continue indépendante de k; 2° celui où l'on a :

$$h = e^{ikZ} h_0,$$

Z et h_0 étant des fonctions continues indépendantes de k.

Dans le premier cas, la densité de la matière attirante ne varie que lentement sur la surface de la sphère; dans le second cas, au contraire, elle varie très rapidement, et d'autant plus rapidement que k est plus grand. On aura alors :

$$W = \int e^{ik(R+Z)} \frac{h_0}{R} \, d\omega' \, d\theta'.$$

Dans le premier cas, Z se réduit à zéro et h_0 à h.

Pour aller plus loin, envisageons d'abord l'intégrale simple :

$$\int_a^b e^{ik\varphi(z)} \psi(z) \, dz,$$

où φ et ψ sont des fonctions de z que nous supposerons holomorphes et indépendantes de k dans la région envisagée. Nous supposons que a et b sont réels, que l'intégration se fait le long d'un chemin réel, et que pour z réel les fonctions φ et ψ sont réelles.

Nous allons déformer ce chemin d'intégration de façon que le long du nouveau chemin la partie imaginaire de $\varphi(z)$ soit positive sauf en certains points exceptionnels pour lesquels elle sera nulle.

Il est toujours possible de déformer le chemin de cette manière, et les seuls points exceptionnels qu'on est obligé de laisser subsister, et pour lesquels la partie imaginaire de $\varphi(z)$ doit rester nulle, ce sont les extrémités du chemin a et b, et d'autre part les points où le chemin doit traverser l'axe des z réels, parce que la région où la partie imaginaire de $\varphi(z)$ est positive, passe d'un côté à l'autre de cet axe des z réels; ces points sont ceux pour lesquels la dérivée $\varphi'(z)$ est nulle. Par exemple si l'on suppose $\varphi(z) = z^2$; et $z = x + iy$; la région où la partie imaginaire est positive est donnée par l'inégalité $yx > 0$; donc pour $x < 0$, on doit avoir $y < 0$, et pour $x > 0$ on doit avoir $y > 0$; donc quand x passe par la valeur zéro, notre région passe d'un côté à l'autre de l'axe des x; si donc nous voulons que notre chemin d'intégration reste constamment dans cette région, nous ne pouvons éviter de le faire passer par l'origine.

Toutes les fois que la partie imaginaire de $\varphi(z)$ est positive, l'exponentielle $e^{ik\varphi(z)}$ tend rapidement vers zéro quand on fait croître k. Si donc k est très grand, on aura une valeur très approchée de l'intégrale, en réduisant le chemin d'intégration aux parties très voisines des points exceptionnels. Soit donc α l'un des points exceptionnels autres que a et b; notre intégrale se réduira à fort peu près à :

$$\int_a^{a+\varepsilon} + \Sigma\int_{\alpha-\varepsilon}^{\alpha+\varepsilon} + \int_{b-\varepsilon}^{b}.$$

Nous sommes donc ramenés au calcul d'intégrales de la forme :

$$K = \int_\alpha^{\alpha+\varepsilon} e^{ik\varphi}\psi\,dz, \qquad K' = \int_{\alpha-\varepsilon}^{\alpha} e^{ik\varphi}\psi\,dz.$$

Soit alors $H + A(z-\alpha)^m$, $B(z-\alpha)^p$ les premiers termes du développement de φ et de ψ suivant les puissances de $z-\alpha$; on aura toujours avec la même approximation :

$$K = e^{ikH}\int_0^\infty B\,e^{ikAz^m}z^p\,dz, \qquad K' = e^{ikH}\int_\infty^0 B\,e^{ikAz^m}z^p\,dz.$$

On doit dans ces intégrales faire tendre z vers l'infini (limite supérieure ou inférieure d'intégration) avec un argument tel que e^{ikAz^m} tende vers zéro. Ces intégrales sont des fonctions eulériennes faciles à calculer.

Si maintenant les fonctions $\varphi(z)$ et $\psi(z)$ sont périodiques de période $b-a$, nous pouvons supprimer les termes correspondant aux deux extrémités a et b et ne plus considérer ces points a et b comme exceptionnels. On a, en effet,

$$\int_a^b = \int_{a+h}^{b+h},$$

et nous pouvons donner à h une valeur imaginaire telle que $\varphi(a+h) = \varphi(b+h)$ ait sa partie imaginaire positive.

Les seules parties du chemin d'intégration qu'il y a lieu de conserver sont celles qui avoisinent les points où $\varphi'(z)$ est nul.

Les mêmes considérations peuvent s'appliquer aux intégrales doubles de la forme :

$$\iint e^{ik\varphi(x,y)}\psi(x,y)\,dx\,dy$$

étendues à une aire plane S limitée par une ligne fermée L. On verrait sans peine (soit en intégrant d'abord, par rapport à y, puis par rapport à x, et appliquant chaque fois les principes que nous venons d'établir, soit en s'appuyant sur les propriétés des intégrales doubles imaginaires, comme nous venons de le faire sur celles des intégrales simples imaginaires), on verrait, dis-je, que l'on peut réduire l'aire d'intégration tout entière aux parties voisines de la ligne L, et aux parties voisines des maxima, minima et minimax de la fonction $\varphi(x, y)$, et dont le calcul pourrait se faire aisément.

Il en serait de même pour l'intégrale

$$\int e^{ik\varphi}\psi\, d\sigma,$$

étendue à tous les éléments $d\sigma$ d'une aire courbe S limitée par une ligne fermée L, et située sur une surface fermée Σ. Quant à φ et ψ, ce sont bien entendu des fonctions analytiques des coordonnées de l'élément $d\sigma$.

Si nous supposons que l'intégration soit étendue à la surface fermée tout entière, et qu'il n'y ait plus de ligne L, il suffira de réduire la surface d'intégration aux parties voisines des maxima, minima ou minimax de la fonction φ.

Revenons au problème qui nous occupe, et commençons par le premier cas, celui où

$$W = \int e^{ik\mathrm{R}} \frac{h}{\mathrm{R}}\, d\sigma,$$

h étant indépendant de k; il suffira alors de réduire le champ d'intégration aux parties voisines des maxima de R. Soit M le point de coordonnées courantes, P le centre de gravité de l'élément $d\sigma$; R n'est autre chose que la distance MP. Le maximum et le minimum de la distance $\mathrm{MP} = \mathrm{R}$ correspondant aux deux intersections de la sphère avec la droite MO qui joint le point M au centre de la sphère; leur valeur est $r + 1$ et $r - 1$. Soient alors P_0 et P_1 les deux points d'intersection de la sphère avec MO; pour un point P voisin de P_0 on aura sensiblement $\mathrm{MP}^2 = (r+1)^2 + \mathrm{PP}_0^2$ et pour un point voisin de P_1 on aura $\mathrm{MP}^2 = (r-1)^2 + \mathrm{PP}_1^2$, d'où :

$$\mathrm{R} = (r+1) + \frac{\mathrm{PP}_0^2}{2(r+1)}, \qquad \mathrm{R} = (r-1) + \frac{\mathrm{PP}_1^2}{2(r-1)}.$$

On voit alors que l'intégrale W peut se réduire aux parties provenant du voisinage des points P_0 et P_1; le voisinage de P_0 nous donne sensiblement un

terme de la forme :

$$\frac{e^{ik(r+1)}}{k} f,$$

et le voisinage de P_1 un terme de la forme

$$\frac{e^{ik(r-1)}}{k} f_1,$$

f et f_1 étant indépendants de k. Nous aurons donc sensiblement

$$W = \frac{e^{ik(r+1)} f + e^{ik(r-1)} f_1}{k}.$$

Le terme le plus important de $\frac{dW}{dr}$, celui devant lequel les autres doivent être négligés, est alors :

$$\frac{dW}{dr} = i[e^{ik(r+1)} f + e^{ik(r-1)} f_1].$$

On a donc

$$\frac{dW}{dr} = ikW,$$

ce qui est bien le résultat auquel aurait conduit le raisonnement de M. Macdonald.

Mais passons maintenant au second cas, et pour préciser davantage, soit Q un point fixe extérieur à la sphère et que nous appellerons la source; nous supposerons que Z n'est autre chose que la distance PQ.

Voici ce qui justifie ce choix. Nous avons vu plus haut que ψ_2 devait être défini par la condition

$$\frac{d\psi_2}{dr} = \frac{d\psi_1}{dr}$$

qui doit être satisfaite pour $r = 1$. Or, précisément $\frac{d\psi_1}{dr}$ pour $r = 1$ est de la forme : $e^{ik\,PQ} h_0$, le point Q étant l'excitateur, et h_0 restant fini pour k très grand. L'analogie des deux problèmes est ainsi mise en évidence.

Soit donc :

$$W = \int e^{ik(R+Z)} \frac{h_0}{R} d\sigma.$$

On pourra réduire la surface d'intégration aux parties de la sphère voisines des maxima, minima et minimax de

$$R + Z = MP + PQ.$$

Les minima de MP + PQ correspondront évidemment aux points P qui sont en ligne droite avec M et Q, c'est-à-dire, aux deux points d'intersection P_0 et P_1 de la sphère avec la droite MQ.

On obtiendra encore des maxima et des minimax en construisant des ellipsoïdes de révolution ayant M et Q pour foyers et tangents à la sphère. Si les deux points M et Q sont voisins de la sphère, on obtiendra ainsi deux points réels P_2 et P_3. Alors notre champ étant réduit au voisinage des points P_0, P_1, P_2, P_3, et comme d'ailleurs

$$MP_0 + P_0Q = MP_1 + P_1Q = MQ,$$

on aura sensiblement, par un calcul tout pareil à ceux qui précèdent :

$$W = \frac{1}{k}\left[e^{ik\,MQ} f_1 + e^{ik(MP_2 + P_2Q)} f_2 + e^{ik(MP_3 + P_3Q)} f_3\right],$$

f_1, f_2 et f_3 restant finis pour k infini, et l'on en déduit

$$\frac{dW}{dr} = i\left[e^{ik\,MQ} f_1 \cos\alpha_1 + e^{ik(MP_2 + P_2Q)} f_2 \cos\alpha_2 + e^{ik(MP_3 + P_3Q)} f_3 \cos\alpha_3\right],$$

où α_1, α_2 et α_3 désignent les angles que font les trois droites MQ, MP_2 et MP_3 avec le rayon vecteur MO. On voit ainsi que la condition

$$\frac{dW}{dr} = ikW,$$

à laquelle conduirait le raisonnement de M. Macdonald n'est pas remplie.

Il est donc certain dans ce cas que la convergence des séries procédant suivant les fonctions de Bessel n'est pas uniforme.

Ces considérations suffiront, je pense, pour faire comprendre le point faible du raisonnement de M. Macdonald; il serait important de reprendre les calculs en tenant compte de cette difficulté, car il y a lieu de se demander si les résultats obtenus par M. Marconi peuvent s'expliquer par les théories actuelles, et sont dus simplement à l'exquise sensibilité du cohéreur, ou s'ils ne prouvent pas que les ondes se réfléchissent sur les couches supérieures de l'atmosphère rendues conductrices par leur extrême raréfaction.

LES ONDES HERTZIENNES

ET

L'ÉQUATION DE FREDHOLM

Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. 148, p. 449-453 (22 février 1909).

Il peut y avoir intérêt à ramener les problèmes relatifs aux ondes hertziennes à l'intégration d'une équation de Fredholm. Voici comment on peut opérer. Adoptons les notations de Maxwell, mais en prenant la vitesse de la lumière pour unité.

J'écris les équations connues, en me bornant à la première équation de chaque groupe,

$$
(1)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\alpha = \frac{dH}{dy} - \frac{dG}{dz}, \qquad 4\pi f = -\frac{dF}{dt} - \frac{d\psi}{dx},\\
&4\pi\left(u + \frac{df}{dt}\right) = \frac{d\gamma}{dy} - \frac{d\beta}{dz}, \qquad \frac{df}{dx} + \frac{dg}{dy} + \frac{dh}{dz} = \rho,\\
&\sum \frac{dF}{dx} + \frac{d\psi}{dt} = 0, \qquad 4\pi u = \frac{d^2F}{dt^2} - \Delta F, \qquad 4\pi\rho = \frac{d^2\psi}{dt^2} - \Delta\psi.
\end{aligned}
\right.
$$

Les deux dernières équations nous apprennent que le potentiel électrostatique ψ de même que les composantes F, G, H du potentiel vecteur ne sont autre chose que les potentiels retardés dus respectivement à la densité électrique ρ dans les conducteurs et aux composantes u, v, w du courant de conduction.

Nous supposerons que toutes nos fonctions sont une somme de termes contenant en facteurs des exponentielles $e^{\omega t}$; ces exponentielles sont généralement imaginaires, mais elles seront imaginaires conjuguées deux à deux.

On pourra considérer séparément tous les termes qui dépendent d'une même exponentielle $e^{\omega t}$; on aura ainsi diverses solutions simples dont les combinaisons linéaires nous donneraient la solution générale; en combinant l'un de ces éléments simples avec son imaginaire conjugué, on aurait une oscillation pendulaire amortie, l'amortissement dépendant de la partie réelle et la période de la partie imaginaire de ω.

On aura alors, par exemple, $\frac{dF}{dt} = \omega F$, et l'on pourra écrire

$$(2)\quad \begin{cases} \psi = \int \dfrac{\rho' e^{-\omega r}}{r} d\tau', & F = \int \dfrac{u' e^{-\omega r}}{r} d\tau', \\ G = \int \dfrac{v' e^{-\omega r}}{r} d\tau', & H = \int \dfrac{w' e^{-\omega r}}{r} d\tau'. \end{cases}$$

L'intégration est étendue à tous les éléments $d\tau'$ du volume du conducteur; les lettres ρ', u', v', w' représentent la valeur des fonctions ρ, u, v, w au centre de gravité de l'élément $d\tau'$, et r la distance de ce centre de gravité au point x, y, z. Mais l'électricité et les courants de conduction sont localisés à la surface des conducteurs. Nous devons donc remplacer les intégrales de volume par des intégrales de surface et écrire

$$(2\ bis)\quad \begin{cases} \psi = \int \dfrac{\rho'' e^{-\omega r}}{r} d\sigma', & F = \int \dfrac{u'' e^{-\omega r}}{r} d\sigma', \\ G = \int \dfrac{v'' e^{-\omega r}}{r} d\sigma', & H = \int \dfrac{w'' e^{-\omega r}}{r} d\sigma', \end{cases}$$

$d\sigma'$ représentant un élément de la surface d'un conducteur; tandis que ρ'', u'', v'', w'' sont les densités superficielles correspondant aux densités de volume ρ', u', v', w'.

Imaginons un conducteur unique soumis à l'action d'un champ extérieur considéré comme donné. Soient M un point quelconque de la surface du conducteur, M_i un point infiniment voisin de M, à l'intérieur du conducteur; en ce point la force électrique doit être nulle. Écrivons cela en particulier pour la composante normale; on obtiendra ainsi l'équation

$$(3)\qquad \frac{d\psi}{dn} + (lF + mG + nH)\,\omega = N,$$

où l, m, n sont les cosinus directeurs de la normale au point M dirigée vers l'extérieur; où $\frac{d\psi}{dn}$ est la dérivée de ψ estimée suivant cette normale, considérée du côté interne; où enfin N représente la composante normale de la force

électrique due au champ extérieur. Désignons par μ la densité superficielle de l'électricité au point M, et par $\mu' = \rho''$ cette même densité au centre de gravité P de $d\sigma'$. Nous trouverons, pour $\frac{d\psi}{dn}$,

$$\frac{d\psi}{dn} = 2\pi\mu - \int \mu' \, d\sigma' \frac{d}{dn} \frac{e^{-\omega r}}{r}.$$

D'ailleurs, on a

$$\frac{d}{dn} \frac{e^{-\omega r}}{r} = -\cos\psi \frac{e^{-\omega r}}{r} \left(\omega + \frac{1}{r} \right),$$

r désignant la distance MP et ψ l'angle de MP avec la normale en M.

D'autre part

$$l\mathrm{F} + m\mathrm{G} + n\mathrm{H} = \Sigma l\mathrm{F} = \int \frac{e^{-\omega r}}{r} \Sigma l u' \, d\sigma',$$

de sorte que l'équation (3) devient

$$(4) \qquad 2\pi\mu - \int \mu' \, d\sigma' \frac{d}{dn} \frac{e^{-\omega r}}{r} - \omega \int \frac{e^{-\omega r}}{r} \Sigma l u'' \, d\sigma' = \mathrm{X}.$$

Il reste à transformer la deuxième intégrale. Pour cela, nous nous servirons de l'équation de continuité

$$\frac{d\rho}{dt} = \omega\rho = -\sum \frac{du}{dx}.$$

Nous observerons que les composantes tangentielles de la force électrique et la composante normale de la force magnétique doivent rester continues lorsqu'on franchit la surface du conducteur. De plus, à l'intérieur du conducteur, le champ électrique comme le champ magnétique doivent être nuls; cela est vrai du moins si le conducteur est simplement connexe, ce que nous supposerons. A la surface du conducteur, les lignes de force magnétiques sont donc tangentes à cette surface; d'où cette conséquence que, si x', y', z' sont les coordonnées du point P, assujetti à rester sur cette surface,

$$u'' \, dx' + v'' \, dy' + w'' \, dz' = d\mathrm{V}$$

est une différentielle exacte.

Dans l'expression de $\Sigma l\mathrm{F}$, la quantité sous le signe $\int$ peut être regardée comme le produit de deux vecteurs par le cosinus de l'angle compris; le premier de ces vecteurs a pour composantes u'', v'', w''; le second est égal à $\frac{e^{-\omega r}}{r}$ et est parallèle à la normale en M. Soient W_1 et W_2 ces deux vecteurs.

Considérons sur la surface une courbe fermée quelconque C et l'aire A limitée par cette courbe; soient ds' un élément d'arc de C, et $d\nu$ une longueur infiniment petite prise sur une courbe orthogonale à C et tracée sur la surface, de telle sorte que $\frac{dV}{d\nu}$ représente la dérivée de V estimée suivant la normale à la courbe C. Les composantes des vecteurs W_1 et W_2 sur cette normale seront

$$\frac{dV}{d\nu}, \quad \frac{e^{-\omega r}}{r}\frac{d\Sigma lx'}{d\nu}.$$

Nous poserons

$$(5) \qquad \int_C \frac{e^{-\omega r}}{r}\frac{d\Sigma lx'}{d\nu}\,ds' = \int_A B\,d\sigma'.$$

L'aire A et la courbe C qui la limite étant quelconques, cette équation définira la fonction B qui ne sera autre chose que la *convergence* du vecteur W_2 ou plutôt de la composante de ce vecteur qui est tangente à la surface du conducteur. L'équation de continuité nous donnera d'ailleurs

$$(6) \qquad \int_C \frac{dV}{d\nu}\,ds' = -\omega\int_A \mu'\,d\sigma'.$$

Nous définirons maintenant la fonction L par l'équation

$$(7) \qquad \int_C \frac{dL}{d\nu}\,ds' = \int_A B\,d\sigma'.$$

En vertu de l'équation (6), l'intégrale $\int B\,d\sigma'$ étendue à la surface tout entière est nulle; l'équation (7) définira donc une fonction L qu'il sera aisé de former si la surface du conducteur est simplement connexe et si l'on sait en faire la représentation conforme sur une sphère. La fonction L dépend à la fois des coordonnées du point M et de celles du point P; elle sera déterminée par l'équation (7) à une fonction arbitraire près des coordonnées de M. On aura, en vertu de (5), en étendant les intégrales à toute la surface,

$$\int \frac{e^{-\omega r}}{r}\sum lu''\,d\sigma' = -\int BV\,d\sigma'$$

et ensuite, en vertu de (6) et (7),

$$\int BV\,d\sigma' = -\omega\int L\mu'\,d\sigma',$$

de sorte que l'équation (4) deviendra

$$(8) \qquad 2\pi\mu = \int \mu' \, d\sigma' \left[\cos\psi \frac{e^{-\omega r}}{r} \left(\omega + \frac{1}{r} \right) - \omega^2 L \right] + N;$$

N devant être regardée comme une fonction connue, cette équation a la forme d'une équation de Fredholm.

Le calcul de L se simplifie considérablement dans le cas de la sphère, d'un cylindre ou d'une surface de révolution, c'est-à-dire dans tous les cas pratiques. On peut étendre la solution à une surface multiplement connexe, mais il est nécessaire alors d'introduire une donnée de plus, à savoir le nombre des lignes de force magnétique du champ extérieur qui traversent le *trou* de la surface multiplement connexe.

L'équation (8), traitée par la méthode de Fredholm, permet de traiter le problème de la réception des ondes hertziennes en regardant ω et N comme donnés, et celui de leur émission en regardant N comme nul et ω comme inconnu. On sait que Fredholm introduit un paramètre arbitraire λ, qu'il place en facteur devant l'intégrale du second membre, et qu'il présente sa solution comme le quotient de deux fonctions entières en λ. Ici le numérateur et le dénominateur seront des fonctions entières non seulement par rapport à λ, mais par rapport à ω.

L'équation (8) nous donne théoriquement la solution du problème de la diffraction, mais alors la grandeur du paramètre ω introduit des difficultés pratiques qui méritent un examen spécial et sur lesquelles je me réserve de revenir.

SUR LA DIFFRACTION

DES

ONDES HERTZIENNES

Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. 148, p. 812-817 (29 mars 1909).

Dans une Note précédente [*Comptes rendus*, 22 février 1909, p. 453 [1]], j'ai mis l'équation des ondes hertziennes sous la forme d'une équation de Fredholm.

$$(1)\qquad 2\pi\mu = \int \mu' K \, d\sigma' + N;$$

μ est la densité électrique en un point M de la surface du conducteur; l'intégration est étendue aux divers éléments $d\sigma'$ de cette surface; μ' est la densité électrique au centre de gravité M' de l'élément $d\sigma'$; K est le *noyau;* c'est une fonction des coordonnées de M et de M' dont j'ai montré, dans la Note citée, le mode de formation; enfin, N est la composante, normale au conducteur, du champ électrique dû aux actions extérieures.

Je vais traiter le cas où le conducteur est une sphère de centre O et de rayon ρ, très grand par rapport à la longueur d'onde, et où les actions extérieures se réduisent à celle d'un excitateur unique placé en un point S, à une distance D du centre O. Nous supposerons une oscillation isochrone, de sorte que toutes nos quantités seront proportionnelles à l'exponentielle imaginaire $e^{i\omega t}$; on trouve alors aisément

$$(2)\qquad 4\pi N = e^{i\omega(t-r)} \left[\frac{i\omega}{r} \sin\theta \sin\xi + \left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{i\omega r^3} \right) (\sin\theta \sin\xi + 2\cos\theta\cos\xi) \right];$$

[1] Ce tome, p. 6[illegible].

dans cette formule, r est la distance SM, tandis que θ, φ et $\pi - \xi$ représentent les angles S, O et M du triangle SOM. On peut, en général, si ω est grand et que r ne soit pas très petit, se borner au premier terme de la parenthèse. Nous allons développer N en une série de polynomes de Legendre et écrire

$$(3) \qquad N = \Sigma K_n P_n, \qquad \int_0^{\pi} P_n N \sin\varphi \, d\varphi = \frac{2 K_n}{2n+1}.$$

Il est aisé de voir que K_n dépend de ρ et est de la forme

$$K_n = \frac{A_n J_n(\omega\rho)}{\rho^2},$$

A_n étant une constante indépendante de ρ, tandis que J_n est une fonction analogue aux fonctions de Bessel et qu'on peut définir de la façon suivante. Soit l'équation

$$(4) \qquad \frac{d^2 y}{dx^2} + y\left[1 - \frac{n(n+1)}{x^2}\right] = 0.$$

Parmi les intégrales de cette équation, nous distinguerons celle qui reste holomorphe pour $x = 0$ et que nous appellerons J_n, et celle qui pour x très grand est sensiblement égale à e^{-ix} et que nous appellerons I_n. J'achèverai de définir ces deux intégrales par la relation

$$(5) \qquad I'_n J_n - J'_n I_n = 1,$$

I'_n étant la dérivée de I_n par rapport à x. L'étude de l'équation de Fredholm donne alors facilement, A étant un coefficient constant,

$$(6) \qquad \mu = A \sum \frac{K_n P_n}{I'_n(\omega\rho) J_n(\omega\rho)}.$$

Pour pousser plus loin le calcul, il faut s'appuyer sur ce fait essentiel que ω est très grand, ce qui permet de remplacer les intégrales par leur valeur approchée de la façon suivante. L'intégrale

$$\int \eta e^{i\omega\theta} \, dx,$$

où θ et η sont deux fonctions de x, a pour valeur approchée

$$\eta e^{i\omega\theta} \sqrt{\frac{2\pi}{\omega\theta''}} \, e^{-i\frac{\pi}{4}},$$

où l'on a donné à x la valeur qui correspond au maximum ou au minimum de θ et où θ'' est la dérivée seconde de θ. Grâce à cette formule, on trouve pour la valeur approchée du polynome de Legendre $P_n(\cos\varphi)$, où n est très grand et où $\sin\varphi$ n'est pas très petit,

$$(7)\qquad P_n = 2\sqrt{\frac{2\pi}{n\sin\varphi}}\cos\left(n\varphi+\frac{\varphi}{2}-\frac{\pi}{4}\right).$$

Nous avons besoin également de l'expression approchée de J_n et de I_n quand, l'argument x étant très grand, le nombre n est très grand également; mais deux cas sont à distinguer, suivant que n est plus grand ou plus petit que x; si $n < x$, on trouve

$$(8)\qquad I'_n J_n = e^{i\eta}\cos\eta,$$

où η est l'angle défini par l'équation

$$\eta = (n+1)\frac{\pi}{2} - x\cos\xi - \left(n+\frac{1}{2}\right)\xi,$$

ξ étant l'angle aigu, tel que $n = x\sin\xi$.

Si $n > x$, on trouve simplement

$$(8\ bis)\qquad I'_n J_n = \frac{1}{2}.$$

Une distinction analogue doit être faite dans le calcul de K_n; si $n < \omega\rho$, on a

$$(9)\qquad K_n = \frac{2n+1}{8\pi\sqrt{n}}\left[e^{i\left(n\varphi-\omega r-\frac{\varphi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}+e^{i\left(n\varphi'-\omega r'-\frac{\varphi'}{2}\right)}\right]\frac{i\omega\sin\theta\sin\xi}{\sqrt{D\rho\cos\theta\cos\xi}}\sqrt{\frac{\sin\theta}{\omega\rho}},$$

dont je vais expliquer la signification. Nous poserons

$$n = \omega\rho\sin\xi,$$

et nous chercherons à construire un triangle SOM, ayant pour côtés SO = D, OM = ρ et l'angle M égal à ξ, ou à $\pi-\xi$. Nous pouvons en construire deux; pour le premier, où l'angle M est obtus, le côté SM sera égal à r, l'angle O à φ, l'angle M à $\pi-\xi$, et l'angle S à θ; pour le second, où l'angle M est aigu, le côté SM sera égal à r', l'angle O à φ', l'angle M à ξ, enfin l'angle S à θ, même valeur que pour le premier triangle.

Si l'on compare les deux exponentielles imaginaires qui figurent dans le second membre de (9), on voit que la différence de leurs exposants est égale à $2i\eta$, η étant l'angle défini plus haut.

Si $n > \omega\rho$, l'angle ξ est imaginaire, et il en est de même des deux triangles SOM définis plus haut et, par conséquent, des valeurs de φ et de φ'; on peut alors hésiter entre les deux valeurs imaginaires de φ; on peut encore, lorsque $\sin\xi > \frac{D}{\rho}$ ou $n > \omega D$, hésiter sur le signe à attribuer à r et, par conséquent, hésiter non plus entre deux, mais entre quatre valeurs de φ. Celle que nous appellerons φ sera celle dont la partie imaginaire est positive et dont le module est le plus petit; on trouve alors

$$(9\,bis)\qquad K_n = \frac{2n+1}{8\pi\sqrt{n}}\, e^{i\left(n\xi-\omega r+\frac{\xi}{2}-\frac{\pi}{2}\right)}\, \frac{i\omega\sin\theta\sin\xi}{\sqrt{D\rho\cos\theta\cos\xi}}\sqrt{\frac{\sin\theta}{\omega\rho}}.$$

En comparant les expressions (8) et (9) aux expressions (8 *bis*) et (9 *bis*), on voit que dans les deux cas on arrive au même résultat :

$$(10)\qquad \frac{K_n}{P_n J_n} = \frac{2n+1}{4\pi\sqrt{n}}\, e^{i\alpha}\, \frac{i\omega\sin\theta\sin\xi}{\sqrt{D\rho\cos\theta\cos\xi}}\sqrt{\frac{\sin\theta}{\omega\rho}},$$

en posant pour abréger

$$\alpha = n\xi - \omega r + \frac{\xi}{2} - \frac{\pi}{2}.$$

La formule (6) nous donne alors

$$(11)\qquad \mu = \sum \frac{2n+1}{4\pi\sqrt{n}}\, P_n e^{i\alpha}\, \frac{i\omega\sin\theta\sin\xi}{\sqrt{D\rho\cos\theta\cos\xi}}\sqrt{\frac{\sin\theta}{\omega\rho}}.$$

Il reste à sommer la série (11).

Le cas qui nous intéresse est celui où la source est très près de la sphère, et où D est très voisin de ρ; dans ce cas, pour $\sin\xi = 1$, $\cos\theta$ est très petit; je supposerai néanmoins que $\omega\cos\theta$ est encore assez grand. Dans ce cas, on peut prendre

$$r = \xi = 0, \qquad \alpha = -\frac{\pi}{2}, \qquad e^{i\alpha} = -i.$$

Nous pouvons, dans le numérateur $2n+1$ de l'expression (11), négliger 1 devant $2n$.

Nous pouvons prendre le rayon ρ de la sphère comme unité de longueur et, comme D est à peu près égal à ρ, faire $D = \rho = 1$. Nous avons, d'autre part, d'après la formule (7),

$$P_n = 2\sqrt{\frac{2\pi}{n\sin\psi}}\cos\left(n\psi + \frac{\psi}{2} - \frac{\pi}{4}\right),$$

où Q est le point où l'on observe la densité μ, et où ψ est l'angle SOQ. La formule (11) devient alors

$$(12)\qquad \mu = K\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sum \frac{1}{\sqrt{\sin\psi}}\cos\left(n\psi + \frac{\psi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\frac{\sqrt{\omega}\sin\xi\sin\theta\sqrt{\sin\theta}}{\sqrt{\cos\theta\cos\xi}}.$$

La série (12) peut être remplacée par une intégrale qui la représente avec une approximation suffisante. Pour cela nous devons poser $n = \omega z$, d'où

$$\sin\xi = z,\qquad \sin\theta = \frac{z}{D},\qquad \cos\xi = \sqrt{1 - z^2},\qquad \cos\theta = \sqrt{1 - \frac{z^2}{D^2}}.$$

Comme D est très voisin de $\rho = 1$, nous pourrons remplacer $\sin\theta$ par $z = \sin\xi$; mais nous ne pouvons pas égaler $\cos\theta$ à $\cos\xi$, parce que les valeurs de z qui joueront le rôle le plus important sont celles qui sont voisines de 1, pour lesquelles le rapport de $\cos\theta$ à $\cos\xi$, loin d'être voisin de 1, peut prendre toutes les valeurs possibles.

Les valeurs de n correspondant à deux termes consécutifs de la série diffèrent de 1 : les valeurs correspondantes des z différeront de $\Delta z = \frac{1}{\omega}$; je puis donc remplacer 1 par $\omega\,\Delta z$; et j'ai alors, en passant de la série à l'intégrale,

$$(13)\qquad \mu = K\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int \frac{1}{\sqrt{\sin\psi}}\cos\left(n\psi + \frac{\psi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\frac{\sqrt{\omega}\, z^{2+\frac{1}{2}}}{\sqrt[4]{(1 - z^2)\left(1 - \frac{z^2}{D^2}\right)}}\,\omega\, dz.$$

Cette intégrale peut être décomposée en deux parties, en remplaçant le cosinus par la somme de deux exponentielles imaginaires. La première partie où figure l'exponentielle $e^{i\left(n\psi + \frac{\psi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}$ est négligeable vis-à-vis de la seconde qui s'écrit

$$\frac{K}{\sqrt{2\pi}}\int \frac{\omega\sqrt{\omega}\, dz}{\sqrt{\sin\psi}}\, e^{-i\left(n\psi + \frac{\psi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}\frac{z^{2+\frac{1}{2}}}{\sqrt[4]{(1 - z^2)\left(1 - \frac{z^2}{D^2}\right)}}.$$

Comme n et ω sont très grands, nous pouvons appliquer à cette intégrale les règles que nous avons expliquées plus haut pour en calculer une valeur appochée : et nous voyons ainsi que nous n'avons à tenir compte que des valeurs de z voisines de 1 ou voisines de D qui annulent le dénominateur. Si $D - 1$ est très petit, mais de telle façon que $(D - 1)\omega$ soit encore assez grand, il suffira

d'envisager celles qui sont voisines de 1, et l'on trouvera ainsi, puisque $z = 1$, $n = \omega$,

$$(14) \qquad \mu = B \frac{e^{i\left(\omega\psi - \frac{\psi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}}{\sqrt{\sin\psi}} \frac{\omega^{\frac{2}{3}}}{\sqrt[4]{1 - \frac{1}{D^2}}},$$

B étant un coefficient numerique. Si l'on tenait compte des valeurs voisines de D, on ne ferait que changer la valeur de ce coefficient sans l'annuler. On voit que le rapport $\frac{\mu}{\lambda}$ est de l'ordre de

$$\frac{1}{\sqrt[6]{\omega}\sqrt[4]{1 - \frac{1}{D^2}}},$$

où le premier facteur du dénominateur est d'autant plus petit que la longueur d'onde est plus grande, et le second facteur d'autant plus petit que la source est plus rapprochée de la surface de la sphère.

Ces considérations sont peut-être de nature à mieux faire comprendre les étonnants effets de diffraction obtenus en télégraphie sans fil à grande distance.

SUR LA DIFFRACTION

DES

ONDES HERTZIENNES

Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. 148, p. 966-968 (13 avril 1909).

Dans la Note que j'ai récemment consacrée au même sujet, j'ai ramené le calcul de l'intensité de l'onde diffractée à celui d'une série de la forme

$$(1) \qquad \sum C_n P_n,$$

où les P_n sont des polynomes de Legendre et les C_n des coefficients. J'ai montré comment on pouvait obtenir des valeurs très approchées des coefficients C_n et des polynomes P_n eux-mêmes, et que les termes les plus importants de la série sont ceux où n est voisin de $\omega\rho$, ρ étant le rayon de la sphère diffringente et ω un coefficient dépendant de la période des radiations incidentes.

Si l'on remplace les P_n par leurs expressions approchées, on voit que la sommation de la série (1) peut se ramener à celle d'une autre série

$$(2) \qquad \sum C_n e^{ni\varphi}.$$

Pour nous rendre compte de l'ordre de grandeur de la somme de cette série, nous l'avons remplacée par une intégrale. Cette façon de faire peut se justifier par les considérations suivantes. Le terme principal de C_n est de la forme (en supposant $\rho = 1$)

$$A(n-\omega)^{-\frac{1}{3}}.$$

A étant un coefficient constant. Nous pouvons alors envisager la série

$$(3) \qquad f(\psi) = \sum A(n-\omega)^{-\frac{1}{2}} e^{ni\psi},$$

d'où

$$\int_{\nu}^{\nu+1} f(\psi) e^{-i\omega\psi} d\omega = \sum A \int_{\nu}^{\nu+1} (n-\omega)^{-\frac{1}{2}} e^{(n-\omega)i\psi} d\omega$$

ou bien (en remplaçant $n - \omega$ par q)

$$(4) \qquad \int_{\nu}^{\nu+1} f(\psi) e^{-i\omega\psi} d\omega = -A \int dq . q^{-\frac{1}{2}} e^{qi\psi}.$$

Le premier membre peut être considéré comme représentant la valeur moyenne de la fonction $f(\psi)$ quand ω varie entre deux valeurs entières consécutives ν et $\nu + 1$; le second membre n'est autre chose que l'intégrale que j'ai calculée dans la Note citée. On voit que, si cette intégrale n'est pas très petite, la fonction $f(\psi)$ ne peut pas être très petite pour toutes les valeurs de ω. Ce qui justifie cette façon de procéder, c'est que les radiations incidentes, étant amorties, sont assimilables non à des radiations monochromatiques, mais à une lumière possédant un spectre continu.

Mais on peut aller plus loin et se proposer d'étudier la série (2) elle-même, ou la fonction $f(\psi)$ pour une valeur déterminée de ω.

On peut, par l'application d'un théorème bien connu d'Abel, trouver une limite supérieure du reste de la série. On voit ainsi qu'à cause de la décroissance des coefficients C_n quand n s'éloigne de ω, les seuls termes qui aient une influence sur l'ordre de grandeur de la somme de la série sont ceux pour lesquels n est voisin de ω. Si ω est très voisin d'un entier, l'un de ces termes est notablement plus grand que les autres et l'expression de l'onde diffractée se réduit sensiblement à un seul terme proportionnel à un des polynomes de Legendre. Elle est notablement plus intense que dans le cas général, par suite d'un véritable phénomène de résonance. Si ω n'est pas très voisin d'un entier, un des termes reste prépondérant, mais il interfère avec les autres termes de façon à produire de véritables franges d'interférence. Il va sans dire que ces franges ne seront pas observables, parce que, comme je viens de le faire remarquer, la source peut être regardée comme possédant un spectre continu, de sorte que l'observation ne pourra déceler que quelque chose d'analogue à cette valeur moyenne définie par l'équation (4).

ANWENDUNG DER INTEGRALGLEICHUNGEN AUF HERTZSCHE WELLEN

Sechs Vorträge über ausgewählte gegenstände aus der reinen Mathematik und mathematischen Physik von Henri Poincaré (Leipzig und Berlin), B. G. T., 1910, in-8°, p. 23-31 (24 avril 1909).

Ich will heute über eine Anwendung der Integralgleichungen auf Hertzsche Wellen vortragen und insbesondere die ausserst merkwürdigen Beugungserscheinungen behandeln, welche bei der drahtlosen Telegraphie eine so wichtige Rolle spielen: ist es doch eine wunderbare Tatsache, dass die Krümmung der Erdoberfläche, welche eine Fortpflanzung des Lichtes verhindert, für die Ausbreitung der Hertzschen Wellen kein Hindernis darstellt, dass dieselben vielmehr auf der Erdoberfläche von Europa bis Amerika zu laufen vermögen. Der Umstand, dass die Hertzschen Wellen eine viel grössere Länge haben als die Lichtwellen, kan allein diese Erscheinung noch nicht erklären. Eine solche Erklärung ergibt sich vielmehr erst durch Betrachtung der Differentialgleichungen des Problems.

Setzen wir die Lichtgeschwindigkeit gleich 1, und verstehen wir mit Maxwell :

unter α, β, γ die Komponenten der magnetischen Kraft ;
unter F, G, H die Komponenten des Vektorpotentiales ;
unter f, g, h die Komponenten der elektrischen Verschiebung ;
unter ψ das skalare Potential ;
unter u, v, w die Komponenten des Konduktionsstromes ;
unter ρ die Dichte der Elektrizität

so gelten die Gleichungen

$$\alpha = \frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial x},$$

. . . .

$$4\pi f = -\frac{\partial F}{\partial t} - \frac{\partial \psi}{\partial x},$$

. . . .

$$4\pi\left(\mu + \frac{\partial f}{\partial t}\right) = \frac{\partial \gamma}{\partial y} - \frac{\partial \beta}{\partial z},$$

. . . .

$$\sum \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z} = \rho,$$

$$\sum \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial t} = 0,$$

und es folgt

$$4\pi\mu = \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} - \Delta F,$$

$$4\pi\rho = \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \Delta \psi.$$

Wir betrachten nun eine gedämpfte synchrone Schwingung, indem wir annehmen, dass alle unsere Funktionen proportional sind mit der Exponentialgrösse $e^{i\omega t}$.

Aus den so zustande kommenden komplexen Lösungen erhalten wir die physikalischen durch Trennung in reellen und imaginären Bestandteil. Der reelle Teil von ω gibt die Schwingungsperiode, der imaginäre die Dämpfung.

Aus unserem Ansatz folgt

$$\frac{\partial F}{\partial t} = i\omega F,$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = i\omega \psi,$$

und man kann daher F und ψ als retardierte Potentiale darstellen wie folgt :

$$F = \int \mu' \frac{e^{-i\omega r}}{r}\, d\tau',$$

$$\psi = \int \rho' \frac{e^{-i\omega r}}{r}\, d\tau';$$

$d\tau'$ ist das Raumelement im (x', y', z')-Raume, μ', ρ', die Werte von μ, ρ im Punkte (x', y', z'), r die Entfernung der Punkte (x', y', z') und (x, y, z).

In den meisten Problemen treten zwei verschiedene Medien auf, der freie Äther und die leitenden Körper; von den letzteren wollen wir annehmen, dass sie sich wie vollkommene Leiter verhalten, dass also in ihrem Innern das Feld verschwindet, die elektrischen Kraftlinien auf ihrer Oberfläche normal stehen, während die magnetischen in dieselbe hineinfallen; dem Umstande, dass Ladung und Strömung nur an der Oberfläche des Leiters vorhanden ist, wollen wir dadurch entsprechen, dass wir die obigen Ausdrücke für F und ψ modifizieren, indem wir an Stelle der Raumintegrale Oberflächenintegrale einführen. Wir schreiben

$$\psi = \int \rho'' \frac{e^{-i\omega r}}{r} d\sigma',$$

$$F = \int \mu'' \frac{e^{-i\omega r}}{r} d\sigma',$$

wo ρ'', μ'' jetzt die Flächendichte der Ladung bzw. Strömung bedeuten und $d\sigma'$ das Flächenelement ist.

Wir unterscheiden gewöhnlich zwei leitende Körper, der eine soll der äussere, der andere der innere Leiter heissen; sie erzeugen das „äussere" resp. das „innere" Feld; das äussere Feld ist gegeben, das innere gesucht. So ist z. B., wenn wir das Problem des Empfanges elektrischer Wellen betrachten, der Sender der äussere, der Empfangsapparat der innere Leiter; beim Probleme der Beugung elektrischer Wellen ist der Erreger der äussere, die Erdkugel der innere Leiter; bei dem Probleme der Schwingungserzeugung haben wir kein äusseres Feld, der Erreger wird dann als innerer Leiter anzusehen sein.

Um nun zum Ansatz einer Integralgleichung zu gelangen, wollen wir unter den oben erklärten Funktionen nur die zum unbekannten inneren Felde gehörigen verstehen, sodass z. B. die obigen Integrale nur über die Oberfläche des inneren Leiters zu erstrecken sind; beachten wir nun, dass die innere Normalkomponente des elektrischen Vektors am inneren Leiter unserer obigen Annahme zufolge verschwinden muss, so folgt, wenn l, m, n die Richtungskosinus der Normale bedeuten, aus unseren Ausgangs-Gleichungen :

$$4\pi f - \frac{d\psi}{dn} - i\omega(lF + mG + nH) = N,$$

wo N die Normalkomponente des äusseren Feldes, also eine bekannte Funktion ist.

Bezeichnen wir jetzt die Flächendichte statt mit ρ'' mit ρ', so wird zufolge

unseres Ausdruckes für ψ

$$\frac{\partial\psi}{\partial n} = 2\pi\mu + \int \mu' \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{e^{-i\omega r}}{r}\right) d\sigma.$$

Benutzen wir ferner unseren Ausdruck für F und die entsprechenden für G und H, so hat man

$$i\omega\Sigma l F = \int \frac{e^{-i\omega r}}{r}\, i\omega\Sigma l \mu'' \, d\sigma'.$$

Diesen Ausdruck kann man nun in gewissen Fällen durch partielle Integrationen auf die Form

$$i\omega \int L\mu' \, d\sigma.$$

bringen, wobei L eine bekannte Funktion ist. So haben wir schliesslich

$$2\pi\mu + \int \mu' \left\{ \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{e^{-i\omega r}}{r}\right) - i\omega L \right\} d\sigma = N,$$

und dies ist die Integralgleichung 2. Art für μ, auf die wir hinstrebten. Im allgemeinsten Falle bekommt man zwei Integralgleichungen mit zwei Unbekannten, welche z. B. μ und ν sein mögen, wo μ das oben definierte ist; wir setzen $\nu = \frac{dN}{dn}$, wo $\frac{d}{dn}$ die Ableitung in der Normalrichtung bezeichnet und N die Normalkomponente der magnetischen Kraft ist.

Die Funktion L lässt sich dann besonders einfach bilden, wenn der innere Leiter ein Rotationskörper ist und das äussere Feld Rotationssymmetrie besitzt. Ist s, s' die Bogenlänge, gemessen vom Endpunkte der Rotationsachse auf einem

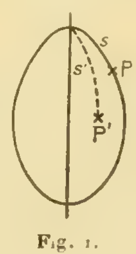


Fig. 1.

Meridian bis zu den Punkten P, P', ist ferner ϑ der Winkel zwischen der Normale in P und der Meridiantangente in P', so wird L als Funktion von ϑ, s, s' definiert durch die Differentialgleichung

$$\frac{dL}{ds'} = \frac{e^{-i\omega r}}{r}\cos\vartheta.$$

Das Problem des Empfanges elektrischer Wellen lässt sich auf Grund der obigen Integralgleichung 2. Art behandeln.

Wollen wir nur das Problem der Erzeugung elektrischer Wellen betrachten, so haben wir das äussere Feld gleich Null zu setzen, es wird also $N = 0$, und wir haben eine homogene Integralgleichung vor uns; in ihr darf jedoch ω nicht mehr einen willkürlichen Parameterwert bedeuten, sondern ist eine zu bestimmende Zahl, die die Rolle der Eigenwerte spielt.

Ich schreibe unsere Integralgleichung in der Form

$$2\pi\varphi + \int K\varphi'\,d\sigma' = N$$

mit dem Kerne K; ich führe einen unbestimmten Parameter λ ein und betrachte die allgemeine Gleichung

$$2\pi\varphi + \lambda\int K\varphi'\,d\sigma' = N.$$

Das erste Glied hängt von zwei Unbestimmten λ und ω ab. Wenn man die gewöhnliche Fredholmsche Methode anwendet, so erhält man die Lösung unserer obigen Integralgleichung in Gestalt einer meromorphen Funktion von λ, deren Nenner eine ganze Funktion von λ ist. Man kann nun zeigen, dass dieser Nenner auch eine ganze Funktion von ω wird, sodass also auch hier unsere ausgezeichneten Werte ω sich als Nullstellen einer ganzen transzendenten Funktion ergeben.

Wir wollen aber jetz das grössere Problem der Beugung ausführlicher behandeln.

Nehmen wir zu diesem Ende an, dass der innere Leiter eine Kugel, die Erdkugel, vom Radius ρ ist und das aüssere Feld (dessen normale Komponente N bedeutet) von einem punktförmigen Erreger S herrührt, dessen Entfernung D vom Mittelpunkt O der Erde nur sehr wenig grösser ist als der Radius ρ. Wir wählen die Richtung OS zur z-Achse und bezeichnen die Abweichung der Richtung OM, in der M einen variabeln Punkt der Kugeloberfläche bedeutet, von OS mit φ. Die Bedeutung von ϑ, ξ, φ'; r, r' ist aus der Figur ersichtlich:

$$\begin{aligned} OM = OM' = OM_1 &= \rho, \\ OS &= D, \\ SM &= r, \\ SM' &= r'. \end{aligned}$$

Der Wert der normalen Ableitung N des äusseren Feldes berechnet sich im Punkte M, wie leicht zu sehen, nach der Formel

$$4\pi N = e^{i\omega(t-r)}\left[\frac{i\omega}{r}\sin\vartheta\sin\xi + \left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{i\omega r^3}\right)(\sin\vartheta\sin\xi + 2\cos\vartheta\cos\xi)\right].$$

Da ω eine sehr grosse Zahl ist — denn die Länge der Hertzschen Wellen ist klein gegenüber dem Radius der Erde — genügt es meistens, in dieser Formel nur das erste Glied, das in der eckigen Klammer auftritt, beizubehalten.

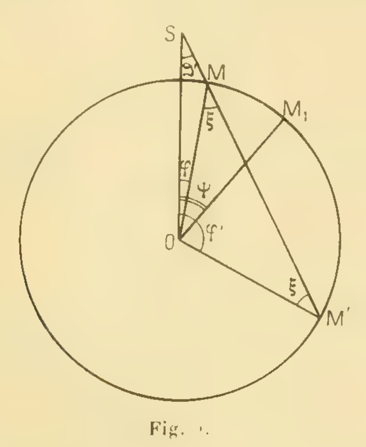


Fig. ·.

Im vorhergehenden haben wir die Gleichung der Hertzschen Wellen auf die Form

$$2\pi\mu = \int \mu' K\, d\sigma + N$$

gebracht und haben gezeigt, wie der Kern K berechnet werden kann. Entwickeln wir jetzt N und K nach Kugelfunktionen oder vielmehr, da unser Problem die Symmetrie eines Rotationskörpers mit der Achse OS besitzt, nach Legendreschen Polynomen P_n, so gewinnen wir aus dieser Integralgleichung die elektrische Flächendichte μ gleichfalls unter der Form einer nach den Funktionen P_n fortschreitenden Reihe. Es gilt zunächst

$$N = \Sigma K_n P_n; \qquad \int_0^\pi P_n N \sin\varphi\, d\varphi = \frac{2K_n}{2n+1}.$$

K_n ist von der Form

$$\frac{A_n J_n(\omega\rho)}{\rho^2},$$

wo A_n eine nur von n, nicht aber von ρ abhängige Zahl ist, und J_n eine mit der Besselschen verwandte Funktion bedeutet.

Wir verstehen nämlich unter $J_n(x)$ die in der Umgebung von $x = 0$ holomorphe Lösung der Gleichung

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + y\left(1 - \frac{n(n+1)}{x^2}\right) = 0,$$

und $I_n(x)$ sei dasjenige Integral derselben Gleichung, welches sich für grosse positive Werte von x angenähert wie e^{-ix} verhält. Da J_n, I_n von einander unabhängig sind, können wir ausserdem dafür sorgen, dass

$$I'_n J_n - J'_n I_n = 1$$

ist, wenn unter J'_n, I'_n die Ableitungen von J_n, I_n verstanden werden.

Die Lösung unserer Integralgleichung lautet jetzt

$$\mu = A \sum \frac{K_n P_n(\cos\varphi)}{I'_n(\omega\rho) J_n(\omega\rho)}.$$

Da aber auch der Ausdruck von K_n im Zähler $J_n(\omega\rho)$ als Faktor enthält, und sich infolgedessen dieser Term $J_n(\omega\rho)$ heraushebt, ist

$$I'_n(\omega\rho) = 0$$

die für die *Eigenschwingungen* charakteristische Gleichung.

Um zu übersichtlichen Resultaten zu gelangen, benutzen wir angenäherte Formeln. Diese beruhen darauf, dass ω sehr gross, andererseits aber $\frac{D}{\rho} - 1$ sehr klein ist. Wir stützen uns auf die folgende Näherungsformel

$$\int \eta e^{i\omega\theta}\, dx = \eta e^{i\theta} \sqrt{\frac{2\pi}{\omega\theta''}}\, e^{\pm\frac{i\pi}{4}},$$

θ, η sind gegebene Funktionen von x, ω eine sehr gross Zahl. θ'' bedeutet die zweite Ableitung von θ, und auf der rechten Seite ist als Argument ein solcher Wert einzusetzen, für den θ ein Maximum oder Minimum besitzt; je nachdem der eine oder der andere Fall vorliegt, ist in dem Faktor $e^{\pm\frac{i\pi}{4}}$ das Zeichen $+$ oder das Zeichen $-$ zu nehmen. Hat θ in dem Intervall, über welches zu integrieren ist, mehrere Maxima oder Minima, so ist der Ausdruck rechts durch eine Summe analog gebildeter Terme zu ersetzen.

Durch Anwendung dieser Formel bekommen wir für die Legendreschen

Polynome $P_n(\cos\varphi)$ die folgenden, für grosse n gültigen angenäherten Ausdrücke :

$$P_n = 2\sqrt{\frac{2\pi}{n\sin\varphi}}\cos\left(n\varphi + \frac{\varphi}{2} - \frac{\pi}{4}\right).$$

Aus ihnen folgt für die K_n, falls $n < \omega\rho$,

$$K_n = \frac{2n+1}{8r\sqrt{n}}\left[e^{i\alpha} + e^{i\alpha'}\right]\frac{i\omega\sin\vartheta\sin\xi}{\sqrt{D\rho\cos\vartheta\cos\xi}}\sqrt{\frac{\sin\vartheta}{\omega\rho}}.$$

Dabei ist

$$\alpha = n\varphi - \omega r + \frac{\xi}{2} - \frac{\pi}{4},$$

$$\alpha' = n\varphi' - \omega r' + \frac{\xi}{2}$$

gesetzt, und für ξ, ϑ, φ, φ', r, r' sind die aus der Figur zu entnehmenden Werte einzusetzen, für welche

$$\sin\xi = \frac{n}{\omega\rho} \qquad \left(\xi < \frac{\pi}{2}\right)$$

wird. Die gleiche Näherungsformel gilt auch für $n > \omega\rho$, falls in der eckigen Klammer $e^{i\alpha} + e^{i\alpha'}$ durch $e^{i\alpha}$ oder $e^{i\alpha'}$ ersetzt wird; die Diskussion darüber, welches der beiden Glieder beizubehalten ist, will ich hier nicht geben.

Auch um $I'_n J_n$ angenähert zu berechnen, müssen wir die beiden Fälle $n < \omega\rho$ und $n > \omega\rho$ unterscheiden. Im ersten Falle ist

$$I'_n J_n = e^{i\frac{\alpha-\alpha'}{2}}\cos\frac{\alpha-\alpha'}{2},$$

im zweiten

$$I'_n J_n = \frac{1}{2}$$

zu setzen. Daraus ergibt sich, dass sowohl für $n < \omega\rho$ als auch für $n > \omega\rho$ und grosse n

$$\frac{K_n}{I'_n J_n} = \frac{\sqrt{n}}{2r}e^{i\alpha}\frac{i\sqrt{\omega}\sin\xi(\sin\vartheta)^{\frac{1}{2}}}{\rho\sqrt{D\cos\vartheta\cos\xi}} \quad (1)$$

---

(1) Der Ausdruck von μ kann auch auf eine einfachere Form zurückgeführt werden, nämlich

$$\mu = \frac{-i}{4\pi\omega^2\rho^2 D^2}\sum n(n+1)(2n+1)\frac{I_n(\omega D)}{I'_n(\omega\rho)}P_n(\cos\varphi)$$

und diese Formel ist nicht eine angenäherte, sondern eine strenge.

gilt. In der Summe, durch welche wir μ dargestellt haben, geben demnach diejenigen Glieder, für welche nahezu $n = \omega$ ist, den Ausschlag. Für diese gilt näherungsweise

$$\xi = \frac{\pi}{2} \qquad \text{und} \qquad r = \sqrt{2\rho D}.$$

Da ferner wegen der Kleinheit von $\frac{D}{\rho} - 1$ der Winkel φ immer nahezu $= 0$ bleibt, variiert α als Funktion von n nur sehr wenig, wenn n auf die dem Werte $n = \omega$ benachbarten ganzen Zahlen beschränkt wird. Wir dürfen also, wenn wir noch die Längeneinheit so gewählt denken, dass $\rho = 1$ ist, schreiben

$$\mu = C \sum \frac{\sqrt[4]{\omega}\,\sin\xi\,(\sin\Im)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\cos\Im\cos\xi}}\,\frac{1}{\sqrt{\sin\psi}}\left(\cos n\psi + \frac{\psi}{2} - \frac{\pi}{4}\right).$$

Dabei ist μ der Wert der elektrischen Oberflächendichte im Punkte M_1 (s. die Figur).

Aus

$$\sin\xi = \frac{n}{\omega}, \qquad \sin\Im = \frac{n}{\omega D};$$

$$\cos\xi = \sqrt{1 - \frac{n^2}{\omega^2}}, \qquad \cos\Im = \sqrt{1 - \frac{n^2}{D^2\omega^2}}$$

bekommen wir

$$\frac{\sin\xi\,(\sin\Im)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\cos\Im\cos\xi}} = \frac{\frac{n}{\omega}\left(\frac{n}{\omega D}\right)^{\frac{3}{2}}\sqrt{D}}{\sqrt[4]{\left(1+\frac{n}{\omega}\right)\left(1+\frac{n}{D\omega}\right)}}\;\frac{\sqrt[4]{\omega}}{\sqrt[4]{\omega - n}\,\sqrt[4]{\omega(D-1)}}\;\frac{1}{\sqrt[4]{1+\frac{\omega - n}{\omega(D-1)}}},$$

sodass in der Nähe von $n = \omega$ der linke Ausdruck von derselben Grössenordnung ist wie

$$\frac{\sqrt[4]{\omega}}{\sqrt[4]{D-1}}\;\frac{1}{\sqrt[4]{n-\omega}}.$$

Führen wir diese Annäherung in unsere Formel für μ ein und ersetzen $\cos\left(n\psi + \frac{\psi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$ zunächst durch $e^{i\left(n\psi + \frac{\psi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}$, so kommen wir auf die Reihe

$$\frac{\omega^{\frac{3}{4}}\,e^{i\left(\frac{\psi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}}{\sqrt{\sin\psi}\,\sqrt[4]{D-1}} \sum_{(n)} \frac{e^{in\psi}}{\sqrt[4]{n-\omega}}.$$

Schreiben wir

$$S = \sum_{(n)} \frac{e^{in\psi}}{\sqrt[4]{n-\omega}},$$

so können wir

$$\int_{\nu}^{\nu+1} S e^{-i\omega\psi}\,d\omega \qquad (\nu \text{ ganzzahlig})$$

als einen Mittelwert der Reihe S betrachten, und ich will S durch diesen Mittelwert ersetzen. Ein solches Verfahren ist gewiss berechtigt, wenn es uns nur daran liegt, die Grössenordnung von S festzustellen, umsomehr als in Wirklichkeit von einer Antenne nicht bloss Schwingungen einer einzigen Wellenlänge, sondern ein ganzes kontinuierliches Spektrum von Schwingungen ausgeht. Wir erhalten

$$\int_{\nu}^{\nu+1} S e^{-i\omega\psi}\,d\omega = \sum_{n} \int_{\nu}^{\nu+1} \frac{e^{i(n-\omega)\psi}}{\sqrt{n-\omega}}\,d\omega$$

$$= \int_{-\omega}^{\infty} \frac{e^{iq\psi}}{\sqrt{q}}\,dq,$$

und da ω sehr gross ist, wird dieses Integral mit $\int_{0}^{\infty} \frac{e^{iq\psi}}{\sqrt{q}}\,dq$ im wesentlichen übereinstimmen.

Auf ähnliche Weise zeigt man, dass der Mittelwert von

$$\sum \frac{e^{in\psi}}{\sqrt{n-\omega}}$$

gegen den von S zu vernachlässigen ist. Damit gewinnen wir das Resultat, dass

$$\mu \text{ von der Grossenordnung } \frac{\sqrt{\omega}}{\sqrt{D-1}}$$

und also

$$\frac{\mu}{N} \text{ von der Grossenordnung } \frac{1}{\sqrt{\omega(D-1)}}$$

ist. Die Beugung ist daher um so grösser, je näher die Quelle S der Erdoberfläche gelegen ist und je länger die entsendeten Wellen sind. Auf diese Weise wird die zunächst staunenerregende Tatsache verständlich, dass es mit Hilfe der in der drahtlosen Telegraphie verwendeten Hertzschen Wellen gelingt, vom europäischen Kontinent z. B. bis nach Amerika zu telegraphieren.

Wenn man nicht den mittleren Wert der Reihe betrachten will, welcher von einen Integral dargestellt wird, sondern den wirklichen Wert dieser Reihe, so

hat man eine Diskussion durchzuführen, welche auf einem wohlbekannten Abelschen Satz beruht, und deren Resultate etwas komplizierter, aber sonst ganz ähnlich den vorliegenden sind.

Note. — Je me suis aperçu que les dernières conclusions doivent être modifiées. Les formules approchées dont j'ai fait usage ne sont plus vraies lorsque n est très voisin de $\omega\rho$. Elles doivent être alors remplacées par d'autres, où figure une transcendante entière satisfaisant à l'équation différentielle

$$y'' = xy.$$

Mais les termes qui doivent être ainsi modifiés sont en petit nombre et j'avais cru d'abord que le résultat final n'en serait pas modifié. Un examen plus approfondi m'a montré qu'il n'en est rien. La somme des termes modifiés est comparable à celle des autres termes dont j'avais tenu compte et qui est donnée par la formule précédente; il en résulte une compensation presque complète de sorte que la valeur de μ donnée par les formules définitives est notablement plus petite que celle qui résulterait des formules précédentes.

LES ONDES HERTZIENNES

ET

L'ÉQUATION DE FREDHOLM

Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. 148, p. 1488-1490 (7 juin 1909).

Considérons un conducteur soumis à l'action d'un champ extérieur, et cherchons à mettre les équations du champ électromagnétique sous la forme d'une équation de Fredholm. Pour cela nous envisagerons un point x, y, z situé à l'intérieur du conducteur, très près de la surface et du côté interne, et nous écrirons qu'en ce point les deux composantes tangentielles de la force magnétique sont nulles. Désignons par $l, m, n, l_1, m_1, n_1, l_2, m_2, n_2$ les cosinus directeurs de la normale et des tangentes aux lignes de courbure à la surface du conducteur. Soient α la première composante de la force magnétique due au champ *intérieur*, c'est-à-dire au champ développé par le conducteur lui-même, α^* la composante correspondante due au champ extérieur, et enfin $\alpha + \alpha^*$ celle qui est due au champ total. Nos équations s'écriront

$$l_1(\alpha + \alpha^*) + m_1(\beta + \beta^*) + n_1(\gamma + \gamma^*) = 0$$

ou

(1) $$\Sigma l_1 \alpha = - \Sigma l_1 \alpha^*, \qquad \Sigma l_2 \alpha = - \Sigma l_2 \alpha^*.$$

Les seconds membres des équations (1) doivent être regardés comme connus, puisque le champ extérieur est connu. Quant aux premiers membres, ils peuvent être représentés par des potentiels retardés de simple et de double couche dont la densité dépend des courants de conduction qui règnent à la surface du conducteur. La première équation (1) nous donne ainsi, par

exemple, l'équation suivante, dont je vais expliquer la signification :

$$-\Sigma l_1 X^e = -2\pi \Sigma l_2 U - \int \Sigma k_1 U' \frac{d}{dn'} \frac{e^{-i\omega r}}{r} d\sigma'$$
$$+ \int \Sigma k'_1 U' \frac{e^{-i\omega r}}{r} d\sigma' - \int \nu' \cos\theta \frac{e^{-i\omega r}}{r} d\sigma'.$$

Nous désignons par $d\sigma'$ un élément de la surface du conducteur ayant pour centre de gravité le point x', y', z'; r est la distance des deux points x, y, z et x', y', z'.

Notre perturbation est regardée comme une perturbation périodique, amortie ou non, de telle façon que toutes nos fonctions puissent, par un artifice bien connu, être regardées comme proportionnelles à $e^{i\omega t}$. Dans ces conditions le potentiel retardé d'une masse égale à 1 placée au point $x', y' z'$ sera proportionnel à $\frac{e^{-i\omega r}}{r}$. Nous représentons par

$$U' d\sigma', \quad V' d\sigma', \quad W' d\sigma'$$

les composantes du courant de conduction qui traversent $d\sigma'$, de telle sorte que U', V', W' représentent les densités superficielles du courant en x', y', z'; U, V, W représentent les densités correspondantes en x, y, z.

On a d'ailleurs

$$\Sigma k_1 U' = k_1 U' + k_2 V' + k_3 W',$$
$$k_1 = m' n_1 - n' m_1, \qquad k'_1 = C'_1 l'_2 \Sigma l_1 l'_1 - C'_2 l'_1 \Sigma l_1 l'_2;$$

$l', m', n', \ldots$, sont les valeurs de $l, m, n, \ldots$, au point x', y', z'; C'_1 et C'_2 sont les deux courbures principales de la surface; k_2, k_3, k'_2, k'_3 se déduisent de k_1 et k'_1 par symétrie.

La dérivée $\frac{d}{dn'}$ est estimée suivant la normale à la surface au point $x', y' z'$. On définit ν par l'égalité

$$\int i(U\,dx + V\,dy + W\,dz) = \int \nu\,d\sigma,$$

où le premier membre est une intégrale simple étendue à une courbe fermée quelconque tracée sur la surface et où le second membre est une intégrale double étendue à l'aire limitée par cette courbe. Quand à ν', c'est la valeur de ν au point x', y', z'.

On a enfin

$$\cos\theta = \Sigma l_1 l'.$$

de sorte que θ est l'angle de la normale au point x', y', z', avec la tangente à la ligne de courbure en x, y, z. Telle est la signification de l'équation (2).

Si l'on pose

$$\Phi = \cos\theta \frac{e^{-i\omega r}}{r},$$

la dernière intégrale du second membre de (2) peut se transformer par intégration par parties et s'écrire

$$-\int \sum \frac{d\Phi}{dx'} U' d\sigma'.$$

Pour calculer les trois dérivées partielles de Φ, il faut compléter la définition de Φ qui n'est défini que sur la surface du conducteur; pour cela on conviendra que Φ doit conserver la même valeur tout le long d'une normale à cette surface.

L'équation (2) prend ainsi la forme

$$(3) \qquad -\Sigma l_1 \alpha^* = 2\pi \Sigma l_2 U + \int (K_1 U' + K_2 V' + K_3 W') d\sigma',$$

où K_1, K_2, K_3 qui jouent le rôle de noyaux sont des fonctions données de x, y, z, x', y', z'. La seconde équation (1), traitée de la même manière, nous donnerait une équation de même forme

$$(4) \qquad \Sigma l_2 \alpha^* = 2\pi \Sigma l_1 U + \int (K'_1 U' + K'_2 V' + K'_3 W') d\sigma'$$

et nous pouvons y adjoindre l'équation

$$(5) \qquad 0 = \Sigma l U,$$

qui signifie que le courant est superficiel.

Nous avons ainsi trois équations (3), (4), (5) avec les trois inconnues U, V, W, et qui ont la forme d'équations de Fredholm, avec cette particularité que dans la troisième les noyaux sont nuls.

Comme à l'aide de cette équation (5) on peut presque immédiatement éliminer l'une des trois inconnues, il n'y a en réalité que deux inconnues distinctes. On pourrait également prendre comme inconnues la quantité ν et la densité électrique superficielle; on retomberait ainsi sur des formules analogues à celles que j'ai obtenues pour certains cas moins généraux dans une Note antérieure.

SUR LA DIFFRACTION

DES

ONDES HERTZIENNES

Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. 149, p. 621-622 (18 octobre 1909).

Soient ρ le rayon de la Terre, D la distance de l'excitateur au centre de la Terre, φ l'angle sous lequel on voit du centre de la Terre la distance de l'excitateur au récepteur, $\frac{2\pi}{\omega}$ la longueur d'onde (écrite sous forme complexe); on trouve que l'amplitude de l'onde diffractée est proportionnelle à

$$\frac{1}{\omega^2 D^2 \rho^2} \sum n(n+1)(2n+1) \frac{I_n(\omega D)}{I'_n(\omega\rho)} P_n(\cos\varphi);$$

$P_n(\cos\varphi)$ est le polynome de Legendre; $I_n(\xi)$ est une des intégrales de l'équation linéaire

$$\frac{d^2 y}{d\xi^2} + y\left[1 - \frac{n(n+1)}{\xi^2}\right] = 0,$$

à savoir celle qui se réduit sensiblement à $e^{-i\xi}$ pour ξ très grand; I'_n est la dérivée de I_n par rapport à ξ.

Qu'arrive-t-il lorsque D est très peu différent de ρ? On peut trouver une expression approchée de la somme de cette série. Posons

$$F(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\left(tx - \frac{x^3}{3}\right)} dx,$$

de sorte que $F(t)$ satisfasse à l'équation linéaire

$$\frac{d^2 F}{dt^2} + tF = 0.$$

Soit t_0 la plus petite racine de l'équation

$$F'\left(t e^{\frac{2i\pi}{3}}\right) = 0,$$

F' étant la dérivée de F par rapport à t; ou plutôt celle de ces racines dont la partie imaginaire est négative et plus petite en valeur absolue que pour toutes les autres. Posons

$$\varepsilon_1 = \omega D - t_0 \left(\frac{\omega D}{2}\right)^{\frac{1}{3}};$$

la somme de notre série sera sensiblement proportionnelle à

$$\frac{e^{i\varepsilon_1 \varphi}}{\sqrt{\varepsilon_1 (1 - e^{-2i\varphi})}}.$$

Le module de l'exponentielle qui figure au numérateur est égal à $e^{-m\omega^{\frac{1}{3}}\varphi}$, où m est égal à la partie imaginaire de $-t_0$ multipliée par $\left(\frac{D}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$.

Cela nous indique avec quelle rapidité décroît l'onde diffractée avec la distance. Ces résultats ne concordent pas complètement avec ceux que j'ai annoncés dans une Note antérieure. J'expliquerai dans un Mémoire détaillé pourquoi les formules approchées dont j'ai fait usage dans cette Note deviennent insuffisantes.

SUR LA DIFFRACTION

DES

ONDES HERTZIENNES

Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, t. 29, p. 169-259 (1910).

La Lumière électrique (1), 2e série, t. 10, p. 355-362 (18 juin 1910) et p. 387-394 (25 juin 1910); t. 11, p. 7-12 (2 juillet 1910).

1. Équations générales du champ.

Le présent travail a un double but, l'application de la méthode de Fredholm aux questions relatives aux ondes hertziennes et l'étude de la diffraction de ces ondes. La pratique de la télégraphie sans fil a démontré que ces ondes, non seulement contournent des obstacles considérables, mais se propagent à de grandes distances malgré la courbure de la Terre. On a coutume de dire que

(1) Article raccourci avec l'introduction suivante :

1. Introduction.

Comment expliquer les effets extraordinaires de diffraction observés en télégraphie sans fil ? Les grandes longueurs d'onde peuvent-elles y suffire ? Je ne prétends pas résoudre ici la question complètement, il faudrait des calculs plus complets et surtout des mesures précises. Toutefois, les conclusions du présent travail seront dans le sens négatif; il est probable que la théorie brute ne peut rendre compte des faits.

Nous supposerons dans la suite que toutes nos fonctions sont de la forme

$$\textit{partie réelle } \mathrm{H}\, e^{i\omega t},$$

H étant indépendant du temps; tandis que ω est une constante dont la partie réelle définit la période et la partie imaginaire l'amortissement.

Nous supposerons, dans ce qui va suivre, que ω est réel. Cela paraîtra au premier abord injustifiable, puisque l'onde émise par l'excitateur est amortie. Mais en réalité nous n'aurions

ces effets extraordinaires de diffraction sont dus aux grandes longueurs d'onde employées et cela est exact, mais malgré ces grandes longueurs d'onde, le phénomène reste surprenant et mérite d'être étudié de plus près, car il reste permis de se demander si l'explication est suffisante, tant qu'un calcul plus précis n'a pas levé les derniers doutes.

J'emploierai les notations de Maxwell, mais avec quelques simplifications : 1° je choisirai les unités de façon que la vitesse de la lumière soit égale à 1 ; 2° je supposerai les milieux non magnétiques, de telle sorte que leur susceptibilité magnétique soit égale à 1, les effets de cette susceptibilité paraissant en tous

---

pas le droit de représenter l'onde amortie par une formule $e^{i\omega t}$, ω étant imaginaire; et en effet, cette onde amortie a un commencement; de sorte qu'il conviendrait d'égaler l'onde à une fonction discontinue $F(t)$, égale à 0 pour $t < 0$ par exemple et à $e^{i\omega t}$ pour $t > 0$. Cette fonction discontinue peut être développée en série de Fourier :

$$(1) \qquad F(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\alpha t}\varphi(\alpha)\,d\alpha,$$

où α est réel. Le coefficient $\varphi(\alpha)$ est donné par la formule

$$2\pi\varphi(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\alpha t}F(t)\,dt = \int_{0}^{\infty} e^{i(\omega-\alpha)t}\,dt = \frac{1}{i(\omega-\alpha)},$$

parce que pour $t = \infty$ l'expression $e^{i(\omega-\alpha)t}$ s'annule, parce que la partie imaginaire de ω est positive.

Par la formule (1), l'onde incidente $F(t)$ est décomposée en une infinité de composantes isochrones $e^{i\alpha t}\varphi(\alpha)\,d\alpha$, formant un spectre continu.

Nous devrons examiner séparément chacune de ces composantes, et pour chacune d'elles l'exposant $i\alpha t$ est purement imaginaire. C'est ce qui justifie notre hypothèse où nous traitons ω comme réel.

On remarquera que, pour $\alpha = 0$, $\varphi(\alpha)$ ne s'annule pas, mais se réduit à $\frac{1}{i\omega}$. Et cela a une grande importance. On explique en effet d'ordinaire la diffraction des ondes hertziennes en disant que la longueur d'onde est très grande, et l'on entend d'ordinaire par là la longueur d'onde calculée à l'aide de la partie réelle de ω et que nous appellerons λ. Mais, ainsi que nous venons de le voir, nous n'avons pas en réalité une longueur d'onde unique, mais un spectre continu, et dans ce spectre il y a des parties qui correspondent à des longueurs d'onde *beaucoup plus grandes* que λ. Ces parties ne sont pas d'une intensité négligeable puisque

$$\varphi(0) = \frac{1}{i\omega},$$

tandis qu'en posant $\omega = \omega_0 + i\omega_1$, et en prenant $\alpha = \omega_0$, on avait

$$\varphi(\omega_0) = \frac{1}{i\omega_1},$$

de telle sorte que $|\varphi(\omega_0)|$ et $|\varphi(0)|$ sont sensiblement du même ordre de grandeur.

Parmi les composantes de notre spectre, il y en a donc qui sont susceptibles de produire des effets de diffraction beaucoup plus grands que ceux qui correspondraient à la longueur λ. Et c'est déjà une première explication de la grandeur des effets constatés.

cas négligeables; 3° je supposerai que le pouvoir inducteur spécifique est partout égal à 1; car les seuls milieux que nous aurons à envisager sont l'air et les corps conducteurs; à l'intérieur de ces derniers corps les courants de conduction sont tellement prépondérants sur les courants de déplacement que l'on ne sait pas déterminer le pouvoir inducteur; et d'ailleurs, sauf dans une couche superficielle extrêmement mince, le champ est nul.

Nous désignerons donc par F, G, H les composantes du potentiel vecteur; par α, β, γ celles de la force magnétique; par f, g, h celles du déplacement électrique; par u, v, w celles du courant de *conduction*; par ψ le potentiel scalaire; par ρ la densité électrique, et nous aurons :

(1) $$\alpha = \frac{dH}{dy} - \frac{dG}{dz},$$

(2) $$4\pi f = -\frac{dF}{dt} - \frac{d\psi}{dx},$$

(3) $$4\pi\left(u + \frac{df}{dt}\right) = \frac{d\gamma}{dy} - \frac{d\beta}{dz},$$

(4) $$\frac{df}{dx} + \frac{dg}{dy} + \frac{dh}{dz} = \rho,$$

(5) $$\frac{d\alpha}{dx} + \frac{d\beta}{dy} + \frac{d\gamma}{dz} = 0.$$

Aux équations (1), (2), (3), il faut bien entendu adjoindre celles qu'on en déduit par symétrie.

On remarquera que toutes les quantités sont définies expérimentalement sauf le potentiel vecteur et le potentiel scalaire, et que les équations elles-mêmes ne suffisent pas pour définir complètement ces potentiels. Elles ne cesseront pas en effet d'être satisfaites, si l'on remplace F, G, H, ψ par

$$F + \frac{d\Phi}{dx}, \quad G + \frac{d\Phi}{dy}, \quad H + \frac{d\Phi}{dz}, \quad \psi - \frac{d\Phi}{dt},$$

Φ étant une fonction arbitraire.

Pour achever de définir ces potentiels, il faut donc se donner une équation complémentaire, c'est la suivante :

(6) $$\frac{dF}{dx} + \frac{dG}{dy} + \frac{dH}{dz} + \frac{d\psi}{dt} = 0.$$

On obtient ainsi les *potentiels* de Lorentz. On trouve alors les équations

suivantes :

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} 4\pi\rho &= \frac{d^2\psi}{dt^2} - \Delta\psi, \\ 4\pi u &= \frac{d^2 F}{dt^2} - \Delta F, \\ 4\pi\left(\frac{dw}{dy} - \frac{dv}{dz}\right) &= \frac{d^2\alpha}{dt^2} - \Delta\alpha; \end{aligned}\right.$$

ce qui permet de représenter ψ, F et α par des *potentiels retardés*, représentation sur laquelle nous reviendrons.

Nous emploierons généralement les potentiels de Lorentz; et, sauf avis contraire, ce sera toujours d'eux qu'il s'agira; cependant dans certains calculs, nous ferons usage d'autres solutions.

Nous allons encore écrire les équations de Maxwell dans un système quelconque de coordonnées curvilignes, procédé que M. Abraham a employé avec avantage. Soient x', y', z' les nouvelles coordonnées; nous supposerons que ces coordonnées soient orthogonales, et que l'élément d'arc ds est donné par l'équation :

$$ds^2 = a^2 dx'^2 + b^2 dy'^2 + c^2 dz'^2.$$

Si, par exemple, il s'agit des coordonnées polaires, de sorte que x' soit le rayon vecteur, y' la colatitude et z' la longitude, on aura :

$$a = 1, \qquad b = x', \qquad c = x' \sin y'.$$

Nous définirons F', G', H' par l'identité :

$$F'\,dx' + G'\,dy' + H'\,dz' = F\,dx + G\,dy + H\,dz$$

de telle sorte que les composantes du potentiel vecteur suivant les normales aux surfaces $x' =$ const., $y' =$ const., $z' =$ const. soient :

$$\frac{F'}{a}, \quad \frac{G'}{b}, \quad \frac{H'}{c}.$$

Nous définirons de la même manière f', g', h'; α', β', γ'; u', v', w', et nous prendrons

$$\psi = \psi', \qquad \rho\,dx\,dy\,dz = \rho'\,dx'\,dy'\,dz', \qquad \text{ou} \qquad \rho' = \frac{\rho}{abc}.$$

Nous trouverons ainsi les équations suivantes :

(1 *bis*) $$\alpha' = \frac{a}{bc}\left(\frac{dH'}{dy'} - \frac{dG'}{dz'}\right),$$

(2 *bis*) $$4\pi f' = -\frac{dF'}{dt} - \frac{d\psi'}{dx'},$$

(3 *bis*) $$4\pi\left(u' + \frac{df'}{dt}\right) = \frac{a}{bc}\left(\frac{d\gamma'}{dy'} - \frac{d\beta'}{dz'}\right),$$

(4 *bis*) $$\sum \frac{d}{dx'}\left(\frac{f' bc}{a}\right) = \rho',$$

(5 *bis*) $$\sum \frac{d}{dx'}\left(\frac{\alpha' bc}{a}\right) = 0.$$

Quand à l'équation (6), elle devient :

(6 *bis*) $$\sum \frac{d}{dx'}\left(\frac{F' bc}{a}\right) + \frac{1}{abc}\frac{d\psi'}{dt} = 0.$$

Vis-à-vis d'oscillations de très grandes fréquences, tout conducteur se comporte comme un conducteur parfait. Ce n'est là qu'une approximation, et dans une étude récente, M. Sommerfeld a cherché à se rendre compte de l'écart entre cette approximation et la réalité de la pratique. Nous nous contenterons néanmoins de cette première approximation, et nous regarderons tous nos conducteurs comme parfaits, d'où les conséquences suivantes :

1° A l'intérieur du conducteur le champ électrique est nul :

$$f = g = h = 0.$$

2° On trouve aisément :

$$\frac{d\alpha}{dt} = 4\pi\left(\frac{dh}{dy} - \frac{dg}{dz}\right).$$

Donc à l'intérieur du conducteur $\frac{d\alpha}{dt}$ est nul, c'est-à-dire que, si l'on part du repos, le champ magnétique est nul.

3° Les courants de conduction et l'électricité libre ρ sont localisés à la surface des conducteurs.

4° L'examen des équations montre que les composantes tangentielles de la force électrique et la composante normale de la force magnétique sont continues. Prenons en effet pour axe des z la normale à la surface du conducteur. Nos quantités et leurs dérivées par rapport à x et à y seront finies; il ne

peut y avoir doute que pour les dérivées par rapport à z. Or on trouve :

$$\frac{dg}{dz} = \frac{dh}{dy} + \frac{1}{4\pi}\frac{d\alpha}{dt}, \qquad \frac{df}{dz} = \frac{dh}{dx} + \frac{1}{4\pi}\frac{d\beta}{dt}, \qquad \frac{d\gamma}{dz} = -\frac{d\alpha}{dx} - \frac{d\beta}{dy},$$

ce qui montre que $\frac{dg}{dz}$, $\frac{df}{dz}$, $\frac{d\gamma}{dz}$ sont finies, c'est-à-dire que f, g, γ sont continues.

C. Q. F. D.

Donc à la surface du conducteur, et du côté extérieur, les lignes de force électrique aboutissent normalement à la surface, tandis que les lignes de force magnétique sont tangentes à la surface. Pour voir que la première condition entraîne la seconde, il suffit de se rappeler l'équation

$$\frac{d\gamma}{dt} = 4\pi\left(\frac{dg}{dx} - \frac{df}{dy}\right).$$

5° Considérons encore une normale à la surface, prenons-la pour axe des z, et considérons les parties de cette normale très voisines de son pied ; en ces points on aura, d'après ce qui précède,

$$f = g = 0,$$

d'où

$$\frac{df}{dx} + \frac{dg}{dy} + \frac{dh}{dz} = \frac{dh}{dz} = \rho,$$

ou, en intégrant et remarquant qu'à l'intérieur h est nul, et étendant l'intégration à toute l'étendue de la couche superficielle où il y a de l'électricité libre :

$$h = \int \rho\, dz.$$

Cette intégrale représente la densité superficielle de l'électricité libre, tandis que ρ représente la densité de volume. Cette densité superficielle est donc égale au déplacement électrique en un point très voisin de la surface du côté externe.

6° Considérons l'équation

$$4\pi\left(u + \frac{df}{dt}\right) = \frac{d\gamma}{dy} - \frac{d\beta}{dz}$$

et observons que dans la couche superficielle $\frac{df}{dt}$ et $\frac{d\gamma}{dy}$ sont finis, tandis que u

et $\frac{d\beta}{dz}$ sont très grands. Intégrons comme dans le cas précédent, et remarquons qu'à l'intérieur β est nul, il viendra :

$$4\pi \int u\,dz + 4\pi \int \frac{df}{dt}\,dz = \int \frac{d\gamma}{dy}\,dz - \beta.$$

Le second terme du premier membre et le premier du second sont négligeables ; et il reste :

$$\beta = -4\pi \int u\,dz$$

et de même :

$$\alpha = 4\pi \int v\,dz.$$

Or $\int u\,dz$, $\int v\,dz$ représentent la densité superficielle des courants de conduction, tandis que u et v en représentent la densité de volume. Donc la force magnétique à la surface, du côté externe, est perpendiculaire au courant de conduction, et lui est proportionnelle.

Nous retrouverons ces deux derniers résultats en partant des potentiels retardés.

7° Le courant de conduction étant superficiel, le vecteur u, v, w est tangent à la surface.

2. Les potentiels retardés.

Soit $\varphi(x, y, z, t)$ une fonction quelconque. Considérons les deux points x, y, z (point attiré) et x', y', z' (point attirant) ; soit

$$r = \sqrt{\Sigma(x - x')^2}$$

leur distance. L'intégrale

$$(1) \qquad \iiint \varphi(x', y', z', t - r)\frac{1}{r}\,dx'\,dy'\,dz',$$

étendue à tout l'espace, s'appellera le *potentiel retardé* de φ et pourra être représentée par la notation

$$V = P(\varphi).$$

Elle satisfera à l'équation suivante (analogue à celle de Poisson) :

$$\Delta V - \frac{d^2 V}{dt^2} = -4\pi\varphi.$$

Si alors on se reporte aux équations (7) du paragraphe précédent, on voit que ψ, F, G, H, α, β, γ, sont respectivement les potentiels retardés de

$$(2)\qquad \begin{cases} \rho, \quad u, \quad v, \quad w, \\ \dfrac{dw}{dy} - \dfrac{dv}{dz}, \quad \dfrac{du}{dz} - \dfrac{dw}{dx}, \quad \dfrac{dv}{dx} - \dfrac{du}{dy}. \end{cases}$$

Les oscillations auxquelles nous aurons affaire seront toujours, soit des oscillations pendulaires simples, soit des oscillations pendulaires amorties. Cela nous permet de supposer que toutes nos fonctions sont proportionnelles à une exponentielle $e^{i\omega t}$. A la vérité, nous obtenons ainsi une solution imaginaire de nos équations, et cette solution ne saurait directement convenir; mais il est aisé, par un procédé bien connu, d'en déduire une solution réelle correspondant au cas de la nature. Il suffira de conserver la partie réelle de cette solution imaginaire, qui sera également une solution de nos équations. Dans ces conditions, si la solution imaginaire se présente sous la forme $Ae^{i\omega t}$, la partie réelle de ω définit la période, la partie imaginaire de ω définit l'amortissement, le module de A représente l'amplitude de la solution réelle, et son argument en représente la phase.

Si alors φ est proportionnel à $e^{i\omega t}$, l'intégrale (1) peut se mettre sous une nouvelle forme. Soit $d\tau' = dx'\,dy'\,dz'$ l'élément de volume qui a son centre de gravité au point attirant. Soit

$$\varphi' = \varphi(x', y', z', t).$$

On aura :

$$\varphi(x', y', z', t - r) = \varphi' e^{-i\omega r}.$$

Notre intégrale deviendra alors :

$$(3)\qquad P(\varphi) = \int \varphi' \frac{e^{-i\omega r}}{r}\, d\tau'.$$

C'est alors un potentiel analogue au potentiel newtonien, mais avec une loi d'attraction un peu différente. J'observerai que ce potentiel possède les propriétés essentielles du potentiel newtonien, en ce qui concerne la continuité. Si en effet j'envisage la différence

$$\frac{e^{-i\omega r}}{r} - \frac{1}{r}$$

des deux expressions, correspondant aux deux sortes de potentiels, cette différence reste finie pour $r = 0$.

Mais nous avons encore à tenir compte d'une autre circonstance. Les quantités (2) sont nulles, sauf dans une couche extrêmement mince à la surface des conducteurs.

L'intégrale (3), qui est un potentiel de volume, va donc se transformer en un potentiel de surface.

Désignons par

$$\mu, \quad U, \quad V, \quad W$$

les densités *superficielles* de l'électricité et du courant de conduction. On a alors :

$$\mu = \int \rho \, dz, \qquad U = \int u \, dz$$

les intégrales du second membre étant celles qui ont été envisagées à la fin du paragraphe précédent.

Nous pouvons alors écrire :

$$\psi = \int \mu' \frac{e^{-i\omega r}}{r} d\sigma', \qquad F = \int U' \frac{e^{-i\omega r}}{r} d\sigma',$$

où $d\sigma'$ est l'élément de surface du conducteur ayant pour centre le point attirant, tandis que μ' et U' sont les valeurs de μ et de U en ce point attirant. Les potentiels scalaire et vecteur se présentent ainsi comme des potentiels de simple couche; ils sont donc continus, tandis que leurs dérivées ne le sont pas.

En ce qui concerne la force magnétique, la chose est un peu plus compliquée. Nous pouvons observer que le courant de conduction étant superficiel, les composantes U, V, W ne sont pas indépendantes; elles sont liées par la relation

$$lU + mV + nW = 0,$$

l, m, n désignant les cosinus directeurs de la normale à la surface du conducteur.

Considérons maintenant le vecteur dont les composantes sont :

$$A = \frac{dw}{dy} - \frac{dv}{dz}, \qquad B = \frac{du}{dz} - \frac{dw}{dx}, \qquad C = \frac{dv}{dx} - \frac{du}{dy};$$

ce vecteur est nul en dehors de la couche superficielle; il est très grand à l'intérieur de cette couche.

Mais il y a une distinction à faire, la composante normale de ce vecteur est très grande du premier ordre si nous considérons l'épaisseur de la couche comme très petite du premier ordre, tandis que les composantes tangentielles

sont très grandes du second ordre. Il en résulte que notre potentiel se décompose en un potentiel de double couche et un potentiel de simple couche; c'est ce que nous allons examiner de plus près.

Notre équation peut s'écrire :

$$\alpha = \int A'\theta\, d\tau',$$

où A' est la valeur de A au point attirant et θ la fonction $\frac{e^{-i\omega r}}{r}\cdot$ Soit $d\sigma'$ un élément de la surface du conducteur, une normale au conducteur, ζ' la distance du point attirant à cette surface comptée sur cette normale. Comme ζ' est toujours très petit, nous pourrons supposer que la section droite d'un faisceau très délié de normales est égale à $k\, d\sigma'$, où $k = 1 + \zeta'(c_1 + c_2)$, c_1 et c_2 étant les deux courbures principales de la surface, de sorte que

$$d\tau' = k\, d\sigma'\, d\zeta.$$

D'autre part, nous pourrons développer θ suivant les puissances de ζ' et négliger ζ'^2, ce qui donne :

$$\theta = \theta_0 + \zeta'\frac{d\theta_0}{d\zeta'}$$

et enfin, toujours avec la même approximation,

$$(4) \qquad \alpha = \int\left(\int A'\, d\zeta'\right)\theta_0\, k\, d\sigma' + \int\left(\int A'\zeta'\, d\zeta'\right)\frac{d\theta_0}{d\zeta'}\, d\sigma'\cdot$$

(et en effet dans le second terme qui est très petit, k peut être remplacé par sa valeur approchée qui est 1).

Cette formule nous apprend que α est la somme de deux potentiels : le premier de simple couche, dont la densité superficielle est $\int kA'\, d\zeta'$; et le second de double couche, dont la densité superficielle est $\int A'\zeta'\, d\zeta'$.

Il reste à calculer ces densités, que j'écrirai, en supprimant les accents, $\int kA\, d\zeta$, $\int A\zeta\, d\zeta$, en les rapportant ainsi au point x, y, z; nous aurons aussi à calculer les quantités correspondantes $\int kB\, d\zeta$, ... relatives à β et γ.

Occupons-nous d'abord du potentiel de simple couche, et par conséquent cherchons à évaluer en un point donné de la surface le vecteur

$$(5) \qquad \int kA\, d\zeta, \quad \int kB\, d\zeta, \quad \int kC\, d\zeta.$$

Supposons pour un instant que nous ayons pris pour axes des x et des y les tangentes aux lignes de courbure et pour axe des z la normale au point considéré, de telle sorte que $d\zeta = dz$ tout le long de la normale considérée. Nous trouverons d'abord :

$$\int k\,C\,d\zeta = \int C\,d\zeta = \int \left(\frac{dv}{dx} - \frac{du}{dy}\right) dz = \frac{d}{dx}\int v\,dz - \frac{d}{dy}\int u\,dz = \frac{dV}{dx} - \frac{dU}{dy}.$$

En effet, on a au point considéré

$$\int v\,dz = \int v\,d\zeta = V;$$

en est-il encore de même en un point infiniment voisin, ainsi qu'il est nécessaire pour qu'on ait le droit de différentier par rapport à x? On a $d\zeta = dz\cos\varepsilon$, ε étant l'angle des deux normales ; cet angle étant très petit, on a encore $d\zeta = dz$ à des infiniment petits près du second ordre. Les valeurs de v en deux points correspondants diffèrent très peu, la formule subsiste. Les dérivées prises par rapport à x et à y sont très grandes seulement du premier ordre, les dérivées par rapport à z sont du second ordre. Cela, à cause de la petitesse de ζ, nous permet de faire $k = 1$, dans tous les termes qui ne contiennent pas de dérivée par rapport à z.

Comme U, V, W n'existent qu'à la surface du conducteur, leurs dérivées sont prises en les supposant exprimées en fonctions de x et de y, regardées comme variables indépendantes, tandis que z est regardée comme une fonction de x et de y définie par l'équation de la surface du conducteur. Si l'on veut une définition indépendante du choix des axes, j'écrirai l'égalité

$$\int (U\,dx + V\,dy + W\,dz) = \int \nu\,d\sigma.$$

La première intégrale est étendue à une courbe fermée quelconque tracée sur la surface du conducteur, et la seconde à tous les éléments d'aire $d\sigma$ de la portion de cette surface limitée par cette courbe ; cette équation définit la quantité ν en chaque point de la surface. On voit alors que la composante du vecteur (5) normale à la surface est égale à ν.

Passons aux composantes tangentielles et prenons d'abord :

$$\int k\,A\,d\zeta = \int k\,A\,dz = \int \frac{dw}{dy}\,dz - \int k\frac{dv}{dz}\,dz = \int \frac{dw}{dy}\,dz - \int \frac{dv}{dz}\,dz - (c_1 + c_2)\int \frac{dv}{dz}\,z\,dz.$$

La seconde intégrale du troisième membre est nulle, et en effet l'intégrale indéfinie se réduit à v et s'annule aux deux limites, c'est-à-dire en dehors de la couche superficielle.

Quant à la première, elle se réduit à $\frac{dW}{dy}$ en vertu du même raisonnement que plus haut; mais on a trouvé plus haut

$$lU + mV + nW = 0$$

et au point considéré on a

$$l = m = W = 0, \qquad n = 1.$$

Si nous différentions cette équation par rapport à y, puis, qu'après la différentiation, nous fassions $l = m = W = 0$, $n = 1$, il reste :

$$\frac{dW}{dy} = -U\frac{dl}{dy} - V\frac{dm}{dy}.$$

Il reste donc pour les composantes cherchées :

$$\int kA\,d\zeta = -U\frac{dl}{dy} - V\frac{dm}{dy} - (c_1 + c_2)\int \frac{dv}{dz} z\,dz,$$

$$\int kB\,d\zeta = U\frac{dl}{dx} + V\frac{dm}{dx} + (c_1 + c_2)\int \frac{du}{dz} z\,dz.$$

Nous trouverons plus loin

$$\int \frac{dv}{dz} z\,dz = -V,$$

et nous avons d'ailleurs

$$\frac{dl}{dy} = 0, \qquad \frac{dm}{dy} = c_2,$$

il restera donc

$$\int kA\,d\zeta = c_1 V,$$

et de même

$$\int kB\,d\zeta = -c_2 U.$$

Avec des axes quelconques, nous trouverons pour la densité de la simple couche qui figure dans l'équation (4) :

$$h_1 U + h_2 V + h_3 W + h_4 \nu,$$

les h étant des coefficients dépendant, en chaque point de la surface, des deux

courbures principales et de l'orientation de la normale et des tangentes aux lignes de courbure. Si, en effet,

$$l_1, \quad m_1, \quad n_1; \qquad l_2, \quad m_2, \quad n_2; \qquad l, \quad m, \quad n$$

sont les cosinus directeurs des deux tangentes aux lignes de courbure et de la normale, on aura :

$$\begin{aligned} h_1 &= l_1 l_2 (c_1 - c_2), \\ h_2 &= c_1 l_1 m_2 - c_2 l_2 m_1, \\ h_3 &= c_1 l_1 n_2 - c_2 l_2 n_1, \\ h_4 &= l. \end{aligned}$$

On voit que ces coefficients restent finis partout, si les courbures restent finies. On pourrait éliminer l'une des trois quantités U, V, W de cette expression, à l'aide de l'équation $l\mathrm{U} + m\mathrm{V} + n\mathrm{W} = 0$.

Passons au potentiel de double couche, c'est-à-dire au vecteur :

$$\int \mathrm{A}\zeta\, d\zeta, \quad \int \mathrm{B}\zeta\, d\zeta, \quad \int \mathrm{C}\zeta\, d\zeta.$$

Prenons encore la normale pour axe des z; il viendra :

$$\int \mathrm{A}\zeta\, d\zeta = \int \mathrm{A}\, z\, dz = \int \frac{dw}{dy} z\, dz - \int \frac{dv}{dz} z\, dz.$$

La première intégrale du troisième membre est négligeable à cause de la petitesse de z dans la couche superficielle; pour la seconde (qu'on ne peut plus négliger parce qu'il y figure une dérivée prise par rapport à z) on trouve, en intégrant par parties,

$$-\int \frac{dv}{dz} z\, dz = \int v\, dz = \mathrm{V}.$$

On trouverait de même :

$$\int \mathrm{B}\zeta\, d\zeta = -\mathrm{U}, \qquad \int \mathrm{C}\zeta\, d\zeta = \int \frac{dv}{dx} z\, dz - \int \frac{du}{dy} z\, dz = 0.$$

Les trois composantes de notre vecteur sont donc

$$(6) \qquad \mathrm{V}, \quad -\mathrm{U}, \quad 0.$$

Et, avec des axes quelconques, la densité de la double couche qui figure dans l'équation (4) est

$$n\mathrm{V} - m\mathrm{W}.$$

Géométriquement, le vecteur (6) est tangent à la surface du conducteur et perpendiculaire au courant.

On sait que le potentiel d'une double couche présente une discontinuité sur la surface du conducteur, tandis que sa dérivée normale est continue; au contraire le potentiel d'une simple couche est continu, et sa dérivée normale discontinue.

Il est aisé d'estimer la valeur de ces discontinuités.

Le champ magnétique étant nul à l'intérieur, cela nous permet d'évaluer ce champ pour des points très voisins de la surface mais du côté externe. En ce qui concerne d'abord le champ lui-même, c'est-à-dire α, β, γ, il suffira d'envisager le potentiel de double couche; α, β, γ seront égaux, au facteur 4π près, aux densités correspondantes de la double couche. Si donc on prend pour axe des z la normale au point considéré, on aura :

$$\alpha = 4\pi V, \qquad \beta = -4\pi U, \qquad \gamma = 0,$$

résultat déjà obtenu au paragraphe précédent.

Considérons maintenant les dérivées normales de α, β, γ, c'est-à-dire $\frac{d\alpha}{dz}$, $\frac{d\beta}{dz}$, $\frac{d\gamma}{dz}$; elles seront égales, au facteur 4π près, aux densités correspondantes de la *simple* couche, d'où

$$\frac{d\alpha}{dz} = -4\pi c_1 V, \qquad \frac{d\beta}{dz} = 4\pi c_2 U, \qquad \frac{d\gamma}{dz} = -4\pi\nu,$$

et on a en effet :

$$\frac{d\alpha}{dz} = \frac{d\gamma}{dx}, \qquad \frac{d\beta}{dz} = \frac{d\gamma}{dy},$$

parce que les composantes tangentielles f et g sont nulles à la surface. Or on a

$$l\alpha + m\beta + n\gamma = 0,$$

parce que, à la surface, la force magnétique est tangentielle; d'où, en différentiant et remarquant qu'au point considéré $l = m = \gamma = 0$, $n = 1$:

$$\frac{d\gamma}{dx} = -\alpha\frac{dl}{dx} - \beta\frac{dm}{dx}, \qquad \frac{d\gamma}{dy} = -\alpha\frac{dl}{dy} - \beta\frac{dm}{dy},$$

ou

$$\frac{d\gamma}{dx} = -\alpha c_1, \qquad \frac{d\gamma}{dy} = -\beta c_2;$$

d'où enfin, en se rappelant les expressions de α et β,

$$\frac{d\alpha}{dz} = -4\pi c_1 V, \qquad \frac{d\beta}{dz} = 4\pi c_1 U.$$

On trouve, d'autre part,

$$\frac{d\gamma}{dz} = -\frac{d\alpha}{dx} - \frac{d\beta}{dy}.$$

Or nous avons à la surface du conducteur, en un point quelconque,

$$\alpha = 4\pi(nV - mW),$$

d'où, en différentiant,

$$\frac{d\alpha}{dx} = 4\pi\left(V\frac{dn}{dx} + n\frac{dV}{dx} - m\frac{dW}{dx} - W\frac{dm}{dx}\right).$$

Mais au point considéré :

$$\frac{dn}{dx} = m = W = 0, \qquad n = 1,$$

d'où

$$\frac{d\alpha}{dx} = 4\pi\frac{dV}{dx};$$

et de même :

$$\frac{d\beta}{dy} = -4\pi\frac{dU}{dy}.$$

Il reste donc

$$\frac{d\gamma}{dz} = -4\pi\left(\frac{dV}{dx} - \frac{dU}{dy}\right) = -4\pi\nu.$$

C. Q. F. D.

Passons au potentiel qui donne ψ, et qui est un potentiel de simple couche dont la densité est μ. Considérons la composante normale de la force électrique; elle est donnée par la formule

$$4\pi h = -\frac{dH}{dt} - \frac{d\psi}{dz}$$

et elle doit être égale du côté externe à $4\pi\mu$; le saut brusque subi par les potentiels du second membre doit donc être égal à $4\pi\mu$; le premier terme $-\frac{dH}{dt}$ est un potentiel de simple couche qui ne subit pas de saut brusque; quant au second terme $-\frac{d\psi}{dz}$, c'est la dérivée normale d'un potentiel de simple couche de densité μ; le saut brusque qu'il subit en valeur absolue est $4\pi\mu$.

C. Q. F. D.

3. Le problème de Fredholm pour les corps de révolution.

Supposons que nous ayons deux conducteurs que j'appellerai *le conducteur extérieur* et le *conducteur intérieur;* le premier engendrera le *champ extérieur* et l'autre le *champ intérieur;* nous réservons les notations

$$\psi, \quad F, \quad G, \quad H, \quad f, \quad \ldots$$

pour les quantités *relatives au champ intérieur;* nous désignerons par

$$\psi^*, \quad F^*, \quad G^*, \quad H^*, \quad f^*, \quad \ldots$$

les quantités correspondantes relatives au champ extérieur, et par

$$\psi+\psi^*, \quad F+F^*, \quad \ldots$$

les quantités relatives au champ total. Si alors, comme dans le paragraphe précédent, nous représentons ces quantités par des potentiels retardés, les intégrales qui expriment ces quantités devront être étendues à la surface du conducteur intérieur seulement en ce qui concerne le champ intérieur ψ, F, ...; à la surface du conducteur extérieur seulement en ce qui concerne le champ extérieur ψ^*, F^*, ...; et enfin à la surface des deux conducteurs en ce qui concerne le champ total.

Dans le problème de la réception des signaux, le conducteur extérieur est l'excitateur, le conducteur intérieur est le récepteur; le champ extérieur doit être regardé comme donné, ainsi que la constante ω, et c'est le champ intérieur qu'il s'agit de déterminer.

Dans le problème de l'émission des signaux, il n'y a qu'un seul conducteur, qui est l'excitateur, et qui sera regardé comme le conducteur intérieur. Le champ extérieur est nul, et nous devons déterminer à la fois ω et le champ intérieur.

Enfin, dans le problème de la diffraction, le conducteur extérieur est l'excitateur, le conducteur intérieur est le corps diffringent; le champ extérieur est donné ainsi que la constante ω, et c'est encore le champ intérieur qu'il s'agit de déterminer.

Nous allons chercher à ramener ces différents problèmes à la résolution d'une équation intégrale de Fredholm. Mais nous traiterons d'abord le cas où tous les conducteurs sont des corps de révolution autour d'un même axe, et où le

champ présente aussi la même symétrie, de telle sorte que les lignes de force magnétique soient des cercles dans des plans perpendiculaires à l'axe, tandis que les lignes de courant et les lignes de force électrique sont dans des plans méridiens.

Écrivons qu'en un point très voisin de la surface du conducteur intérieur, et du côté interne, la composante normale de la force électrique est nulle. Cette composante normale, en ce qui concerne le champ intérieur, est

$$-l\frac{dF}{dt} - m\frac{dG}{dt} - n\frac{dH}{dt} - \frac{d\psi}{dn},$$

en désignant par l, m, n les cosinus directeurs de la normale et par $\frac{d\psi}{dn}$ la dérivée prise selon la normale. Quant à la composante normale du champ extérieur, elle doit être regardée comme connue, et nous la désignerons par N, de sorte que notre équation s'écrit :

$$l\frac{dF}{dt} + m\frac{dG}{dt} + n\frac{dH}{dt} + \frac{d\psi}{dn} = N.$$

Or on a

$$\frac{dF}{dt} = i\omega F$$

et d'autre part F est un potentiel retardé de simple couche, de densité U, et que je puis désigner par P(U) en employant la notation du paragraphe précédent. Notre équation devient donc :

$$(1)\qquad i\omega[l P(U) + m P(V) + n P(W)] + \frac{d}{dn} P(\mu) = N,$$

où P(U), P(V), P(W) sont des potentiels de simple couche qui sont représentés par des intégrales définies; un peu plus d'attention doit être prêtée au terme $\frac{d\psi}{dn}$; nous avons en effet

$$\psi = \int \mu' \frac{e^{-i\omega r}}{r} d\sigma'.$$

On trouve d'ailleurs

$$(2)\qquad \frac{d}{dn}\frac{e^{-i\omega r}}{r} = \frac{d}{dr}\left(\frac{e^{-i\omega r}}{r}\right)\cos\xi,$$

ξ étant l'angle du rayon vecteur r avec la normale au point attiré; mais en vertu des propriétés connues des potentiels de simple couche, nous n'avons pas le droit d'écrire simplement :

$$\frac{d\psi}{dn} = \int \mu' \frac{d}{dn}\frac{e^{-i\omega r}}{r} d\sigma'.$$

Nous devons écrire, du côté interne,

$$\frac{d\psi}{dn} = \int \mu' \frac{d}{dn} \frac{e^{-i\omega r}}{r} d\sigma' - 2\pi\mu$$

et du côté externe

$$\frac{d\psi}{dn} = \int \mu' \frac{d}{dn} \frac{e^{-i\omega r}}{r} d\sigma' + 2\pi\mu.$$

Notre équation devient donc

$$(3) \qquad i\omega \Sigma l \mathrm{P}(\mathrm{U}) - 2\pi\mu + \int \mu' \frac{d}{dn} \frac{e^{-i\omega r}}{r} d\sigma' = \mathrm{N}.$$

Sans la présence du premier terme, elle aurait immédiatement la forme d'une équation de Fredholm ; car N est une fonction donnée, μ est la fonction inconnue et l'expression $\frac{d}{dn}\frac{e^{-i\omega r}}{r}$ est une fonction connue de x, y, z, x', y', z' qui jouerait le rôle de *noyau*.

Quant au terme $i\omega\Sigma l \mathrm{P}(\mathrm{U})$, il se présente bien sous la forme d'une intégrale analogue à celles de Fredholm, mais où figurent, à la place de la fonction inconnue μ', d'autres fonctions inconnues U', V', W'; il s'agit de la transformer de façon à n'avoir plus d'autre fonction inconnue que μ'.

C'est ici qu'intervient la symétrie particulière du champ. Soit s l'arc de méridien compté depuis le pôle jusqu'au point x, y, z; soit R le rayon du parallèle correspondant, et φ la longitude du point x, y, z; soient s', R' et φ' les quantités correspondantes pour le point x', y', z'.

Soit

$$\mathrm{J}^2 = \mathrm{U}^2 + \mathrm{V}^2 + \mathrm{W}^2,$$

de telle sorte que

$$\mathrm{U} = \mathrm{J}\frac{dx}{ds}, \qquad \mathrm{V} = \mathrm{J}\frac{dy}{ds}, \qquad \mathrm{W} = \mathrm{J}\frac{dz}{ds}.$$

Le courant qui traversera le parallèle de rayon R sera alors $2\pi\mathrm{JR}$; d'autre part, à cause de la symétrie du champ, J et μ ne dépendront que de s et pas de φ. L'équation de continuité nous donnera :

$$(4) \qquad \frac{d\mathrm{JR}}{ds} = \mathrm{R}\frac{d\mu}{dt} = i\omega\mu\mathrm{R}.$$

D'ailleurs il vient

$$\sum l\mathrm{F} = \sum l\mathrm{P}(\mathrm{U}) = \int \sum l\mathrm{U}' \frac{e^{-i\omega r}}{r} d\sigma' = \int \mathrm{J}' \frac{e^{-i\omega r}}{r} \sum l \frac{dx'}{ds'} d\sigma'.$$

Posons

$$\sum l \frac{dx}{ds} = \cos\theta,$$

de telle sorte que θ soit l'angle de la normale au point attiré avec la tangente au méridien au point attirant, et remarquons que

$$d\sigma' = \mathrm{R}'\, ds'\, d\varphi';$$

il viendra

$$\sum l\mathrm{F} = \int \mathrm{J}'\mathrm{R}' \cos\theta \frac{e^{-i\omega r}}{r}\, ds'\, d\varphi'.$$

Introduisons une fonction L définie par l'équation

(5) $$\frac{d\mathrm{L}}{ds'} = \cos\theta \frac{e^{-i\omega r}}{r},$$

d'où, en intégrant par parties,

$$\sum l\mathrm{F} = \int \mathrm{J}'\mathrm{R}' \frac{d\mathrm{L}}{ds'}\, ds'\, d\varphi' = [\mathrm{J}'\mathrm{R}'\mathrm{L}] - \int \mathrm{L} \frac{d\,\mathrm{J}'\mathrm{R}'}{ds'}\, ds'\, d\varphi.$$

La partie toute connue s'annule aux deux limites; et en effet les deux limites correspondent aux deux pôles où $\mathrm{R}' = 0$; il reste donc, en tenant compte de l'équation (4),

(6) $$\sum l\mathrm{F} = -i\omega \int \mathrm{L}\mu'\mathrm{R}'\, ds'\, d\varphi' = -i\omega \int \mathrm{L}\mu'\, d\sigma'.$$

L'équation (3) devient ainsi :

(7) $$\int \mu'\, d\sigma' \left[\frac{d}{dn} \frac{e^{-i\omega r}}{r} + \omega^2 \mathrm{L} \right] - 2\pi\mu = \mathrm{N}$$

et elle a la forme d'une équation de Fredholm.

L'équation (5) ne définit L qu'à une fonction arbitraire près $f(s, \varphi, \varphi')$; si on change L en $\mathrm{L} + f(s, \varphi, \varphi')$, le premier membre de (7) augmente de

(8) $$\omega^2 \int \mu' f(s, \varphi, \varphi')\, d\sigma' = \omega^2 \int d\varphi' f(s, \varphi, \varphi') \left[\int \mathrm{R}'\mu'\, ds' \right].$$

Mais la charge totale du conducteur est nulle, on a donc

$$\int \mu'\, d\sigma' = 0$$

et, comme μ' est indépendant de φ',

$$\int \mathrm{R}'\mu'\, ds' = 0.$$

L'expression (8) est donc toujours nulle comme il convient.

Pour montrer que la méthode de Fredholm est applicable à l'équation (7), il suffit d'établir que le noyau

$$\frac{d}{dn}\frac{e^{-i\omega r}}{r} + \omega^2 L$$

ne peut devenir infini que pour $r = 0$, et seulement du premier ordre. On a

$$\frac{d}{dn}\frac{e^{-i\omega r}}{r} = \cos\xi \frac{d}{dr}\frac{e^{-i\omega r}}{r} = \cos\xi\left[-i\omega - \frac{1}{r}\right]\frac{e^{-i\omega r}}{r}.$$

Cette expression ne peut devenir infinie que pour $r = 0$; à la vérité $\frac{d}{dr}\frac{e^{-i\omega r}}{r}$ est infinie du second ordre, mais alors $\cos\xi$ s'annule, de sorte que $\frac{d}{dn}\frac{e^{-i\omega r}}{r}$ est infinie seulement du premier ordre.

Le second membre de l'équation (5), $\cos\theta\frac{e^{-i\omega r}}{r}$, ne pourrait non plus devenir infini que pour $r = 0$; mais si $r = 0$, on a aussi $\cos\theta = 0$, parce que la tangente au méridien est perpendiculaire à la normale, de sorte que le produit reste fini. Donc $\frac{dL}{ds}$ et par conséquent L restent finis. Notre noyau remplit donc bien les conditions exigées.

Sous la forme (7) l'intégrale de Fredholm est une intégrale double; mais il est aisé de passer à une intégrale simple et écrire l'équation (7) sous la forme

$$\int \mu' k\, ds' - 2\pi\mu = X,$$

où le noyau k est défini par l'intégrale

$$k = \int_0^{2\pi}\left(\frac{d}{dn}\frac{e^{-i\omega r}}{r} + \omega^2 L\right) R'\, d\varphi'.$$

4. Le problème de Fredholm pour le cas général.

Les formules précédentes ne s'appliqueraient plus dans le cas général; si le champ n'est pas de révolution, le plus simple est de se servir des potentiels retardés qui expriment la force magnétique.

Je vais prendre comme inconnue le vecteur U, V, W; cela ne fait en réalité que deux inconnues, puisque les trois composantes sont liées par la relation $\Sigma l U = 0$. J'obtiendrai deux équations en écrivant que, en un point infiniment voisin de la surface du conducteur et du côté interne, les deux composantes tangentielles de la force magnétique sont nulles.

Soit x, y, z le point attiré très voisin de la surface et du côté interne. Si l_1, m_1, n_1 et l_2, m_2, n_2 sont en ce point les cosinus directeurs des deux tangentes aux lignes de courbure, on devra avoir

$$\Sigma l_1 \alpha = 0, \qquad \Sigma l_2 \alpha = 0.$$

Or nous avons vu que α, β, γ peuvent s'exprimer par des potentiels de double et de simple couche, et que l'on a par exemple

$$\alpha = \int (n'V' - m'W') \frac{d}{dn'} \frac{e^{-i\omega r}}{r} d\sigma'$$
$$+ \int (C'_1 l'_1 \Sigma l'_2 U' - C'_2 l'_2 \Sigma l'_1 U') \frac{e^{-i\omega r}}{r} d\sigma' + \int l' \nu' \frac{e^{-i\omega r}}{r} d\sigma'.$$

Dans cette formule l', m', n', l'_1, ..., U', ... représentent ce que deviennent l, m, n, ... au point attirant ; de même pour C'_1 et C'_2 ; la dérivée $\frac{d}{dn'} \frac{e^{-i\omega r}}{r}$ représente la dérivée estimée suivant la normale *au point attirant*.

Ceci permet d'écrire :

$$(1) \quad \sum l_1 \alpha = \int \sum k_1 U' \frac{d}{dn'} \frac{e^{-i\omega r}}{r} d\sigma' + \int \sum k'_1 U' \frac{e^{-i\omega r}}{r} d\sigma' + \int \nu' \cos\theta \frac{e^{-i\omega r}}{r} d\sigma'.$$

où j'écris, par exemple,

$$\Sigma k_1 U' = k_1 U' + k_2 V' + k_3 W', \qquad \Sigma k'_1 U' = k'_1 U' + k'_2 V' + k'_3 W'$$

avec

$$k_1 = m' n_1 - n' m_1, \qquad k'_1 = C'_1 l'_2 \Sigma l_1 l'_1 - C'_2 l'_1 \Sigma l_1 l'_2,$$

k_2, k_3 ; k'_2, k'_3 se déduisant de k_1 et de k'_1 en permutant circulairement l_1, m_1, n_1 ; l_2, m_2, n_2 ; l'_1, m'_1, n'_1 ; l'_2, m'_2, n'_2 ; l', m', n'.

D'autre part

$$\cos\theta = \Sigma l_1 l',$$

de sorte que θ est l'angle de la normale au point attirant avec la tangente à la ligne de courbure au point attiré.

Quand le point x, y, z se rapproche indéfiniment de la surface, on sait, d'après les propriétés du potentiel de double couche, qu'on ne peut plus représenter simplement ce potentiel par l'intégrale

$$\int \delta' \frac{d}{dn'} \frac{e^{-i\omega r}}{r} d\sigma',$$

où δ' est la densité de la double couche, mais il faut écrire du côté externe :

$$\int \delta' \frac{d}{dn'} \frac{e^{-i\omega r}}{r} d\sigma' + 2\pi\delta$$

et du côté interne :

$$\int \delta' \frac{d}{dn'} \frac{e^{-i\omega r}}{r} d\sigma' - 2\pi\delta.$$

Ici

$$\delta = \Sigma k_1 U',$$

et, comme au point attiré k_1, k_2, k_3 se réduisent à l_2, m_2, n_2,

$$\delta = \Sigma l_2 U'$$

Nous devons donc compléter le premier terme du second membre de (1) en ajoutant le terme $-2\pi \Sigma l_2 U'$ qui représente $-2\pi\delta$.

L'équation que nous voulons écrire est que, pour le champ total, la composante de notre force magnétique est nulle ; ce qui donne

$$\Sigma l_1 \alpha = -\Sigma l_1 \alpha^*,$$

de sorte que nous trouvons :

$$(2) \qquad -\sum l_1 \alpha^* = -2\pi \sum l_2 U' - \int \sum k_1 U' \frac{d}{dn'} \frac{e^{-i\omega r}}{r} d\sigma' + \int \sum k_1' U' \frac{e^{-i\omega r}}{r} d\sigma' + \int \nu' \cos\theta \frac{e^{-i\omega r}}{r} d\sigma'.$$

Sans le dernier terme, cette équation aurait immédiatement la forme d'une équation de Fredholm ; car le champ extérieur étant donné, le premier membre $-\Sigma l_1 \alpha^*$ est une fonction connue.

On obtiendra une seconde équation (2 *bis*) en changeant l_1, m_1, n_1 ; l_2, m_2, n_2, en l_2, m_2, n_2 ; $-l_1$, $-m_1$, $-n_1$.

Il nous reste donc à transformer le dernier terme de (2). Pour nous rendre compte de la façon de faire cette transformation, considérons d'abord une portion de surface plane ; on a alors

$$\nu' = \frac{dV'}{dy'} - \frac{dU'}{dx'}$$

et si je pose

$$\Phi = \cos\theta \frac{e^{-i\omega r}}{r},$$

l'intégrale à envisager est

$$\int \left(\frac{dV'}{dy'} - \frac{dU'}{dx'} \right) \Phi \, dx' \, dy'.$$

En intégrant par parties, je trouve que cette intégrale est égale à

$$\int \Phi (U' \, dx' + V' \, dy') - \int \left(U' \frac{d\Phi}{dx'} + V' \frac{d\Phi}{dy'} \right) dx' \, dy'.$$

La première intégrale est une intégrale de ligne étendue au contour qui enveloppe l'aire considérée; la seconde est une intégrale de surface. Cette formule se généralise pour une portion de surface courbe quelconque et l'on trouve :

$$(3) \qquad \int \Phi \nu \, d\sigma' = \int \Phi (U' \, dx' + V' \, dy' + W' \, dz') - \int \left(U' \frac{d\Phi}{dx'} + V' \frac{d\Phi}{dy'} + W' \frac{d\Phi}{dz'} \right) d\sigma.$$

Cette formule demande quelques explications; la fonction Φ n'est définie que sur la surface du conducteur, de sorte que les trois dérivées partielles de Φ n'auraient aucun sens sans une convention spéciale. Je supposerai donc que la fonction Φ conserve la même valeur tout le long d'une normale à la surface du conducteur, ce qui achève de définir Φ dans tout l'espace. Dans ces conditions le vecteur $\frac{d\Phi}{dx'}$, $\frac{d\Phi}{dy'}$, $\frac{d\Phi}{dz'}$ est tangent à la surface du conducteur; il est normal aux courbes $\Phi = \text{const.}$ (en regardant x', y', z' comme les variables); en grandeur il est égal à $\frac{d\Phi}{d\rho}$, $d\rho$ étant une longueur très petite prise sur le vecteur lui-même.

Si nous appliquons l'équation (3) à une surface fermée, l'intégrale de ligne est nulle, et le second membre se réduit à son second terme. L'équation (2) prend alors la forme :

$$(4) \qquad \left\{ \begin{aligned} -\sum l_1 \alpha^* = 2\pi \sum l_2 U &+ \int \sum k_1 U \frac{d}{dn} \frac{e^{-i\omega r}}{r} \, d\sigma' \\ &+ \int \sum k'_1 U' \frac{e^{-i\omega r}}{r} \, d\sigma' - \int \sum \frac{d\Phi}{dx'} U' \, d\sigma' \end{aligned} \right.$$

et il faut y adjoindre une autre équation (4 *bis*) qui se déduirait de la même façon de (2 *bis*).

Ces équations ont immédiatement la forme de Fredholm. On peut : ou bien exprimer U, V, W, et de même U', V', W', à l'aide de deux quantités seulement en se servant de l'équation $\Sigma l U = \Sigma l' U' = 0$; ou bien conserver trois inconnues et adjoindre à (4) et (4 *bis*) l'équation

$$(5) \qquad \Sigma l U = 0.$$

Il me reste à faire voir que les noyaux satisfont bien aux conditions de Fredholm. D'abord ils ne peuvent devenir infinis que pour $r = 0$ et, pour savoir de quel ordre, nous devons distinguer les trois derniers termes de l'équation (4). Dans le second terme nous avons en facteur

$$\frac{d}{dn'}\frac{e^{-i\omega r}}{r} = \cos\xi' \frac{d}{dr}\frac{e^{-i\omega r}}{r},$$

où ξ' est l'angle du rayon vecteur avec la normale au point attirant. Pour $r = 0$, $\frac{d}{dr}\frac{e^{-i\omega r}}{r}$ devient infini du second ordre, mais $\cos\xi'$ s'annule, de sorte que notre noyau n'est infini que du premier ordre.

Dans le troisième terme nous avons en facteur $\frac{e^{-i\omega r}}{r}$ qui est infini du premier ordre seulement. Dans le quatrième terme, nous avons les dérivées de Φ qu'il nous reste à examiner; on trouve

$$\frac{d\Phi}{dx'} = \frac{e^{-i\omega r}}{r}\frac{d\cos\theta}{dx'} + \cos\theta \frac{d}{dx'}\frac{e^{-i\omega r}}{r}.$$

Le premier terme est infini du premier ordre, dans le second le facteur

$$\frac{d}{dx'}\frac{e^{-i\omega r}}{r}$$

est infini du second ordre, mais $\cos\theta$ s'annule quand le point attiré et le point attirant se confondent, de sorte que le produit n'est que du premier ordre.

Tous nos noyaux sont donc du premier ordre, de sorte que les conditions exigées sont bien remplies.

On pourrait transformer les équations de façon à prendre pour inconnues μ et ν, et non plus U, V, W; on se rapprocherait ainsi de la forme de solution qui convient au cas des corps de révolution.

5. Étude d'une solution particulière.

Reprenons les équations (1 *bis*), etc. du paragraphe 1 et supposons que les coordonnées choisies soient les coordonnées polaires, de telle façon que l'on ait :

$$a = 1, \qquad b = x', \qquad c = x' \sin y'.$$

Nous pourrons alors (*à la condition de ne pas nous astreindre à prendre*

pour potentiel vecteur le potentiel de Lorentz) satisfaire aux équations en faisant

$$G' = H' = 0, \qquad \alpha' = \beta' = 0, \qquad h' = 0, \qquad \frac{d}{dz'} = 0.$$

Les équations, *en dehors des conducteurs*, se réduiront alors à

(1) $$\gamma' = -\frac{c}{ab}\frac{dF'}{dy'} = -\sin y'\frac{dF'}{dy'},$$

(2) $$4\pi f' = -\frac{dF'}{dt} - \frac{d\psi'}{dx'},$$

(2 *bis*) $$4\pi g' = -\frac{d\psi'}{dy'},$$

(3) $$4\pi\frac{df'}{dt} = \frac{a}{bc}\frac{d\gamma'}{dy'} = \frac{1}{x'^2 \sin y'}\frac{d\gamma'}{dy'},$$

(3 *bis*) $$4\pi\frac{dg'}{dt} = -\frac{b}{ac}\frac{d\gamma'}{dx'} = -\frac{1}{\sin y'}\frac{d\gamma'}{dx'},$$

(4) $$\frac{d}{dx'}(f' x'^2 \sin y') + \frac{d}{dy'}(g' \sin y') = 0.$$

De (2 *bis*), (3 *bis*) et (1) nous tirons :

$$4\pi\frac{dg'}{dt} = -\frac{d^2\psi'}{dy'\,dt} = -\frac{1}{\sin y'}\frac{d\gamma'}{dx'} = \frac{1}{\sin y'}\frac{d}{dx'}\left(\sin y'\frac{dF'}{dy'}\right) = \frac{d^2F'}{dx'\,dy'}.$$

L'égalité

(5) $$-\frac{d^2\psi'}{dy'\,dt} = \frac{d^2F'}{dx'\,dy'}$$

nous conduit à admettre la suivante :

(6) $$\frac{dF'}{dx'} + \frac{d\psi'}{dt} = 0,$$

ce qui montre que l'équation (6 *bis*) du paragraphe I reste vraie, *en dehors des conducteurs*, comme pour le potentiel de Lorentz, bien que notre potentiel vecteur ne soit pas en général celui de Lorentz, parce que l'équation cesse d'être vraie sur les conducteurs. Quoi qu'il en soit (2) et (3) nous donnent respectivement, en tenant compte de (6) et de (1),

$$4\pi\frac{df'}{dt} = -\frac{d^2F'}{dt^2} - \frac{d^2\psi'}{dx\,dt} = -\frac{d^2F'}{dt^2} + \frac{d^2F'}{dx'^2},$$

$$4\pi\frac{df'}{dt} = \frac{1}{x'^2\sin y'}\frac{d\gamma'}{dy'} = -\frac{1}{x'^2\sin y'}\frac{d}{dy'}\left(\sin y'\frac{dF'}{dy'}\right);$$

d'où

$$(7)\qquad \frac{d^2F'}{dx'^2} - \frac{d^2F'}{dt^2} = -\frac{\operatorname{cotg} y'}{x'^2}\frac{dF'}{dy'} - \frac{1}{x'^2}\frac{d^2F'}{dy'^2}.$$

Je veux satisfaire à cette équation en prenant pour F' le produit d'une fonction de x' par une fonction de y', et pour cela il faut égaler les deux membres de (7) à $\frac{KF'}{x'^2}$, K étant une constante. On trouve ainsi les deux équations :

$$(8)\qquad \omega^2 F' + \frac{d^2F'}{dx'^2} = \frac{KF'}{x'^2},$$

$$(9)\qquad -\operatorname{cotg} y'\frac{dF'}{dy'} - \frac{d^2F'}{dy'^2} = KF'.$$

et nous rappelant que $\frac{d^2F'}{dt^2} = -\omega^2 F'$. Considérons d'abord l'équation (9), qui nous montre comment F' varie en fonction de l'angle y'. Si nous posons

$$\cos y' = \mu,$$

l'équation devient :

$$(9\ bis)\qquad (1-\mu^2)\frac{d^2F'}{d\mu^2} - 2\mu\frac{dF'}{d\mu} + KF' = 0.$$

On voit que cette équation se réduit à celle qui définit le polynome de Legendre $P_n(\mu) = P_n(\cos y')$, si l'on a soin de prendre

$$K = n(n+1).$$

Il convient d'ailleurs d'attribuer à K cette valeur, si l'on veut que F' reste régulier pour toutes les valeurs de l'angle y'. Nous pouvons alors nous reporter à l'équation (8) pour voir comment se comporte F' en fonction du rayon vecteur x'. Posons

$$\omega x' = \xi,$$

notre équation devient

$$(10)\qquad \frac{d^2F'}{d\xi^2} + F'\left[1 - \frac{n(n+1)}{\xi^2}\right] = 0.$$

Cette équation linéaire admet deux intégrales remarquables que je désignerai par $J_n(\xi)$ et $I_n(\xi)$ à cause de leur analogie avec les fonctions de Bessel ; dans tout ce qui va suivre, ces notations désigneront, sauf avis contraire, *non pas les fonctions de* Bessel *ordinaires*, mais les intégrales de l'équation (10).

L'intégrale I_n est celle qui, pour ξ très grand, est sensiblement égale à $e^{-i\xi}$;

il n'est pas difficile de voir que cette intégrale est égale à $e^{-i\xi}$ multipliée par un polynome entier en $\frac{1}{\xi}$.

L'intégrale J_n est celle qui, pour $\xi = 0$, reste holomorphe; elle est égale à la partie réelle de $h I_n$, h étant un facteur constant. La fonction J_n n'est pas ainsi entièrement définie, elle ne l'est qu'à un facteur près, et pour déterminer ce coefficient nous ferons la convention suivante :

Soient I'_n et J'_n les dérivées de I_n et J_n; on aura la relation :

$$I'_n J_n - J'_n I_n = \text{const.}$$

Il est aisé de voir que cette relation a lieu entre deux intégrales quelconques de (10). Nous choisirons notre facteur constant, de telle sorte que cette constante soit egale à 1; de sorte qu'on aura

$$(11) \qquad I'_n J_n - J'_n I_n = 1.$$

Il résulte de là que F′ sera d'une des formes suivantes :

$$F' = e^{i\omega t} P_n(\cos y') J_n(\omega x'),$$
$$F' = e^{i\omega t} P_n(\cos y') I_n(\omega x').$$

Retenons seulement la première forme; nous avons trouvé :

$$4\pi \frac{df'}{dt} = -\frac{d^2 F'}{dt^2} + \frac{d^2 F'}{dx'^2},$$

d'où

$$4\pi i\omega f' = \omega^2 F' + \frac{d^2 F'}{dx'^2} = \frac{n(n+1) F'}{x'^2},$$

d'où enfin

$$(12) \qquad f' = \frac{n(n+1)}{4\pi i\omega} P_n(\cos y') \frac{J_n(\omega x')}{x'^2} e^{i\omega t}.$$

Ceci nous montre comment varie la composante radiale f' de la force électrique en fonction du rayon vecteur x'; elle varie proportionnellement à $\frac{J_n}{x'^2}$. Avec la seconde forme, il suffirait de remplacer J_n par I_n.

Cela posé, considérons un champ électromagnétique quelconque et supposons :

1° Qu'à l'intérieur d'une sphère de rayon R, il n'y ait pas de conducteur;

2° Que le champ soit de révolution.

On voit que, dans les mêmes conditions que plus haut, on peut supposer :

$$G' = H' = 0, \qquad \ldots.$$

De plus F′ pourra être développé en une série de fonctions sphériques, et puisque le champ est de révolution en une série de polynomes de Legendre. Nous aurons donc

$$F' = e^{i\omega t} \sum K_n P_n(\cos y'),$$

K_n étant une fonction de x' seulement. D'après ce qui précède, K_n devra satisfaire à l'équation (10), et d'autre part rester holomorphe pour $x' = 0$, puisqu'il n'y a pas de conducteur à l'intérieur de la sphère de rayon R. Nous aurons donc

$$F' = e^{i\omega t} \sum A_n J_n(\omega x') P_n(\cos y')$$

et

(13) $$f' = e^{i\omega t} \sum B_n \frac{J_n(\omega x')}{x'^2} P_n(\cos y'),$$

les A_n et les B_n étant des coefficients numériques.

Supposons maintenant :

1° Qu'à *l'extérieur* d'une sphère de rayon R, il n'y ait pas de conducteur;

2° Que le champ soit de révolution;

3° Que l'état actuel ait été atteint en partant du repos, de telle sorte que toutes nos quantités soient susceptibles d'être représentées par des potentiels retardés.

Dans ces conditions, F′ sera, pour x' très grand, sensiblement proportionnel à $e^{-i\omega x'}$, ce qui nous permet d'écrire :

$$F' = e^{i\omega t} \sum A_n I_n(\omega x') P_n(\cos y')$$

et

(13 *bis*) $$f' = e^{i\omega t} \sum B_n \frac{I_n(\omega x')}{x'^2} P_n(\cos y').$$

6. Diffraction par une sphère.

Nous allons maintenant commencer l'étude des effets de diffraction produits par la sphère terrestre sur les ondes émanées d'un excitateur. Le *champ extérieur* sera produit par un excitateur rectiligne qui, prolongé, irait passer

par le centre de la Terre, de telle façon que les champs soient de révolution. Cet excitateur pourra se considérer comme réduit à un point, que j'appellerai S. Soit O le centre de la Terre, et M le point x, y, z : je désignerai par r la distance SM, par D la distance SO, par ρ la distance OM, par φ l'angle SOM, par $\pi - \xi$ l'angle OMS, par θ l'angle OSM. Il en résulte que ρ et φ représentent ce qui, dans le paragraphe précédent, était appelé x' et y'.

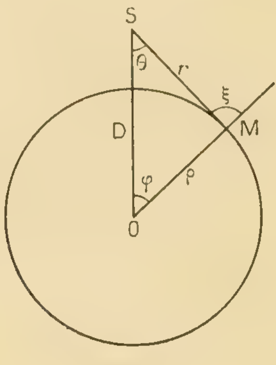


Fig. 1.

Nous avons besoin de la composante radiale du déplacement électrique, c'est-à-dire de ce que, dans le paragraphe précédent, nous appelions f'. Pour le champ extérieur nous pouvons prendre un potentiel vecteur, dirigé suivant SM et égal en grandeur à

$$e^{i\omega(t-r)}\left(\frac{1}{r} + i\omega\right)\cos\theta;$$

on en tire :

$$(1) \qquad 4\pi f'^{*} = e^{i\omega(t-r)}\left[\frac{i\omega}{r}\sin\theta\sin\xi + \left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{i\omega r^3}\right)(\sin\theta\sin\xi - 2\cos\theta\cos\xi)\right].$$

A l'intérieur de la sphère de rayon D, f'^{*} peut être développé par la formule (13) du paragraphe précédent, ce qui me permet d'écrire :

$$(2) \qquad f'^{*} = e^{i\omega t}\sum \mathrm{A}_n \mathrm{J}_n(\omega\rho)\frac{1}{\rho^2}\mathrm{P}_n(\cos\varphi).$$

Le coefficient A_n ne dépend que de n et de D ; on peut le calculer par la méthode de Laplace et c'est ce que nous ferons plus loin au paragraphe 13.

Passons au champ intérieur. A l'extérieur de la sphère terrestre, c'est-à-dire pour $\rho > \rho_0$, si ρ_0 représente le rayon de la Terre, nous pourrons appliquer la

formule (13 *bis*) du paragraphe précédent et nous aurons :

(3) $$f' = e^{i\omega t} \sum B_n I_n(\omega\rho) \frac{1}{\rho^2} P_n(\cos\varphi).$$

A l'intérieur de la Terre, c'est-à-dire pour $\rho < \rho_0$, la formule (13) nous donnera :

(4) $$f = e^{i\omega t} \sum C_n J_n(\omega\rho) \frac{1}{\rho^2} P_n(\cos\varphi).$$

Enfin sur la surface nous aurons, pour la densité μ de l'électricite,

(5) $$\mu = e^{i\omega t} \sum D_n \frac{1}{\rho_0^2} P_n(\cos\varphi).$$

Il reste à calculer les coefficients B_n, C_n et D_n.

Écrivons les valeurs de F' pour $\rho > \rho_0$ et $\rho < \rho_0$; nous trouverons, en nous reportant à la formule (12) du paragraphe 5,

$$F' = e^{i\omega t} \sum \frac{4\pi i\omega}{n(n+1)} B_n I_n(\omega\rho) P_n(\cos\varphi)$$

et

$$F = e^{i\omega t} \sum \frac{4\pi i\omega}{n(n+1)} C_n J_n(\omega\rho) P_n(\cos\varphi).$$

Rappelons que F' n'est pas ici le potentiel de Lorentz, de sorte que ce n'est pas un potentiel de simple couche. Les équations (2 *bis*), (3 *bis*) et (1) du paragraphe 5 nous ont donné :

$$4\pi \frac{dg}{dt} = \frac{d^2 F}{dx\, dy},$$

ou, avec nos notations actuelles,

$$4\pi \frac{dg'}{dt} = 4\pi i\omega g' = \frac{d^2 F'}{d\rho\, d\varphi},$$

ce qui nous donne, pour $\rho > \rho_0$:

$$g' = \omega e^{i\omega t} \sum \frac{B_n}{n(n+1)} I'_n(\omega\rho) \frac{dP_n}{d\varphi}$$

et pour $\rho < \rho_0$:

$$g' = \omega e^{i\omega t} \sum \frac{C_n}{n(n+1)} J_n(\omega\rho) \frac{dP_n}{d\varphi}.$$

Mais la composante tangentielle g' doit rester continue pour $\rho = \rho_0$, ce qui donne :

(6) $$B_n I'_n(\omega\rho_0) = C_n J_n(\omega\rho_0).$$

D'autre part, la composante normale f' doit être discontinue et son saut brusque doit être égal à μ, ce qui donne :

(7) $$B_n I_n(\omega\rho_0) = C_n J_n(\omega\rho_0) + D_n.$$

Enfin, le champ *total*

$$f'^* + f'$$

doit être nul à l'intérieur de la Terre, ce qui donne :

(8) $$A_n + C_n = 0.$$

Des équations (6), (7) et (8) on peut, en se rappelant que

$$I'_n J_n - J'_n I_n = 1,$$

déduire

$$I'_n(\omega\rho_0) D_n = A_n,$$

d'où

(9) $$\mu = e^{i\omega t} \sum \frac{A_n}{\rho_0^2 I'_n(\omega\rho_0)} P_n(\cos\varphi),$$

que j'écrirai quelquefois :

(9 *bis*) $$\mu = e^{i\omega t} \sum \frac{A_n J_n}{\rho_0^2 I'_n J_n} P_n.$$

On voit par là comment on peut déterminer les périodes propres des ondes émises par un excitateur sphérique. Ces périodes sont données par les équations

$$I'_n(\omega\rho_0) = 0$$

et c'est ce que l'on pourrait voir également en écrivant que dans ces ondes propres on a, à l'extérieur,

$$g' = 0.$$

Nous trouverons plus loin au paragraphe 6 une expression simple de A_n.

7. Remarques sur la longueur d'onde.

Les formules précédentes contiennent la solution théorique du problème de la diffraction, et cependant la véritable question n'est pas abordée, puisque le caractère essentiel du phénomène de la diffraction n'est pas mis en évidence. Ce caractère tient à ce que la longueur d'onde est très petite par rapport aux dimensions de la Terre et à ce que, par conséquent, le nombre ω est très grand.

Nous sommes ainsi conduits à développer nos inconnues suivant les puissances de $\frac{1}{\omega}$. A la vérité, les développements ainsi obtenus ne sont pas convergents en général ; en s'arrêtant aux premiers termes, ils ne nous en fournissent pas moins des expressions asymptotiques de nos inconnues qui sont suffisantes pour notre objet.

En se plaçant à ce point de vue, la première approximation nous donnera la propagation rectiligne, et c'est à la deuxième approximation qu'il convient de nous arrêter. Nous sommes ainsi conduits à rechercher des expressions asymptotiques de nos intégrales, et cela va être l'objet des paragraphes suivants.

Mais nous avons encore une autre remarque à faire. Nous supposerons, dans ce qui va suivre, que ω est réel. Cela paraîtra au premier abord peu justifiable, puisque l'onde émise par l'excitateur est amortie. Mais en réalité nous n'aurions pas le droit de représenter l'onde amortie par une formule $e^{i\omega t}$, ω étant imaginaire ; et en effet, cette onde amortie a un commencement ; de sorte qu'il conviendrait d'égaler l'onde à une fonction discontinue $F(t)$, égale à o pour $t < 0$ par exemple, et à $e^{i\omega t}$ pour $t > 0$. Cette fonction discontinue peut être développée en série de Fourier :

$$(1) \qquad F(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\alpha t} \varphi(\alpha)\, d\alpha,$$

où α est réel. Le coefficient $\varphi(\alpha)$ est donné par la formule :

$$2\pi\varphi(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\alpha t} F(t)\, dt = \int_{0}^{\infty} e^{i(\omega-\alpha)t}\, dt = \frac{1}{i(\omega-\alpha)},$$

parce que pour $t = \infty$ l'expression $e^{i(\omega-\alpha)t}$ s'annule, parce que la partie imaginaire de ω est positive.

Par la formule (1), l'onde incidente $F(t)$ est décomposée en une infinité de composantes isochrones $e^{i\alpha t}\varphi(\alpha)\, d\alpha$, formant un spectre continu.

Nous devrons examiner séparément chacune de ces composantes, et pour chacune d'elles l'exposant $i\alpha t$ est purement imaginaire. C'est ce qui justifie notre hypothèse où nous traitons ω comme réel.

On remarquera que pour $\alpha = 0$, $\varphi(\alpha)$ ne s'annule pas, mais se réduit à $\frac{1}{i\omega}$. Et cela a une grande importance. On explique en effet d'ordinaire la diffraction des ondes hertziennes en disant que la longueur d'onde est très grande, et l'on entend d'ordinaire par là la longueur d'onde calculée à l'aide de la partie réelle de ω et que nous appellerons λ. Mais, ainsi que nous venons de le voir,

nous n'avons pas en réalité une longueur d'onde unique, mais un spectre continu, et dans ce spectre il y a des parties qui correspondent à des longueurs d'onde *beaucoup plus grandes* que λ. Ces parties ne sont pas d'une intensité négligeable, puisque

$$\varphi(0) = \frac{1}{i\omega},$$

tandis qu'en posant $\omega = \omega_0 + i\omega_1$, et en prenant $\alpha = \omega_0$, on avait

$$\varphi(\omega_0) = \frac{1}{i\omega_1},$$

de telle sorte que

$$|\varphi(\omega_0)| \quad \text{et} \quad |\varphi(0)|$$

sont sensiblement du même ordre de grandeur.

Parmi les composantes de notre spectre, il y en a donc qui sont susceptibles de produire des effets de diffraction beaucoup plus grands que ceux qui correspondraient à la longueur λ. Et c'est déjà une première explication de la grandeur des effets constatés.

8. Valeur asymptotique de certaines intégrales.

Considérons l'intégrale :

$$(1) \qquad \int \eta\, e^{i\omega\theta}\, dx,$$

où η et θ sont des fonctions de x, et ω un très grand nombre. Je suppose d'abord que l'intégrale soit prise entre des limites réelles le long d'une droite et que sur cette droite θ soit réel. On peut déformer le contour d'intégration en s'astreignant à cette condition, que tout le long du nouveau contour la partie imaginaire de θ soit positive ou nulle. En un point où cette partie imaginaire est positive l'élément correspondant de l'intégrale contient en facteur $e^{-\omega\theta_1}$ où θ_1 est la partie imaginaire, et comme ω est très grand, cet élément est négligeable; il est très petit d'ordre infini, si ω est très grand du premier ordre. Les seuls éléments sensibles sont donc ceux qui sont voisins des points où θ est réel. Mais dans cette déformation de notre contour, il y a certains points, situés sur l'axe réel, et par lesquels nous devons toujours faire passer le contour. Ce sont :

1° Les deux limites d'intégration;

2° Les points singuliers de φ et de θ; parce que dans une déformation continue, un contour variable n'a pas le droit de franchir un point singulier;

3° Les maxima, et les minima de θ, parce qu'un contour ne pourrait passer dans le voisinage de l'un de ces maxima, tout entier au-dessus ou tout entier au-dessous, sans rencontrer à la fois des points où $\theta_1 > 0$ et des points où $\theta_1 < 0$.

Tous les autres points peuvent être évités et il en résulte que les seuls éléments dont nous ayons à tenir compte sont ceux qui sont voisins de l'un de ces points. Soit α l'un de ces points, θ_0 la valeur correspondante de θ; nous aurons

$$\theta - \theta_0 = A(x - \alpha)^m + \ldots, \qquad \varphi = B(x - \alpha)^p + \ldots;$$

nous poserons $\theta - \theta_0 = Ay^m$, d'où

$$\varphi \frac{dx}{dy} = By^p + B_1 y^{p+1} + \ldots$$

et pour notre intégrale :

$$e^{i\omega\theta_0} \int (By^p + B_1 y^{p+1} + \ldots) e^{i\omega A y^m} dy.$$

Nous sommes donc ainsi conduits à examiner l'intégrale

$$\int y^p e^{i\omega A y^m} dy.$$

La limite inférieure d'intégration peut être prise égale à 0, à la condition de considérer séparément les éléments voisins de α vers la droite, et les éléments voisins de α vers la gauche. Quant à la limite supérieure, nous pouvons la prendre arbitrairement, puisque les éléments voisins de la limite inférieure interviennent seuls. Nous la prendrons par exemple infinie, un peu en dehors de l'axe réel pour que $\theta_1 > 0$. Nous avons donc à envisager l'intégrale

$$\int_0^\infty y^p e^{i\omega A y^m} dy.$$

Elle se calcule aisément par le moyen des fonctions eulériennes. Il est aisé de voir qu'elle est de l'ordre de $\omega^{-\frac{p+1}{m}}$. Le nombre p peut être fractionnaire et même négatif, mais ne peut être < -1. Si nous appliquons ce principe aux différents points, nous trouvons :

1° Que pour les maxima et minima de θ, on a en général

$$p = 0, \qquad m = 2,$$

d'où ordre $-\frac{1}{2}$;

2° Que si l'on a $\theta' = \theta'' = 0$, on a $p = 0$, $m = 3$, d'où ordre $-\frac{1}{3}$;

3° Qu'aux extrémités, on a en général $p = 0$, $m = 1$, d'où ordre -1;

4° Qu'en un point singulier de φ_1 on a en général $m = 1$, d'où ordre $-(p+1)$;

5° Que si en un point la fonction φ_1 est continue ainsi que ses dérivées des q premiers ordres, mais que la $(q+1)^{\text{ième}}$ dérivée soit discontinue, on trouve l'ordre $-(q+2)$.

Étudions d'une façon particulière le cas des maxima et des minima qui donnent l'ordre $-\frac{1}{2}$, c'est-à-dire celui de $\frac{1}{\sqrt{\omega}}$. Nous avons la formule connue :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi},$$

d'où l'on peut déduire, comme on sait,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix^2}\,dx = \sqrt{\pi}\,e^{i\frac{\pi}{4}}, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix^2}\,dx = \sqrt{\pi}\,e^{-i\frac{\pi}{4}}.$$

En appliquant donc les principes précédents à notre intégrale, et en particulier aux éléments de cette intégrale voisins d'un minimum ou d'un maximum de θ, nous trouvons :

$$(2) \qquad \int \varphi_1 e^{i\omega\theta}\,dx = \varphi_1 e^{i\omega\theta}\sqrt{\frac{2\pi}{\omega\theta''}}\,e^{i\frac{\pi}{4}}$$

pour un minimum et

$$(2\,bis) \qquad \int \varphi_1 e^{i\omega\theta}\,dx = \varphi_1 e^{i\omega\theta}\sqrt{\frac{2\pi}{\omega|\theta''|}}\,e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

pour un maximum. Les valeurs de φ_1, θ, θ'' sont celles qui correspondent au minimum ou au maximum, et θ'' est la dérivée seconde de θ; la valeur du radical à diviser est la valeur positive.

Les formules précédentes restent vraies pour des valeurs imaginaires de ω, pourvu que la partie imaginaire de ω soit positive, mais en attribuant à $\sqrt{\omega}$ un argument compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$. Plus généralement encore on peut appliquer la formule (2), même si ω et θ ne sont pas réels et si le chemin d'intégration est quelconque, mais il faut que l'argument de $\omega\theta''\,dx^2$ soit compris entre 0 et π et il faut attribuer à $\sqrt{\omega\theta''}\,dx$ un argument compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$.

L'erreur commise est de l'ordre de $\frac{1}{\omega}$; car le terme suivant du développement correspond à

$$p = 1, \qquad m = 2$$

et est par conséquent d'ordre $-\frac{p+1}{m} = -1$.

Il n'est peut-être pas sans intérêt d'appliquer le résultat précédent à l'intégrale de Fourier, afin d'en mieux faire comprendre le sens. Partons des deux formules conjuguées :

$$\varphi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixy}\psi(y)\,dy, \qquad 2\pi\psi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx}\varphi(x)\,dx$$

et soit $\psi(y) = e^{i\omega\theta}\eta$, où θ et η sont fonctions de y. Pour avoir une valeur approchée de $\varphi(x)$, appliquons la règle précédente; la quantité sous le signe $\int$ est $e^{i(xy+\omega\theta)}\eta$.

Nous poserons $x = z\omega$; il faut considérer le minimum de l'exposant, c'est-à-dire de

$$zy + \theta(y).$$

Ce minimum sera atteint pour une valeur de y que j'appellerai y_0 et qui sera donné par

$$(3) \qquad z + \theta'(y_0) = 0.$$

La valeur correspondante approchée de l'intégrale sera

$$\varphi(x) = \sqrt{2\pi}\, e^{i\frac{\pi}{4}}\, e^{i\omega(zy_0+\theta)} \frac{\eta(y_0)}{\sqrt{\omega\theta''(y_0)}}.$$

Calculons de même $\psi(t)$; on trouve, en remplaçant φ par sa valeur approchée,

$$2\pi\psi(t) = \int \sqrt{2\pi}\, e^{i\frac{\pi}{4}} \frac{\eta(y_0)}{\sqrt{\omega\theta''(y_0)}} e^{i\omega(zy_0+\theta(y_0)-tz)} \frac{dx}{dz}\,dz.$$

Cherchons le maximum de l'exposant :

$$(4) \qquad \Omega = zy_0 + \theta(y_0) - tz,$$

t étant donné et y_0 lié à z par la relation (3); il viendra

$$y_0 + \frac{dy_0}{dz}[z + \theta'(y_0)] - t = 0$$

ou, en vertu de (3),

$$y_0 = t.$$

Notre valeur approchée est donc, d'après les mêmes règles,

$$\sqrt{2\pi}\, e^{-i\frac{\pi}{4}} \left| \sqrt{2\omega}\, e^{i\frac{\pi}{4}} \frac{\eta(t)}{\sqrt{\pi\theta''(t)}} \right| e^{i\omega\theta(t)} \frac{1}{\sqrt{\omega\Theta}} \frac{dx}{dz}.$$

Θ est la valeur absolue de la dérivée seconde de l'exposant, c'est-à-dire de l'expression (4); $\frac{dx}{dz}$ n'est autre que ω; on trouve

$$\Theta = \left| \frac{d^2Q}{dz^2} \right|, \qquad \frac{d^2Q}{dz^2} = 2\frac{dy_0}{dz} + \theta''\left(\frac{dy_0}{dz}\right)^2 + (z + \theta')\frac{d^2y_0}{dz^2};$$

or, en vertu de (3),

$$z + \theta' = 1 + \theta''\frac{dy_0}{dz} = 0,$$

d'où

$$\frac{d^2Q}{dz^2} = -\frac{1}{\theta''}, \quad \Theta = \frac{1}{\theta''}$$

et finalement :

$$2\pi\psi(t) = 2\pi\eta e^{i\omega\theta}.$$

C. Q. F. D.

Je me contenterai de cet aperçu et n'examinerai pas des cas plus compliqués comme ceux où il y a plusieurs maxima.

Appliquons maintenant les mêmes principes à l'intégrale double

(5) $$\int \eta e^{i\omega\theta}\, dx\, dy.$$

Si l'on intègre d'abord par rapport à x, on voit que seuls doivent être retenues : les valeurs de x pour lesquelles (y étant pour un instant regardé comme une constante) θ est maximum ; les points singuliers ; les limites. On renouvelle le raisonnement en intégrant par rapport à y et l'on voit que les seuls éléments de l'intégrale dont il y ait lieu de tenir compte sont ceux qui sont voisins :

1° Des maxima ou minima de θ, à l'intérieur de l'aire d'intégration ;

2° Des points singuliers de η et de θ.

3° Des maxima ou minima de θ sur le contour de l'aire d'intégration.

Occupons-nous d'abord de la première sorte d'éléments. Soit θ_0 le maximum considéré, et supposons qu'on ait choisi l'origine de façon qu'en ce point

$x = y = 0$. Soit dans le voisinage :

$$\eta = \eta_0, \qquad \theta = \theta_0 + \frac{\alpha x^2 + \beta y^2}{2}.$$

Nous sommes conduits à envisager l'intégrale :

$$\int \eta_0 e^{i\omega\theta_0} e^{\frac{i\omega}{2}(\alpha x^2 + \beta y^2)} dx\, dy$$

étendue au plan entier, ce pour quoi on trouve immédiatement :

$$(6) \qquad 2\pi \eta_0 e^{i\omega\theta_0} e^{\frac{i\pi}{2}} \frac{1}{\omega\sqrt{\alpha\beta}}$$

avec une formule analogue pour un maximum. On remarquera que cette expression est de l'ordre de $\frac{1}{\omega}$, tandis que l'erreur commise est de l'ordre de $\frac{1}{\omega\sqrt{\omega}}$.

Laissons de côté les points singuliers et passons à la troisième sorte de points. Nous pouvons dans le voisinage du contour prendre pour coordonnées n et s; où n représente la distance au contour estimée suivant la normale, et s l'arc du contour compté depuis une origine quelconque jusqu'au pied de cette normale. Nous pouvons alors écrire notre intégrale :

$$\int \eta e^{i\omega\theta}\, dn\, ds.$$

En admettant que η et θ se comportent régulièrement dans le voisinage du bord et sans que $\frac{d\theta}{dn}$ s'annule, l'intégration par rapport à n nous donnera comme valeur approchée

$$\int \eta e^{i\omega\theta}\, dn = \frac{k}{\omega} \eta e^{i\omega\theta},$$

k étant un facteur numérique facile à calculer; la seconde intégration nous donne :

$$(6) \qquad \frac{k}{\omega} \int \eta e^{i\omega\theta}\, ds,$$

intégrale simple qu'il faut évaluer par la formule (2) ou (2 *bis*) en observant que, d'après cette formule, l'intégrale est de l'ordre de $\frac{1}{\sqrt{\omega}}$, en se bornant aux éléments voisins des maxima ou minima de θ, éléments qui sont les plus importants. L'expression (6) est donc de l'ordre de $\frac{1}{\omega\sqrt{\omega}}$.

9. Théorie de la propagation rectiligne.

Je crois utile, comme application des principes précédents, de traiter un cas assez général, mais en nous bornant à la première approximation, celle de la propagation rectiligne. Reprenons les hypothèses du paragraphe 3. Par conséquent, notre conducteur intérieur est un corps de révolution, et je supposerai

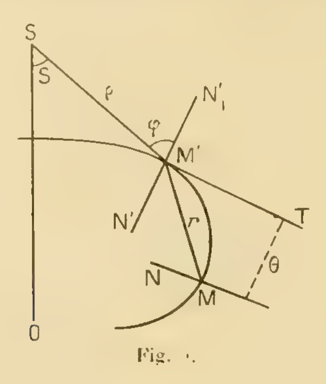


Fig. [illegible].

de plus que c'est un corps convexe. Quant au conducteur extérieur, je supposerai, comme au paragraphe 6, que c'est un excitateur rectiligne, dirigé suivant l'axe de révolution et assez court pour pouvoir être assimilé à un point que j'appelle S. Reprenons l'équation (7) du paragraphe 3 (équation de Fredholm) :

$$\int \mu' \, d\sigma' \left[\frac{d}{dn} \frac{e^{-i\omega r}}{r} + \omega^2 \mathrm{L} \right] - 2\pi\mu = \mathrm{N}.$$

La première chose à faire est de rechercher des expressions asymptotiques du noyau et de N. En ce qui concerne N, nous pouvons nous servir de l'équation (1) du paragraphe 6.

Nous remarquerons que dans le second membre de cette équation, les crochets contiennent trois termes, le premier de l'ordre de ω, le second de l'ordre de 1, et le troisième de l'ordre de $\frac{1}{\omega}$; le premier seul doit être retenu. De plus, les notations doivent être modifiées, car avec les notations du paragraphe 3 que nous adoptons, r désigne la distance MM′ et θ représente l'angle de la tangente méridienne en M′ avec la normale en M. Au lieu d'écrire

$$\mathrm{N} = e^{i\omega(t-r)} \frac{i\omega}{r} \sin\theta \sin\xi$$

nous écrirons, en représentant par N′ la valeur de N au point M′,

$$(1)\qquad N' = e^{i\omega(t-\rho)}\,\frac{i\omega}{\rho}\sin S \sin\varphi,$$

où ρ désigne la distance SM′, S l'angle de SM′ avec l'axe de révolution, et φ le supplément de l'angle de SM′ avec la normale au conducteur en M′. La présence du facteur $\sin\varphi$ s'explique aisément, car à une certaine distance de la source, la force électrique est normale au rayon vecteur qui va à cette source.

Nous avons trouvé d'autre part, au paragraphe 3,

$$\frac{d}{dn}\,\frac{e^{-i\omega r}}{r} = \cos\xi\left[-i\omega - \frac{1}{r}\right]\frac{e^{-i\omega r}}{r},$$

ξ étant l'angle de MM′ avec la normale en M; on peut se borner au terme qui contient ω en facteur, et écrire

$$(2)\qquad \frac{d}{dn}\,\frac{e^{-i\omega r}}{r} = -i\omega\cos\xi\,\frac{e^{-i\omega r}}{r}.$$

Le calcul de L exige un peu plus d'attention. Soit

$$L = e^{-i\omega r}\,Y.$$

Il viendra

$$(3)\qquad \frac{dL}{ds'} = -i\omega e^{-i\omega r}\frac{dr}{ds'}\,Y + e^{-i\omega r}\frac{dY}{ds'}.$$

Le second terme peut être négligé et l'on peut écrire, en tenant compte de (5) du paragraphe 3,

$$L = e^{-i\omega r}\,Y = -\frac{1}{i\omega}\,\frac{ds}{dr}\,\frac{dL}{ds'} = -\frac{1}{i\omega}\,\frac{ds}{dr}\cos\theta\,\frac{e^{-i\omega r}}{r}.$$

Mais $\frac{ds'}{dr}$ est égal à $\frac{1}{\cos\psi}$, ψ étant l'angle de MM′ avec la tangente méridienne en M′.

Il reste donc :

$$(4)\qquad L = -\frac{1}{i\omega}\,\frac{\cos\theta}{\cos\psi}\,\frac{e^{-i\omega r}}{r}$$

et pour le noyau total :

$$(5)\qquad K = \frac{d}{dn}\,\frac{e^{-i\omega r}}{r} + \omega^2 L = i\omega\,\frac{e^{-i\omega r}}{r}\left(\frac{\cos\theta}{\cos\psi} - \cos\xi\right).$$

Considérons une droite issue du point S, elle coupera la surface du conducteur en deux points M_1 et M_2; le premier plus rapproché de S (côté éclairé) et le

second plus éloigné (côté de l'ombre). Nous allons supposer que la densité μ est égale à zéro du côté de l'ombre, et qu'elle est égale du côté éclairé à la composante N au facteur près $\frac{1}{2\pi}$. Nous vérifierons ensuite qu'en première approximation nous satisfaisons ainsi à l'équation de Fredholm.

Nous avons donc à évaluer l'intégrale

$$J = \int N' K \, d\sigma$$

étendue au côté éclairé; K est le noyau, et N' la valeur de N au point M'. Si nous remplaçons K et N' par leurs valeurs (5) et (1), la quantité sous le signe $\int$ sera de la forme $e^{i\omega t} \eta_1 e^{i\omega\zeta}$, en prenant

$$(6) \qquad \zeta = -\rho - r, \qquad \eta_1 = \frac{-\omega^2}{\rho r} \sin S \sin \varphi \left(\frac{\cos \theta}{\cos \psi} - \cos \xi \right) \cdot$$

C'est la forme étudiée au paragraphe précédent, mais j'écris ζ au lieu de θ, la lettre θ étant déjà employée. Les seuls éléments de l'intégrale à conserver sont donc ceux qui correspondent aux maxima et aux minima de ζ, ou de

$$SM' + M'M.$$

Or cette expression ne peut atteindre un maximum ou un minimum que dans deux cas :

1° Si les points S, M' et M sont en ligne droite;

2° Si l'angle des deux vecteurs SM' et M'M a pour bissectrice la normale en M'.

Le premier cas est seul à retenir, le second ne pouvant se présenter si M' est du côté éclairé.

Si M est du côté éclairé, le premier cas ne peut se produire non plus, de sorte que l'intégrale est nulle. Nous n'avons donc à envisager que le cas où M est du côté de l'ombre et sur le prolongement de SM'; la formule à appliquer est la formule (6) du paragraphe 8.

Interprétons les divers facteurs de cette formule; le facteur exponentiel $e^{i\omega\theta_0}$ est ici

$$(7) \qquad e^{-i\omega(r+\rho)} = e^{-i\omega SM},$$

car si S, M', M sont en ligne droite, $r + \rho = SM$. Le facteur η_0 est donné par la seconde formule (6); mais nous observerons que nos angles φ, θ, ψ, ξ, qui

représentent en général ceux de SM′ avec M′N′, prolongement de la normale en M′, de M′T, tangente méridienne en M′ avec MN normale en M, de MM′ avec M′T, et enfin de MM′ avec MN, se trouvent liés par des relations simples lorsque SMM′ sont en ligne droite et que, par conséquent, toutes ces droites sont dans un même plan. On a, en effet,

$$\varphi + \psi = \frac{\pi}{2}, \qquad \xi = \psi + \theta,$$

d'où

$$\sin\varphi\left(\frac{\cos\theta}{\cos\psi} - \cos\xi\right) = \sin\psi \sin\xi$$

et

$$(8) \qquad \zeta_0 = \frac{-\omega^2}{\rho r} \sin S \sin\psi \sin\xi.$$

Reste à évaluer le facteur $\frac{1}{\sqrt{\alpha\beta}}$ de la formule (6) du paragraphe 8. Ce facteur est proportionnel à l'aire de la petite ellipse

$$(9) \qquad \alpha x^2 + \beta y^2 = \varepsilon^2.$$

Or considérons l'ellipsoïde

$$(10) \qquad r + \rho = SM' + M'M = \text{const.}$$

(les points S et M étant regardés comme fixes, et M′ comme variable) et l'intersection de cet ellipsoïde avec la surface du conducteur. Si nous donnons à la constante du dernier membre de (10) une valeur peu différente de SM, cette intersection se réduira à une courbe très petite, assimilable précisément à l'ellipse (9) et c'est l'aire de cette très petite courbe qu'il s'agit d'évaluer.

Dans ce cas, l'ellipsoïde (10) est très allongé, et assimilable à un cylindre; la surface du conducteur, dont une portion infiniment petite intervient seule, peut de son côté être assimilée à un plan, et l'aire de l'ellipse d'intersection est inversement proportionnelle au sinus de l'angle que fait ce plan avec les génératrices du cylindre, c'est-à-dire à $\cos\varphi$ ou à $\sin\psi$.

Il nous suffira donc de faire le calcul dans le cas où $\sin\psi = 1$. Il vient alors :

$$-(r + \rho) = -SM + \frac{\alpha x'^2 + \beta y'^2}{2},$$

$-(r + \rho)$ correspond au θ du paragraphe 8, $-SM$ est le maximum de ce θ que nous appelions θ_0 au paragraphe 8; enfin x' et y' sont les coordonnées du point M′ calculées en prenant pour un instant pour origine le point M'_0, position du point M′ qui correspond à ce maximum, pour plan des xy le plan tangent

en ce point à la surface du conducteur et enfin pour axe des z la droite SM'_0M qui est normale à ce plan tangent puisque nous supposons $\sin\psi = 1$. On trouve alors :

$$r = MM'_0 + \frac{x^2+y^2}{2}\,\frac{1}{MM'_0}, \qquad \rho = SM'_0 + \frac{x^2+y^2}{2}\,\frac{1}{SM'_0},$$

d'où

$$\alpha = \beta = \frac{1}{MM'_0} + \frac{1}{SM'_0} = \frac{1}{r} + \frac{1}{\rho},$$

d'où

$$\sqrt{\alpha\beta} = \frac{r+\rho}{r\rho}$$

et dans le cas général :

$$(11) \qquad \sqrt{\alpha\beta} = \frac{r+\rho}{r\rho}\sin\psi = \frac{SM}{r\rho}\sin\psi.$$

Nous pouvons donc appliquer la formule (6) du paragraphe **8** dont les divers facteurs nous sont donnés par les formules (7), (8) et (11); nous trouvons ainsi :

$$\frac{2i\pi}{\omega}e^{-i\omega SM}\left[\frac{-\omega^2}{\rho r}\sin S\sin\psi\sin\xi\right]\left[\frac{r\rho}{SM\sin\psi}\right],$$

ou enfin

$$(12) \qquad J = -2\pi i\omega e^{-i\omega SM}\frac{\sin S\sin\xi}{SM}e^{i\omega t}.$$

Revenons à la formule (1) qui nous donnait N', pour en déduire la valeur de N; il suffit d'y changer $\rho = SM'$ en SM, et φ angle de SM' avec la normale en M', en ξ angle de SM identique à MM' avec la normale en M; on trouve ainsi :

$$N = e^{i\omega(t-SM)}\frac{i\omega}{SM}\sin S\sin\xi,$$

d'où

$$(13) \qquad J = -2\pi N.$$

Notre équation de Fredholm

$$-\frac{1}{2\pi}J - 2\pi\mu = N$$

est toujours satisfaite. En effet, du côté éclairé on a

$$J = 0, \qquad \mu = -\frac{N}{2\pi}$$

et du côté de l'ombre

$$\mu = 0, \qquad J = -2\pi N.$$

Nous voyons qu'avec l'approximation adoptée, nous justifions les règles de l'optique géométrique.

10. Valeur approchée de P_n.

Nous allons appliquer d'abord les principes du paragraphe 8 à la recherche d'une expression approchée du polynome de Legendre P_n quand n est très grand. Nous partirons de la formule

$$(1) \qquad 2\pi P_n(\cos\varphi) = \int_0^{2\pi} (\cos\varphi + i\sin\varphi\cos\omega)^n \, d\omega.$$

(*Voir*, par exemple, Tisserand, *Mécanique Céleste*, t. II, p. 260.)

Pour n très grand, nous pouvons poser la quantité sous le signe $\int$ égale à $e^{in\theta}$, en posant

$$e^{i\theta} = \cos\varphi + i\sin\varphi\cos\omega.$$

La fonction sous le signe $\int$ ne change pas quand on change ω en $-\omega$, et elle se change en son imaginaire conjuguée quand on change ω en $\pi-\omega$, je puis donc transformer la formule (1) et l'écrire :

$$(2) \qquad \frac{\pi}{2} P_n = \text{partie réelle} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\varphi + i\sin\varphi\cos\omega)^n \, d\omega.$$

Quand ω varie de 0 à $\frac{\pi}{2}$, $e^{i\theta}$ varie de $\cos\varphi + i\sin\varphi$ à $\cos\varphi$; et si, comme nous le supposons, φ est compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$, le module de $e^{i\theta}$ reste plus petit que 1, et la partie imaginaire de θ positive. La seule partie de l'intégrale à conserver est donc celle qui correspond à ω voisin de zéro. Mais si ω est petit, on peut écrire :

$$e^{i\theta} = e^{i\varphi} - \frac{i\sin\varphi}{2}\omega^2 = e^{i\varphi}\left(1 - \frac{i\sin\varphi e^{-i\varphi}}{2}\omega^2\right),$$

d'où, en négligeant toujours ω^4,

$$\theta = \varphi - \frac{\sin\varphi e^{-i\varphi}}{2}\omega^2.$$

Nous avons donc à calculer l'intégrale $\int_0^{\varepsilon} e^{in\theta} d\omega$ où, en appliquant la formule (2 *bis*) du paragraphe 8,

$$\frac{1}{2} e^{ni\varphi} e^{-\frac{i\pi}{4}} \sqrt{\frac{2\pi}{n\sin\varphi e^{-i\varphi}}}.$$

n joue le rôle de ω, $\sin\varphi\, e^{-i\varphi}$ celui de θ'' ; le facteur $\frac{1}{2}$ vient de ce que l'intégrale ne s'étend pas de $-\infty$ à $+\infty$, mais de 0 à $+\infty$. La formule est applicable bien que $\sin\varphi\, e^{-i\varphi}$ ne soit pas réel. Mais il faut pour cela attribuer à l'expression imaginaire $\sqrt{n\sin\varphi\, e^{-i\varphi}}$, qui joue le rôle de $\sqrt{\omega\,|\theta''|}$, un argument compris entre 0 et $-\frac{\pi}{2}$, c'est-à-dire l'argument $-\frac{\varphi}{2}$; notre expression doit donc s'écrire :

$$\frac{1}{2}e^{i\left(n\varphi+\frac{\varphi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}\sqrt{\frac{2\pi}{n\sin\varphi}},$$

de sorte que l'équation (2) nous donne :

$$(3) \qquad P_n = \cos\left(n\varphi+\frac{\varphi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\sqrt{\frac{2}{\pi n\sin\varphi}}.$$

Il est aisé de voir que si l'on change φ en $\pi-\varphi$, cette expression ne change pas si n est pair et change de signe si n est impair ; elle convient donc pour toutes les valeurs de φ comprises entre 0 et π.

Elle devient toutefois illusoire pour les petites valeurs de φ. Si n et $\frac{1}{\varphi}$ sont du même ordre et que $n\varphi = \alpha$ soit fini, on aura sensiblement

$$e^{in\theta} = \left(1+\frac{i\alpha\cos\omega}{n}\right)^n = e^{i\alpha\cos\omega},$$

d'où

$$2\pi P_n = \int_0^{2\pi} e^{i\alpha\cos\omega}\,d\omega,$$

ou enfin

$$(4) \qquad P_n = J_0(\alpha) = J_0(n\varphi),$$

en désignant par J_0 la fonction de Bessel *ordinaire*.

On voit que pour $\varphi = 0$, on trouve comme il convient $P_n = 1$; mais il convient de raccorder les deux formules (3) et (4). Quand φ est petit et que $n\varphi = \alpha$ est grand, la première donne sensiblement

$$P_n = \cos\left(n\varphi-\frac{\pi}{4}\right)\sqrt{\frac{2}{\pi n\varphi}}$$

et la seconde, par la formule approchée des fonctions de Bessel,

$$P_n = \frac{2\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}{\sqrt{2\pi\alpha}} = \cos\left(n\varphi-\frac{\pi}{4}\right)\sqrt{\frac{2}{\pi n\varphi}}.$$

Le raccordement se fait donc sans difficulté.

11. Calcul de I_n et de J_n.

Reprenons l'équation (10) du paragraphe 5, que j'écrirai :

$$(1) \qquad \frac{d^2y}{d\xi^2} + y\left[1 - \frac{n(n+1)}{\xi^2}\right] = 0,$$

et cherchons la valeur approchée des deux intégrales I_n et J_n quand n et ξ sont tous deux très grands. Il est aisé de voir qu'on peut satisfaire à cette équation en faisant

$$(2) \qquad y = \int e^{i\xi x}(x^2-1)^n \xi^{n+1}\, dx,$$

l'intégration étant prise entre des limites convenables; les limites sont les points singuliers -1 et $+1$, et le point ∞ avec cette condition que x devienne infini avec un argument tel que $e^{i\xi x}$ s'annule.

On obtiendra l'intégrale J_n, à un facteur constant près, en intégrant de -1 à $+1$; car dans ces conditions l'expression (2) est une fonction holomorphe de ξ; on obtiendra l'intégrale I_n, à un facteur constant près, en intégrant de $+1$ à l'infini. Car pour x très grand, les seuls éléments sensibles sont ceux où x est voisin de $+1$; ce qui donne un terme sensiblement proportionnel à $e^{i\xi}$.

Nous allons maintenant supposer n et ξ très grands et poser

$$n = z\xi,$$

z étant fini; d'où

$$y = \xi^{n+1}\int e^{i\xi\theta}\, dx,$$

avec

$$\theta = x - iz\log(x^2-1).$$

Nous allons appliquer la formule (2) du paragraphe 8, ξ jouant le rôle de ω. Il nous faut donc chercher les maxima et minima de θ; ils sont donnés par

$$(3) \qquad x = iz \pm \sqrt{1-z^2}.$$

Nous devons distinguer divers cas; soit d'abord $0 < z < 1$; nous pourrons poser $z = \sin\varphi$, d'où, φ étant compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$,

$$x = e^{i\varphi}, \qquad x = -e^{-i\varphi}.$$

Nous devons alors nous rendre compte des variations de la partie imaginaire de θ, elles sont représentées par la figure suivante (*fig.* 3).

Les courbes tracées ont pour équations :

$$\text{partie imaginaire } \theta = \text{const.}$$

Les points A et C sont les points -1 et $+1$ où cette partie imaginaire est égale à ∞ ; les points doubles B et D sont les points $x = e^{i\eta}$, $x = -e^{-i\eta}$; et la valeur correspondante de la partie imaginaire peut s'appeler θ_1. Alors le long

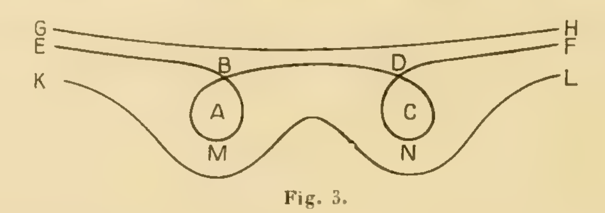


Fig. 3.

de la courbe GH, par exemple, et dans les boucles, cette partie imaginaire est $< \theta_1$, et le long de KL elle est plus grande. Nous devons déformer notre chemin d'intégration de façon que cette partie imaginaire ne descende jamais au-dessous de θ_1 ; nous pouvons donc rester soit à l'intérieur des boucles, soit au-dessus du trait EBDF.

Dans le calcul de J, nous devons aller de A en C, et nous ne pourrons le faire qu'en passant en B et en D ; dans le calcul de I, nous devons aller de A à l'infini, et nous ne pouvons le faire qu'en passant en B et non en D.

Pour l'application de la formule du paragraphe 8, il nous faut calculer θ'' : nous trouvons :

$$(4)\quad \begin{cases} \theta'' = \dfrac{d^2\theta}{dx^2} = \dfrac{2iz(x^2+1)}{(x^2-1)^2} = -ie^{-i\eta}\operatorname{cotg}\eta & \text{pour } x = e^{i\eta} \quad (\text{point D}); \\ \theta'' = -ie^{i\eta}\operatorname{cotg}\eta & \text{pour } x = -e^{-i\eta} \quad (\text{point B}). \end{cases}$$

D'autre part il convient, pour appliquer la formule (2) du paragraphe 8, d'attribuer à $\sqrt{\omega\theta''}\,dx$, ici à $\sqrt{\xi\theta''}\,dx$, un argument compris entre 0 et $+\frac{\pi}{2}$. Or ξ est réel et positif, et l'argument de θ'' dans les deux formules (4) est égal à

$$\eta \mp \frac{\pi}{2} \qquad (\text{signe} - \text{pour le point D, signe} + \text{pour le point B}).$$

Soit alors λ l'argument de dx, on aura :

$$\arg \xi\theta'' dx^2 = 2\lambda + \eta + \frac{\pi}{2} + 2\varepsilon\pi \quad (\text{en B}),$$

$$\arg \xi\theta'' dx^2 = 2\lambda - \eta - \frac{\pi}{2} + 2\varepsilon\pi \quad (\text{en D}),$$

ε étant un entier.

Cet argument doit être compris entre o et π, ce qui donne :

$$\frac{\pi}{4} + \frac{\eta_1}{2} + \varepsilon\pi < \lambda < \frac{3\pi}{4} - \frac{\eta_1}{2} - \varepsilon\pi \quad (\text{en B}),$$

$$\frac{\pi}{4} + \frac{\eta_1}{2} - \varepsilon\pi < \lambda < \frac{3\pi}{4} + \frac{\eta_1}{2} - \varepsilon\pi \quad (\text{en D}).$$

Il s'agit de déterminer ε; pour cela remarquons que si nous intégrons, soit en allant de A à l'infini pour I_n, soit en allant de A à C pour J_n, nous devons passer en B en sortant de la boucle, et en D en rentrant dans la boucle. Cela montre que nous pouvons prendre

$$\lambda = \frac{\pi}{2}, \qquad \varepsilon = 0 \quad (\text{en B}),$$

$$\lambda = -\frac{\pi}{2}, \qquad \varepsilon = 1 \quad (\text{en D}),$$

d'où

$$\sqrt{\xi\theta''} = \sqrt{\xi \operatorname{cotg} \eta_1}\, e^{i\left(\frac{\eta_1}{2} - \frac{\pi}{4}\right)} \quad (\text{en B}),$$

$$\sqrt{\xi\theta''} = \sqrt{\xi \operatorname{cotg} \eta_1}\, e^{i\left(-\frac{\eta_1}{2} + \frac{\pi}{4} + \pi\right)} \quad (\text{en D}),$$

ou, à un facteur constant près $\sqrt{2\pi}$,

$$(5) \qquad y = \xi^{n-1} e^{i\xi x}(x^2 - 1)^n \frac{ie^{\frac{i\eta_1}{2}}}{\sqrt{\xi \operatorname{cotg} \eta_1}} \quad (\text{en B}),$$

$$(5\ bis) \qquad y = \xi^{n-1} e^{i\xi x}(x^2 - 1)^n \frac{ie^{\frac{i\eta_1}{2}}}{\sqrt{\xi \operatorname{cotg} \eta_1}} \quad (\text{en D}).$$

On remarquera que ces deux expressions sont imaginaires conjuguées, car ξ et η_1 sont réels; ix prend en B et en D deux valeurs $ie^{-i\eta_1}$, $ie^{i\eta_1}$ qui sont imaginaires conjuguées. Nous pourrons donc poser

$$y = \mathrm{M} e^{i\alpha} \quad (\text{en B}), \qquad y = \mathrm{M} e^{-i\alpha} \quad (\text{en D}),$$

avec

$$\mathrm{M} = 2^n \xi^{n-1} e^{-\xi \sin \eta_1} \sin^n \eta_1 \frac{1}{\sqrt{\xi \operatorname{cotg} \eta_1}}, \qquad \ldots$$

ou, en tenant compte de $n = \xi \sin \eta_1$,

$$\mathrm{M} = 2^n n^n e^{-n} \sqrt{\frac{2\pi n}{\cos \eta_1}},$$

de sorte que M est égal à $\frac{1}{\sqrt{\cos \eta_1}}$, à un facteur constant près, et

$$(6) \qquad \alpha = \xi \cos \eta_1 - n\eta_1 + \frac{\eta_1}{2} + (n - 1)\frac{\pi}{2}.$$

On aura alors pour I_n, à un facteur constant près : $Me^{i\alpha}$ et pour J_n, à un autre facteur constant près :

$$Me^{i\alpha} + Me^{-i\alpha} = 2M\cos\alpha.$$

Nous voulons déterminer ces facteurs constants, ou plutôt encore calculer

$$I_n J_n = \frac{I'_n J_n}{I'_n J_n - J'_n I_n}.$$

Pour cela, je poserai

$$I_n = CMe^{i\alpha}, \qquad K_n = CMe^{-i\alpha}, \qquad J_n = 2C'M\cos\alpha,$$

C et C′ étant des coefficients constants. Nous avons :

$$I_n = C''\int e^{i\xi x}(x^2-1)^n \xi^{n+1}\,dx$$

(C″ facteur constant) et

$$I'_n = C''\int e^{i\xi x}(x^2-1)^n \xi^{n+1}\left[ix + \frac{n+1}{\xi}\right]dx.$$

Le rapport $\frac{I'_n}{I_n}$ est donc égal à la valeur de

$$ix + \frac{n+1}{\xi}$$

au point B, puisque les seuls éléments sensibles sont ceux voisins du point B ; et comme ξ est très grand et $n = z\xi = \xi\sin\eta_1$, on peut écrire :

$$\frac{I'_n}{I_n} = -i\cos\eta_1 + \sin\eta_1 = -i\cos\eta_1,$$

d'où

$$I'_n = -i\cos\eta_1 CMe^{i\alpha}, \qquad K'_n = i\cos\eta_1 CMe^{-i\alpha},$$

$$J'_n = C'M(-i\cos\eta_1 e^{i\alpha} + i\cos\eta_1 e^{-i\alpha}) = 2\cos\eta_1 C'M\sin\alpha,$$

$$I'_n J_n = -2i\cos\eta_1 CC'M^2 e^{i\alpha}\cos\alpha, \qquad I_n J'_n = 2\cos\eta_1 CC'M^2 e^{i\alpha}\sin\alpha,$$

$$I'_n J_n - I_n J'_n = -2i\cos\eta_1 CC'M^2$$

et enfin

(7) $$I'_n J_n = \frac{I'_n J_n}{I'_n J_n - I_n J'_n} = e^{i\alpha}\cos\alpha.$$

Le cas suivant est celui où $z = 1$. Dans ce cas les points B et D se confondent, et les courbes de la figure 3 doivent être modifiées comme l'indique la figure 4.

Nous reviendrons sur ce cas. Vient ensuite le cas où $z > 1$; dans ce cas les deux valeurs singulières de x qui correspondent aux points B et D sont l'une et l'autre purement imaginaires.

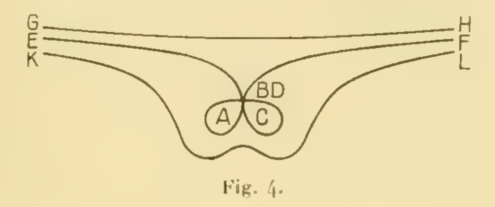


Fig. 4.

Les courbes se comportent comme sur la figure 5 :

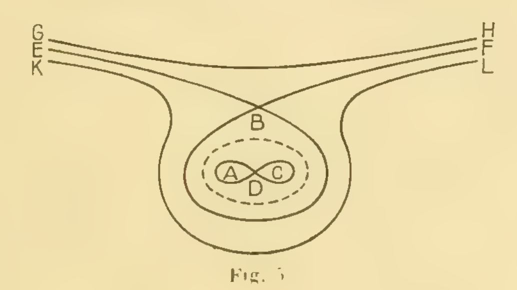


Fig. 5.

Quand on intégrera depuis A jusqu'à l'infini pour obtenir I_n, le chemin d'intégration devra passer par le point B, sous peine de franchir des régions où la partie imaginaire de θ est plus petite qu'en B; de même, quand on intégrera de A en C pour obtenir J_n le chemin d'intégration devra passer par le point D, mais il ne sera pas nécessaire de le faire passer en B.

Pour le calcul des éléments de l'intégrale (2) voisins de B ou de D, nous pourrons toujours nous servir des mêmes formules et écrire

$$y = Me^{i\alpha} \quad (\text{en B}), \qquad y = Me^{-i\alpha} \quad (\text{en D}),$$

M et α étant toujours définis de la même manière. Seulement il ne faut pas oublier que M et α ne sont plus réels; les deux quantités imaginaires $Me^{i\alpha}$ et $Me^{-i\alpha}$ ne sont plus conjuguées et n'ont plus même module; la seconde est beaucoup plus petite en valeur absolue que la première. Nous aurons encore :

$$I_n = CMe^{i\alpha},$$

mais la formule pour J_n sera modifiée puisque le chemin d'intégration ne passe plus en B et nous aurons :

$$J_n = C'Me^{-i\alpha}.$$

On tire de là, comme plus haut,

$$\frac{I'_n}{I_n} = -i\cos\tau_1, \qquad \frac{J'_n}{J_n} = i\cos\tau_1,$$

$$I'_n J_n = \frac{I_n J'_n}{I'_n J_n - J'_n I_n} = \frac{\frac{I'_n}{I_n}}{\frac{I'_n}{I_n} - \frac{J'_n}{J_n}} = \frac{-i\cos\tau_1}{-i\cos\tau_1 - (i\cos\tau_1)},$$

ou enfin

(8) $$I'_n J_n = \frac{1}{2}.$$

12. **Étude des cas limites.**

Nous devons revenir sur le cas de $z = 1$ ou voisin de 1. Si l'on appliquait l'une des formules (5) ou (5 *bis*) du paragraphe précédent, on trouverait que pour $z = 1$, on a $\tau_1 = 0$, de sorte que les seconds membres de (5) ou (5 *bis*) deviennent infinis. On devrait donc conclure que quand z tend vers 1, J_n et I_n tendent vers l'infini. Il est clair qu'il n'en est rien, et d'ailleurs si l'on se reporte à la figure, on voit que pour $z = 1$ les points B et D se confondent, l'intégrale (2) prend alors la forme :

$$\int \eta\, e^{i\omega\theta}\, dx,$$

où θ' et θ'' s'annulent à la fois. On peut, dans le voisinage du point singulier, où nous supposerons qu'on ait transporté l'origine par un changement simple de variable, prendre $\eta =$ const. :

$$\theta = \alpha + \beta x^3.$$

On a alors l'intégrale

$$\eta\, e^{i\alpha\omega} \int e^{i\omega\beta x^3}\, dx,$$

qui est de l'ordre de $\frac{1}{\sqrt[3]{\omega}}$, au lieu d'être de l'ordre de $\frac{1}{\sqrt{\omega}}$. Ce qui arrive donc, ce n'est pas que J_n devienne infini pour $z = 1$, mais que le rapport de la valeur de J_n pour $z = 1$, à sa valeur pour $z \neq 1$, est *très grand*, et, pour préciser, très grand de l'ordre de $\omega^{\frac{1}{6}}$.

En effet, les raisonnements par lesquels nous avons établi nos formules approchées ne sont plus valables si deux points singuliers, par exemple deux

maxima ou minima de θ, sont très rapprochés l'un de l'autre. Il importe de voir comment se fait le raccordement des diverses formules approchées.

A cet effet, envisageons l'intégrale

$$(1) \qquad y = \int e^{i\omega\theta}\, dx,$$

où

$$\theta = x\alpha^2 - \frac{x^3}{3}.$$

La dérivée de θ s'annule pour $x = \pm\alpha$; qu'arrive-t-il si α est très petit en même temps que ω très grand? Les seuls éléments sensibles de l'intégrale sont ceux qui sont voisins de $\pm\alpha$, et par conséquent de zéro. Nous pouvons donc choisir les limites arbitrairement; nous les prendrons à l'infini avec des arguments différents de 120° et choisis de telle sorte que

$$e^{-i\omega\frac{x^3}{3}} = 0.$$

Pour transformer l'intégrale (1), posons

$$x = \xi\omega^{-\frac{1}{3}};$$

il viendra

$$y = \omega^{-\frac{1}{3}} \int e^{i\left(t\xi - \frac{\xi^3}{3}\right)}\, d\xi,$$

avec

$$t = \alpha^2\omega^{\frac{2}{3}}.$$

Il est aisé de vérifier que y satisfait à l'équation

$$(2) \qquad \frac{d^2y}{dt^2} + ty = 0;$$

on voit tout de suite que y est une *fonction entière de t*, développable suivant les puissances croissantes de t et que la loi des coefficients successifs de ce développement est très simple. Mais il importe de préciser davantage; pour cela, je suppose t réel positif et je construis les courbes d'égale partie imaginaire de l'expression

$$t\xi - \frac{\xi^3}{3}.$$

J'obtiens ainsi la figure suivante (*fig.* 6).

Nous supposons $\omega > 0$, et nous faisons la figure dans le plan des x.

Les courbes tracées sont celles pour lesquelles la partie imaginaire est nulle; les points A et B sont les points singuliers

$$\xi = \pm\sqrt{t} \quad \text{ou} \quad x = \pm\,\omega^{-\frac{1}{3}}\sqrt{t};$$

les régions couvertes de hachures sont celles où la partie imaginaire est négative; ce sont celles où le contour d'intégration, sous sa forme définitive, ne doit pas

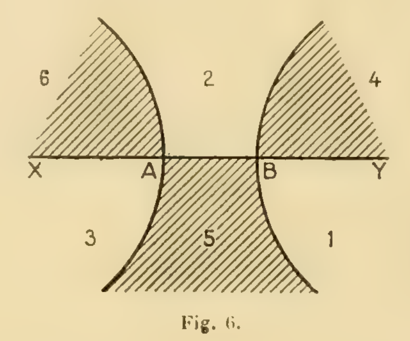


Fig. 6.

pénétrer. Nous distinguerons trois déterminations remarquables de notre intégrale que j'appellerai

$$\int_3^1, \quad \int_1^2, \quad \int_2^3,$$

parce que la première, par exemple, est prise depuis $\xi = \infty$ dans la région 3 jusqu'à $\xi = \infty$ dans la région 1. Ces trois déterminations ne sont pas indépendantes et leur somme est évidemment nulle, puisque les trois contours d'intégration réunis équivalent à un contour fermé. Si la première est représentée par $F(t)$, les deux autres le seront par

$$e^{\frac{2i\pi}{3}}\,F\left(te^{\frac{2i\pi}{3}}\right), \quad e^{\frac{4i\pi}{3}}\,F\left(te^{\frac{4i\pi}{3}}\right).$$

Celle qui nous convient, c'est celle qui équivaut à l'intégrale prise le long de l'axe réel; c'est donc $\int_3^1 = F(t)$. Les deux premiers coefficients du développement de F, suivant les puissances de t,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\frac{\xi^3}{3}}\,d\xi, \quad i\int_{-\infty}^{+\infty} \xi e^{i\frac{\xi^3}{3}}\,d\xi,$$

intégrales prises le long de l'axe réel, se calculent aisément par les fonctions

eulériennes, et il est encore plus aisé d'en déduire les coefficients suivants par l'équation (2). Les termes en t^2, t^5, t^8, ... manquent. Soit donc

(3) $$F(t) = A_0 + A_1 t + \ldots,$$

avec

$$A_0 = 3^{-\frac{1}{6}}\,\Gamma\left(\frac{1}{3}\right), \qquad A_1 = 3^{\frac{1}{6}}\,\Gamma\left(\frac{2}{3}\right).$$

On aura : pour $t = 0$, $y = A_0\omega^{-\frac{1}{3}}$; pour t très petit,

$$y = A_0\omega^{-\frac{1}{3}} - A_1 t\,\omega^{-\frac{1}{3}} = A_0\omega^{-\frac{1}{3}} + A_1\alpha^2\omega^{\frac{1}{3}}.$$

Qu'arrive-t-il pour t très grand? On doit remplacer l'intégrale $F(t)$ par sa valeur asymptotique; celle-ci pourrait se calculer directement, mais il est plus simple d'appliquer les formules (2) et (2 *bis*) du paragraphe 8. On trouve :

$$x = -\alpha \quad \text{min}; \qquad \theta = -\frac{2\alpha^3}{3}; \qquad \theta'' = 2\alpha;$$

$$x = \alpha \quad \text{max}; \qquad \theta = +\frac{2\alpha^3}{3}; \qquad \theta'' = -2\alpha,$$

d'où, par application des formules du paragraphe 8,

$$y = \sqrt{\frac{\pi}{\omega\alpha}}\left[e^{i\frac{\pi}{4}}e^{-i\frac{2\alpha^3\omega}{3}} + e^{-i\frac{\pi}{4}}e^{i\frac{2\alpha^3\omega}{3}}\right]$$

ou

$$y = 2\sqrt{\frac{\pi}{\omega\alpha}}\cos\left(\frac{2\alpha^3\omega}{3} - \frac{\pi}{4}\right)$$

ou enfin :

$$y = 2\sqrt{\pi}\,\omega^{-\frac{1}{3}}\,t^{-\frac{1}{4}}\cos\left(\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} - \frac{\pi}{4}\right)$$

ou

(4) $$F(t) = 2\sqrt{\pi}\,t^{-\frac{1}{4}}\cos\left(\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} - \frac{\pi}{4}\right).$$

Lorsque t est très grand, mais négatif, cette formule doit être modifiée. Les deux points singuliers deviennent imaginaires

$$\xi = \pm i\sqrt{|t|}.$$

Les courbes de la figure 6 se déforment et prennent la disposition de la figure 7. — Les courbes en trait plein EF, XY et GH sont les courbes de partie imaginaire nulle; les régions hachées sont celles où cette partie imaginaire est négative.

J'ai tracé, en outre, les deux courbes MNPQ et M'N'P'Q' qui ont les points singuliers A et B pour points doubles. Sur la première la partie imaginaire est constante et positive; sur la seconde, constante et négative.

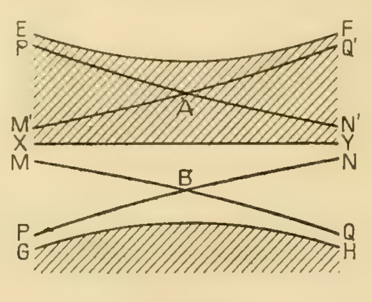


Fig. 7.

Nous pouvons alors tracer notre chemin d'intégration par le point B, d'abord entre les deux branches MB et PB, puis entre les deux branches BN et BQ. Les seuls éléments sensibles sont voisins de B et il nous reste

$$F(t) = \sqrt{\pi}\, t^{-\frac{1}{4}} e^{-i\left(\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} - \frac{\pi}{4}\right)},$$

en attribuant à t l'argument qui convient pour le point B, c'est-à-dire pour

$$\xi = -i\sqrt{|t|},$$

c'est-à-dire l'argument π, et par conséquent à $t^{-\frac{1}{4}}$, $t^{\frac{3}{2}}$ les arguments $-\frac{\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{2}$.

Appliquons ces principes au calcul approché de J_n et reprenons les notations du paragraphe précédent. Nous avons trouvé pour z notablement plus petit que 1:

$$J_n = 2C'M\cos\alpha$$

et pour z notablement plus grand que 1:

$$J_n = C'M e^{-i\alpha}.$$

Ces deux expressions proportionnelles à $\omega^{-\frac{1}{2}}$, deviendraient infinies pour $z = 1$; pour $z = 1$, le calcul direct nous donnerait une troisième expression contenant en facteur $\omega^{-\frac{1}{3}}$, et il s'agit d'opérer le raccordement de ces trois expressions.

Reprenons la formule (6) du paragraphe précédent qui donne α, et faisons-y

$$\eta = \frac{\pi}{2} - \varepsilon, \quad n = z\xi = \xi\sin\eta = \xi\cos\varepsilon;$$

il viendra (inutile d'ajouter que ξ n'a plus la même signification que dans le début du présent paragraphe, mais bien celle qu'il avait dans le paragraphe précédent) :

$$\chi = -\xi \sin\varepsilon + \xi\varepsilon \cos\varepsilon + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\pi}{4} - n\pi,$$

ou, si ε est très petit et $\xi\varepsilon^3$ fini ou très grand,

$$\chi = \frac{\xi\varepsilon^3}{3} + \frac{\pi}{4} - n\pi.$$

L'analogie avec l'analyse qui précède et l'étude de l'intégrale (1) est évidente. Il suffit pour passer d'un cas à l'autre de faire jouer à ε le rôle de α, et à ξ celui de 2ω. Soit donc

$$(-1)^n C' M = \sqrt{\frac{2\pi}{\xi\varepsilon}}\, M_1, \qquad t = \varepsilon^2 \left(\frac{\xi}{2}\right)^{\frac{2}{3}},$$

et comme M est proportionnel à $\frac{1}{\sqrt{\cos\eta}} = \frac{1}{\sqrt{\sin\varepsilon}}$, on aura $M_1 = K\sqrt{\frac{\xi\varepsilon}{\sin\varepsilon}}$, K étant un coefficient constant. Nous aurons :

$$(5)\qquad \begin{cases} \text{pour } \varepsilon \text{ notablement} < 1: & J_n = 2\sqrt{\dfrac{2\pi}{\xi\varepsilon}}\, M_1 \cos\left(\dfrac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} - \dfrac{\pi}{4}\right); \\ \text{pour } \varepsilon \text{ voisin de } 1: & J_n = M_1 \left(\dfrac{\xi}{2}\right)^{-\frac{1}{3}} F(t); \\ \text{pour } \varepsilon = 1: & J_n = M_1 \left(\dfrac{\xi}{2}\right)^{-\frac{1}{3}} A_0; \\ \text{pour } \varepsilon \text{ notablement} > 1: & J_n = \sqrt{\dfrac{2\pi}{\xi\varepsilon}}\, M_1 e^{i\left(\frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} - \frac{\pi}{4}\right)}. \end{cases}$$

Le raccordement est effectué, et l'on voit que $\frac{J_n}{M_1}$ est dans les deux cas extrêmes de l'ordre de $\xi^{-\frac{1}{2}}$ et dans les deux cas moyens de l'ordre de $\xi^{-\frac{1}{3}}$.

Il faut maintenant examiner ce qui se passe pour I_n.

L'intégrale qui correspond à I_n, est celle qui est prise le long d'un chemin passant par le point A, soit sur la figure 6, soit sur la figure 7, et allant de la région 3 à la région 2 ; c'est donc l'intégrale

$$\int_3^2 = e^{\frac{4i\pi}{3}} F\left(t e^{\frac{4i\pi}{3}}\right),$$

de sorte que nous aurons

(6) $$I_n = CM_1\left(\frac{\xi}{2}\right)^{-\frac{1}{3}} F\left(t\,e^{\frac{4i\pi}{3}}\right)\left(-e^{\frac{4i\pi}{3}}\right),$$

t ayant le même sens que dans les formules (5).

Étudions maintenant les dérivées telles que I'_n et J'_n. Nous avons trouvé, en nous rappelant la valeur de M_1,

$$J_n = K\sqrt{\frac{\xi\varepsilon}{\sin\varepsilon}}\left(\frac{\xi}{2}\right)^{-\frac{1}{3}} F(t),$$

K étant un coefficient constant; ε étant très petit, nous pouvons, en confondant l'arc avec le sinus et en incorporant $2^{\frac{1}{3}}$ au coefficient K, écrire :

(7) $$J_n = K_1\xi^{\frac{1}{6}} F(t)$$

et de même :

(8) $$I_n = K'_1\xi^{\frac{1}{6}} F\left(t\,e^{\frac{4i\pi}{3}}\right),$$

K_1 et K'_1 étant constants. Les dérivées J'_n et I'_n doivent être prises par rapport à ξ; mais t, ξ et ε sont liés par les relations :

$$t = \varepsilon^2\left(\frac{\xi}{2}\right)^{\frac{2}{3}}, \qquad n = \xi\cos\varepsilon;$$

on tire de là :

$$\frac{dt}{t} = \frac{2\,d\varepsilon}{\varepsilon} + \frac{2}{3}\frac{d\xi}{\xi}, \qquad d\xi = \xi\,\mathrm{tg}\,\varepsilon\,d\varepsilon$$

ou sensiblement :

$$\frac{dt}{t} = \frac{2\,d\varepsilon}{\varepsilon}, \qquad d\xi = \xi\varepsilon\,d\varepsilon. \qquad \frac{dt}{d\xi} = \frac{2t}{\xi\varepsilon^2} = \left(\frac{2}{\xi}\right)^{\frac{1}{3}},$$

d'où :

$$J'_n = K_1\sqrt[3]{2}\,\xi^{-\frac{1}{6}} F'(t) + \frac{K_1}{6}\xi^{-\frac{5}{6}} F(t),$$

$$I'_n = K'_1\sqrt[3]{2}\,e^{\frac{4i\pi}{3}}\xi^{-\frac{1}{6}} F'\left(t\,e^{\frac{4i\pi}{3}}\right) + \frac{K'_1}{6}\xi^{-\frac{5}{6}} F\left(t\,e^{\frac{4i\pi}{3}}\right).$$

On vérifie que

$$I'_nJ_n - J'_nI_n = K_1K'_1\sqrt[3]{2}\left[e^{\frac{4i\pi}{3}} F'\left(t\,e^{\frac{4i\pi}{3}}\right)F(t) - F'(t)F\left(t\,e^{\frac{4i\pi}{3}}\right)\right]$$

se réduit bien à une constante; de sorte qu'il est possible de disposer des coefficients K_1 et K'_1 de telle façon que cette expression se réduise à 1. On

trouve d'ailleurs :

$$\text{(9)}\qquad I'_n J_n = K_1 K'_1 \left[\sqrt[4]{2}\, e^{\frac{4i\pi}{3}} F'\left(t e^{\frac{4i\pi}{3}}\right) F(t) + \frac{1}{6} \xi^{-\frac{2}{3}} F(t) F\left(t e^{\frac{4i\pi}{3}}\right)\right].$$

On voit que $I'_n J_n$ se décompose en deux termes; le premier est une fonction entière de t, le second, négligeable par rapport au premier, est une fonction entière de t, multipliée par $\xi^{-\frac{2}{3}}$.

Revenons à la figure 6. Nos trois intégrales fondamentales sont, comme on l'a vu,

$$\int_3^1 = F(t), \qquad \int_1^2 = e^{\frac{2i\pi}{3}} F\left(t e^{\frac{2i\pi}{3}}\right), \qquad \int_2^3 = e^{\frac{4i\pi}{3}} F\left(t e^{\frac{4i\pi}{3}}\right).$$

La première est réelle, les deux autres sont imaginaires conjuguées. Tout cela suppose que ω est positif. Supposons maintenant $\omega < 0$ et reprenons la figure 6. Les régions où la quantité sous le signe $\int$ sera très petite, ne seront plus celles qui ne sont pas couvertes de hachures, mais au contraire les régions 4, 5 et 6 qui sont couvertes de hachures, puisque l'exposant $-i\omega\frac{x^3}{3}$ a changé de signe. Les intégrales que nous avons à envisager sont donc les suivantes :

$$\int_6^4, \quad \int_4^5, \quad \int_5^6.$$

La première est égale à $F(t)$; en effet l'intégrale peut être considérée comme prise le long de l'axe réel : les deux intégrales

$$\int_3^1 e^{i\omega\theta}\, dx, \quad \int_6^4 e^{-i\omega\theta}\, dx$$

seront donc imaginaires conjuguées; la première est réelle et égale à $F(t)$; il en sera donc de même de la seconde. De même

$$\int_1^2 e^{i\omega\theta}\, dx, \quad \int_4^5 e^{-i\omega\theta}\, dx$$

seront imaginaires conjugués, puisque les deux chemins 1.2 et 4.5 sont imaginaires conjugués; nous aurons donc :

$$\int_4^5 = \int_2^3 = e^{\frac{2i\pi}{3}} F\left(t e^{\frac{2i\pi}{3}}\right).$$

13. Calcul de A_n.

Reportons-nous aux formules (2) et (9) du paragraphe 6, paragraphe dont nous reprenons les notations.

Dans ces formules figure un coefficient A_n, dont il convient de calculer la valeur approchée. Nous trouverons plus loin, au paragraphe 16, une expression simple et rigoureuse pour ce coefficient A_n. Nous allons néanmoins indiquer deux méthodes différentes pour le calcul approché de ce coefficient.

A cet effet je me servirai de la formule suivante. Soit F une fonction quelconque de l'angle φ, elle pourra être développée en série de polynomes de Legendre sous la forme :

$$F(\varphi) = \Sigma K_n P_n(\cos\varphi)$$

et on aura :

$$(1) \qquad \frac{2K_n}{2n+1} = \int_{-1}^{1} F(\varphi) P_n(\cos\varphi)\, d(\cos\varphi) = \int_0^{\pi} F(\varphi) P_n(\cos\varphi) \sin\varphi\, d\varphi = \int P_n F \frac{d\sigma}{2\pi},$$

$d\sigma$ représentant l'élément de surface de la sphère.

Si nous appliquons cette règle à la formule (2) du paragraphe 6, que j'écris :

$$(2) \qquad f'^{*} = e^{i\omega t} \sum A_n J_n(\omega\rho) \frac{1}{\rho^2} P_n(\cos\varphi),$$

nous trouverons :

$$(3) \qquad \frac{2e^{i\omega t}}{2n+1} A_n J_n(\omega\rho) \frac{1}{\rho^2} = \int_0^{\pi} f'^{*} P_n(\cos\varphi) \sin\varphi\, d\varphi.$$

Quant à f'^{*}, c'est une fonction de φ, définie par la formule (1) du paragraphe 6; rappelons d'ailleurs que l'on a, dans le triangle SOM dont les côtés sont r, D et ρ, et les angles φ, θ et $\pi - \xi$:

$$\frac{\sin\xi}{D} = \frac{\sin\varphi}{r} = \frac{\sin\theta}{\rho}.$$

Nous devons considérer ρ et D comme donnés, de sorte que r sera donné en fonction de φ par

$$r^2 = \rho^2 + D^2 - 2D\rho\cos\varphi.$$

Supposons d'abord ρ sensiblement plus petit que D, de telle façon que r ne puisse devenir très petit; nous pourrons alors profiter de la grandeur de ω pour

appliquer nos formules approchées. D'abord nous pouvons réduire la formule (1) du paragraphe 6 à son premier terme et écrire :

$$(4)\qquad 4\pi f^* = e^{i\omega(t-r)}\frac{i\omega}{r}\sin\theta\sin\xi.$$

D'autre part, nous pouvons remplacer P_n par sa valeur approchée du paragraphe 10 et écrire :

$$P_n = \cos\left(n\varphi + \frac{\varphi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\sqrt{\frac{2}{\pi n \sin\varphi}}.$$

Nous avons donc à envisager l'intégrale

$$\frac{1}{4\pi}\sqrt{\frac{2}{\pi n}}\int_0^\pi e^{-i\omega r}\cos\left(n\varphi + \frac{\varphi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\sqrt{\sin\varphi}\,d\varphi,$$

en supprimant dans les deux membres de (3) le facteur $e^{i\omega t}$.

Cette intégrale se décompose en deux que j'écris, en omettant le facteur $\frac{1}{8\pi}\sqrt{\frac{2}{\pi n}}$:

$$(5)\qquad \int e^{i(n\varphi-\omega r)}e^{i\left(\frac{\varphi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}\sqrt{\sin\varphi}\,d\varphi$$

et

$$(5\ bis)\qquad \int e^{-i(n\varphi+\omega r)}e^{-i\left(\frac{\varphi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}\sqrt{\sin\varphi}\,d\varphi.$$

Comme n est un très grand nombre et que l'on peut poser

$$n = \beta\omega\rho = \omega\rho\sin\eta,$$

on voit que ces deux intégrales sont de la forme $\int e^{i\omega\theta}\eta\,d\varphi$, considérée au paragraphe 8, mais où la fonction qui joue le rôle de θ est de la forme :

(6) $(\beta\rho\varphi - r)$ pour l'intégrale (5);

(6 *bis*) $-(\beta\rho\varphi + r)$ pour l'intégrale (5 *bis*).

Nous sommes donc conduits à rechercher les maxima et les minima des expressions (6) et (6 *bis*); la dérivée de (6) est

$$\beta\rho - \frac{dr}{d\varphi} = \beta\rho - \frac{D\rho\sin\varphi}{r}.$$

En l'égalant à zéro, nous trouvons

$$\beta r = D\sin\varphi = r\sin\xi$$

ou

$$\sin\xi = \varepsilon = \sin\eta.$$

Cela comporte deux solutions :

$$\xi = \eta, \qquad \xi = \pi - \eta.$$

Il est aise de construire les deux triangles SOM correspondants. La valeur de l'angle θ sera la même pour ces deux triangles; je l'appelle θ_0 et elle est donnée par

$$\sin\theta_0 = \frac{n}{\omega D}$$

Cet angle est réel si $n < \omega D$, ce que nous supposerons d'abord. Cela posé, les points S et O sont fixes, nous construirons la droite SM qui fait cet angle θ_0 avec SO, et nous la coupons par la circonférence de centre O et de rayon ρ; les deux points d'intersection nous donneront les deux positions possibles du point M, que j'appellerai M_0 et M_1; j'appellerai φ_0 et φ_1, r_0 et r_1 les valeurs correspondantes de φ et de r. J'aurai :

$$\varphi_0 = \eta - \theta_0, \qquad \varphi_1 = \pi - \eta - \theta_0, \qquad \varphi_1 - \varphi_0 = \pi - 2\eta, \qquad \varphi_1 + \varphi_0 = \pi - 2\theta_0,$$

$$r_0 + r_1 = 2D\cos\theta_0, \qquad r_1 - r_0 = 2\rho\cos\eta.$$

Il faut pour que ces points soient réels que ρ soit plus grand que $\frac{n}{\omega}$.

Pour la formule (6 *bis*) on trouverait de même :

$$\varepsilon r = D\sin\varphi = r\sin\xi, \qquad \sin\xi = -\sin\eta,$$

ce qui est impossible car les angles ξ et η sont par hypothèse compris tous deux entre o et π. La formule (6 *bis*) ne présente donc pas de maximum et de minimum, de sorte que nous n'avons pas à nous inquiéter de l'intégrale (5 *bis*); au contraire, nous devons appliquer à l'intégrale (5) les formules (2) et (2 *bis*) du paragraphe 8. Nous observerons que $\varphi = \varphi_0$ correspond à un maximum et $\varphi = \varphi_1$ à un minimum; et il nous faut pour appliquer les formules du paragraphe 8 rechercher les valeurs des quantités qui correspondent aux θ, η et θ'' de ce paragraphe.

En ce qui concerne le θ du paragraphe 8, nous trouvons :

$$\rho\varphi_0 \sin\eta - r_0 \quad (\text{pour } \varphi_0);$$

$$\rho\varphi_1 \sin\eta - r_1 \quad (\text{pour } \varphi_1).$$

En ce qui concerne le η du paragraphe 8 nous trouvons :

$$\frac{i\omega}{r_0}\sin\theta_0\sin\eta\, e^{i\left(\frac{\varphi_0}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}\sqrt{\sin\varphi_0}\quad(\text{pour } \varphi_0);$$

$$\frac{i\omega}{r_1}\sin\theta_0\sin\eta\, e^{i\left(\frac{\varphi_1}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}\sqrt{\sin\varphi_1}\quad(\text{pour } \varphi_1).$$

Reste la dérivée seconde θ'' du paragraphe 8; elle est égale à $-\frac{d^2r}{d\varphi^2}$ et on trouve, par un calcul simple, en partant des relations trigonométriques et les différentiant,

$$r\frac{dr}{d\varphi} = \mathrm{D}\rho\sin\varphi = \mathrm{D}r\sin\theta,$$

$$\frac{dr}{d\varphi} = \mathrm{D}\sin\theta,\qquad \frac{d^2r}{d\varphi^2} = \mathrm{D}\cos\theta\frac{d\theta}{d\varphi},$$

$$\mathrm{D}\cos\theta\, d\varphi = \rho\cos\xi\, d\xi = \rho\cos\xi\,(d\theta + d\varphi).$$

$$\frac{d\theta}{d\varphi} = \frac{\rho\cos\xi}{\mathrm{D}\cos\theta - \rho\cos\xi} = \frac{\rho\cos\xi}{r},\qquad \frac{d^2r}{d\varphi^2} = \frac{\mathrm{D}\rho}{r}\cos\xi\cos\theta.$$

La dérivée seconde cherchée est donc :

$$-\frac{\mathrm{D}\rho}{r_0}\cos\eta\cos\theta_0\quad(\text{pour } \varphi_0);$$

$$+\frac{\mathrm{D}\rho}{r_1}\cos\eta\cos\theta_0\quad(\text{pour } \varphi_1).$$

Les formules (2) et (2 *bis*) du paragraphe 8 nous donnent alors pour l'intégrale (5) :

$$(7)\quad\left[\frac{i\omega}{r_0}\sqrt{\sin\varphi_0}\sqrt{\frac{2\pi}{\omega\cos\eta\cos\theta_0\frac{\mathrm{D}\rho}{r_0}}}\,e^{i\beta_0} + \frac{i\omega}{r_1}\sqrt{\sin\varphi_1}\sqrt{\frac{2\pi}{\omega\cos\eta\cos\theta_0\frac{\mathrm{D}\rho}{r_1}}}\,e^{i\beta_1}\right]\sin\theta_0\sin\eta,$$

avec

$$(8)\quad\begin{cases}\beta_0 = \omega(\rho\varphi_0\sin\eta - r_0) + \frac{\varphi_0}{2} - \frac{\pi}{2},\\ \beta_1 = \omega(\rho\varphi_1\sin\eta - r_1) + \frac{\varphi_1}{2}.\end{cases}$$

Si l'on se rappelle que

$$\frac{r_0}{\sin\varphi_0} = \frac{r_1}{\sin\varphi_1} = \frac{\rho}{\sin\theta_0},$$

on voit que l'expression (7) prend immédiatement la forme :

$$(7\ bis)\qquad \frac{i\sqrt{2\pi\omega}\sin\theta_0\sin\eta}{\sqrt{\mathrm{D}\rho\cos\theta_0\cos\eta}}\sqrt{\frac{\sin\theta_0}{\rho}}\,(e^{i\beta_0} + e^{i\beta_1})$$

et alors notre équation (3) s'écrit :

$$(3\ bis)\qquad \frac{2A_n}{2n+1}J_n(\omega\rho)\frac{1}{\rho^2} = \frac{1}{8\pi}\sqrt{\frac{2}{\pi n}}\,\frac{i\sqrt{2\pi\omega}\,\sin\theta_0\,\sin\eta}{\sqrt{D\rho\cos\theta_0\cos\eta}}\sqrt{\frac{\sin\theta_0}{\rho}}\,(e^{i\beta_0}+e^{i\beta_1}).$$

Nous allons dans le premier membre remplacer J_n par sa valeur approchée. Nous avons vu au paragraphe 11 que J_n est égal, à un facteur constant près, à

$$2\frac{1}{\sqrt{\cos\eta}}\cos\alpha,$$

où

$$\alpha = -\xi\cos\eta - n\eta - \frac{\eta}{2} - (n-1)\frac{\pi}{2}.$$

Dans cette formule η et n ont la même signification que dans le présent paragraphe, mais ξ représente l'argument de J_n et doit être remplacé par $\omega\rho$. On a donc :

$$(9)\qquad \alpha = -\omega\rho\cos\eta - \omega\rho\eta\sin\eta - \frac{\eta}{2} - (n-1)\frac{\pi}{2}.$$

D'autre part, les formules (8), et celles qui nous donnent les sommes et les différences $\varphi_1 \pm \varphi_0$, $r_1 \pm r_0$, nous donnent :

$$\beta_1+\beta_0 = \omega\rho\sin\eta(\pi-2\theta_0) - 2\omega D\cos\theta_0 - \theta_0,$$

$$\beta_1-\beta_0 = \omega\rho\sin\eta(\pi-2\eta) - 2\omega\rho\cos\eta - \eta + \pi$$

ou

$$\beta_1-\beta_0 = -2\omega\rho\cos\eta - 2\omega\rho\eta\sin\eta - \eta + (n+1)\pi$$

ou

$$\beta_1-\beta_0 = 2\alpha + 2n\pi.$$

D'autre part, nous poserons $\beta_1+\beta_0 = 2\gamma$ et nous aurons :

$$(10)\qquad \gamma = \frac{n\pi}{2} - n\theta_0 - \omega D\cos\theta_0 - \frac{\theta_0}{2},$$

d'où

$$e^{i\beta_0}+e^{i\beta_1} = 2(-1)^n\cos\alpha\, e^{i\gamma}.$$

Nous remarquerons, en outre, que $\sin\eta = \frac{n}{\omega\rho}$ et que

$$J_n = 2K\frac{\cos\alpha}{\sqrt{\cos\eta}},$$

K étant un coefficient constant; notre formule (3 *bis*) deviendra :

$$\frac{4A_n}{2n+1}K\frac{\cos\alpha}{\rho^2\sqrt{\cos\eta}} = \frac{i}{8\pi}\sqrt{\frac{2}{\pi n}}\sqrt{\frac{2\pi}{\omega}}\,\frac{n\sin\theta_0}{\rho^2\sqrt{\cos\eta}}\sqrt{\frac{\sin\theta_0}{D\cos\theta_0}}\,2(-1)^n\cos\alpha\, e^{i\gamma}$$

ou enfin

$$(11)\qquad A_n K = i(-1)^n e^{i\gamma} \frac{2n+1}{8\pi} \frac{n}{\sqrt{n\omega}} \frac{\sin\theta_0}{\sqrt{D \cot g \theta_0}}.$$

Comme θ_0 et, par conséquent, γ ne dépendent que de D, ω et n sont indépendants de ρ, on voit que, *comme il convient*, $A_n K$ ne dépend pas de ρ.

Au sujet de l'ordre de grandeur de $A_n K$, nous voyons que n et ω étant très grands du premier ordre, $A_n K$ sera également très grand du premier ordre.

Le coefficient K n'est pas entièrement déterminé, puisque la fonction J_n n'est définie qu'à un facteur constant près, mais si l'on convient de définir cette fonction par l'intégrale (1) du paragraphe 11, *sans facteur constant*, les formules (5) et (5 *bis*) du paragraphe 11 nous montrent que l'on a :

$$K = 2^n n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$$

ou, avec la même approximation,

$$K = 2^n n!$$

La formule (11) nous donnera donc :

$$(12)\qquad A_n = i(-1)^n 2^{-n} n^{-n} e^n e^{i\gamma} \frac{n}{4\pi\sqrt{\omega}} \frac{\sin\theta_0}{\sqrt{D \cot g \theta_0}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.$$

Nous avons ici quelques remarques à faire :

1° Pour obtenir la formule (12), nous avons pris pour point de départ l'intégrale (3), nous en avons cherché une expression approchée, qui est l'expression (3 *bis*); remarquons que cette expression (3 *bis*) est de degré zéro, si l'on considère n et ω comme très grands de degré 1.

Pour obtenir cette expression approchée, nous nous sommes servis des principes du paragraphe 8, c'est-à-dire que nous avons déformé le chemin d'intégration [en ce qui concerne l'intégrale (5)], de façon que tout le long de ce chemin la fonction sous le signe $\int$ ait son module très petit, sauf en certains points qui correspondent aux maxima ou minima de Θ, et aux extrémités de ce chemin. Il suffit alors d'envisager les éléments voisins de ces points.

Nous avons envisagé seulement les éléments voisins des maxima ou minima de Θ et c'est ce qui nous a donné l'équation (3 *bis*), mais nous avons laissé de côté les éléments voisins des extrémités du chemin d'intégration, c'est-à-dire des points $\varphi = 0$, $\varphi = \pi$. En général, les principes du paragraphe 8 permettent

de démontrer que cette partie de l'intégrale est beaucoup plus petite que la partie qui provient des éléments voisins d'un maximum ou d'un minimum de Θ. Seulement ici, nous ne pouvons plus appliquer sans explication les principes en question; parce que la valeur approchée de P_n, dont nous nous sommes servis, n'est plus valable pour φ voisin de o ou de π. Cherchons donc à nous rendre compte de l'ordre de grandeur de l'intégrale

$$(13) \qquad \int_0^{\varepsilon} f'^{*} P_n \sin\varphi \, d\varphi,$$

ε étant une valeur telle que depuis $\varphi = 0$ jusqu'à $\varphi = \varepsilon$ la valeur approchée de P_n ne soit plus valable, c'est-à-dire une valeur de l'ordre de $\frac{1}{n}$. Alors P_n sera plus petit que 1; f'^{*} sera de l'ordre de ω, à cause de la présence du facteur $i\omega$; $\sin\varphi$ sera de l'ordre de ε, et l'intégrale de l'ordre de $\omega\varepsilon^2$, ou de $\frac{\omega}{n^2}$, ou de $\frac{1}{n}$; elle sera donc négligeable vis-à-vis de l'expression (3 *bis*); on pourrait même montrer qu'elle est d'un ordre de petitesse beaucoup plus élevé encore; et beaucoup plus élevé que celui auquel conduirait l'application des principes du paragraphe 8, si la formule approchée qui donne P_n restait applicable pour les petites valeurs de φ.

2° Pour établir la formule (12), nous avons supposé $\rho < D$, $n < \omega\rho$; nous pouvons choisir ρ de façon à satisfaire à ces deux conditions, pourvu que $n < \omega D$. Si cette dernière condition est remplie, nous pourrons répéter le calcul en supposant $\rho > D$, $n > \omega\rho$; la formule (12) restera vraie, puisqu'elle est indépendante de ρ. Dans ce cas, la formule

$$J_n = 2K\frac{\cos\alpha}{\sqrt{\cos\eta}} = \frac{K}{\sqrt{\cos\eta}}(e^{i\alpha} + e^{-i\alpha})$$

doit être remplacée par la suivante (d'après les formules de la fin du paragraphe 11) :

$$J_n = \frac{K}{\sqrt{\cos\eta}}(e^{-i\alpha}).$$

Si nous remplaçons J_n par cette valeur, et A_n par l'expression (12) dans l'expression de

$$\frac{2A_nJ_n}{2n+1}\frac{1}{\rho^2},$$

nous retrouverons une expression analogue à (3 *bis*), mais où dans le dernier facteur, au lieu de deux termes $(e^{i\beta_0}+e^{i\beta_1})$ on n'en aura plus qu'un, $e^{i\beta_0}$; c'est également le résultat auquel on serait arrivé en appliquant les formules du paragraphe 8 aux intégrales (5) et (5 *bis*), mais en tenant compte seulement des éléments voisins des maxima et minima de Θ, en négligeant les éléments voisins des extrémités, en négligeant, par conséquent, l'intégrale (13). Seulement ici l'expression (3 *bis*) ainsi modifiée n'est plus de l'ordre de 1, comme dans le cas précédent; comme la partie imaginaire de β_0 est très grande, elle est de l'ordre de $e^{-\lambda\omega}$, λ étant un nombre positif; elle est donc beaucoup plus petite que les quantités de l'ordre de $\frac{1}{n}$ ou de $\frac{1}{\omega}$.

Nous avons montré plus haut que l'intégrale (13) est de l'ordre de $\frac{1}{\omega}$, *ou qu'elle est plus petite encore*. Si elle était précisément de l'ordre de $\frac{1}{\omega}$, nous n'aurions pas le droit de la négliger.

Mais comme nous savons que notre formule (12) reste vraie dans tous les cas, puisqu'elle est indépendante de ρ, nous savons aussi que notre formule (3 *bis*) modifiée est vraie.

Nous en concluons que l'intégrale (13) doit être négligée, même devant $e^{-\lambda\omega}$, et par conséquent qu'elle est beaucoup plus petite que $\frac{1}{\omega}$.

3° Supposons maintenant $n > \omega D$, nous ne pourrons plus raisonner comme nous venons de le faire; les formules (3 *bis*) modifiée et (12) sont encore vraies, mais nous n'avons plus le moyen de les démontrer. Pour cela il faudrait pouvoir établir directement que l'intégrale (13) est négligeable, même devant $e^{-\lambda\omega}$; on y pourrait parvenir en transformant nos intégrales, et en particulier l'intégrale (13), par n intégrations successives par parties; de façon à introduire, au lieu de P_n, qui est proportionnel à la dérivée $n^{\text{ième}}$ de $(\cos^2\varphi - 1)^n$ par rapport à $\cos\varphi$, à introduire dis-je la fonction $(\cos^2\varphi - 1)^n$ elle-même. Mais la démonstration serait longue et compliquée, et je préfère employer une seconde méthode où toutes ces difficultés ne se présentent pas.

14. Deuxième méthode.

Reprenons la formule approchée qui donne f''^{*} [form. (4) du paragraphe 13] :

$$(1)\qquad 4\pi f''^{*} = e^{i\omega(t-r)}\frac{i\omega}{r}\sin\theta\sin\xi$$

et la formule (2) du paragraphe 6, que j'écrirai :

$$(2)\qquad f^* = e^{i\omega t}\sum A_n J_n(\omega\rho)\frac{1}{\rho^2}P_n(\cos\varphi).$$

Nous ferons d'ailleurs dans ces formules $t = 0$ pour nous débarrasser du facteur $e^{i\omega t}$ qui ne fait qu'allonger les écritures.

Comme on a

$$\frac{\sin\xi}{D} = \frac{\sin\varphi}{r} = \frac{\sin\theta}{\rho},$$

la première formule devient :

$$(3)\qquad 4\pi f'^* = e^{-i\omega t}\frac{i\omega}{r^3}D\rho\sin^2\varphi$$

et l'équation (2) peut s'écrire :

$$(4)\qquad \frac{i\omega D}{4\pi r^3}e^{-i\omega t}(\rho\sin\varphi)^2 = \sum A_n\frac{J_n(\omega\rho)}{\rho}P_n(\cos\varphi).$$

Les deux membres de cette égalité sont développables suivant les puissances croissantes de $\rho\cos\varphi$ et de $\rho\sin\varphi$; il en est évidemment ainsi de r et de $\rho\sin\varphi$, et par conséquent du premier membre. Dans le second membre, le facteur $\frac{J_n}{\rho}$ procède suivant les puissances de ρ, le développement commençant par un terme en ρ^n et tous les exposants de ρ étant de même parité que n; quant à P_n, c'est un polynome de degré n en $\cos\varphi$, et les degrés de tous ses termes sont de même parité.

Ainsi nos deux membres sont développables suivant les puissances de

$$\rho e^{i\varphi} = \zeta, \qquad \rho e^{-i\varphi} = \zeta'.$$

Nous sommes ainsi conduits à chercher ce que devient le second membre pour $\zeta' = 0$.

Nous considérerons $J_n(\omega\rho)$ comme défini par l'intégrale

$$J_n(\omega\rho) = \int_{-1}^{+1} e^{i\omega\rho x}(x^2-1)^n(\omega\rho)^{n+1}\,dx.$$

Le coefficient du premier terme, c'est-à-dire du terme en $(\omega\rho)^{n+1}$, sera

$$\int_{-1}^{+1}(x^2-1)^n\,dx = (-1)^n\frac{2(2^n n!)^2}{(2n+1)!}.$$

D'autre part, dans le polynome $P_n(\cos\varphi)$, le coefficient de $(\cos\varphi)^n$ sera

$$\frac{1}{2^n n!}\,\frac{(2n)!}{n!}.$$

Considérons maintenant l'expression :

$$\frac{1}{\omega\rho} J_n P_n$$

et écrivons :

$$\frac{1}{\omega\rho} J_n = \Sigma a_p (\omega\rho)^{n+2p}, \qquad P_n = \Sigma b_q (\cos\varphi)^{n-2q},$$

d'où

$$\frac{1}{\omega\rho} J_n P_n = \Sigma a_p b_q (\omega\rho \cos\varphi)^{n-2q} (\omega\rho)^{2p+2q}$$

ou

$$\frac{1}{\omega\rho} J_n P_n = \sum a_p b_q \left[\frac{\omega}{2}(\zeta + \zeta')\right]^{n-2q} (\omega^2 \zeta\zeta')^{p+q}.$$

On voit que si l'on fait $\zeta' = 0$, tous les termes disparaîtront sauf celui où $p = q = 0$ et il restera :

$$\frac{1}{\omega\rho} J_n P_n = \frac{a_0 b_0}{2^n} \omega^n \zeta^n.$$

Mais nous venons de trouver :

$$a_0 = (-1)^n \frac{2(2^n n!)^2}{(2n+1)!}, \qquad b_0 = \frac{1}{2^n n!} \frac{(2n)!}{n!},$$

il reste donc :

(5) $$\frac{1}{\omega\rho} J_n P_n = (-1)^n \frac{2\omega^n \zeta^n}{2n+1}.$$

On a, d'autre part,

$$r^2 = (D - \zeta)(D - \zeta'), \qquad \rho^2 \sin^2\varphi = \left(\frac{\zeta - \zeta'}{2i}\right)^2,$$

d'où, pour $\zeta' = 0$,

$$r^2 = D^2 - D\zeta, \qquad \rho^2 \sin^2\varphi = -\frac{\zeta^2}{4},$$

de sorte que la formule (4) devient :

(6) $$\sum \frac{2A_n(-1)^n}{2n+1} \omega^n \zeta^n = \frac{-i}{16\pi} \frac{e^{-i\omega r}}{r^3} D\zeta^2.$$

Il nous suffira d'identifier les deux développements, en calculant les coefficients A_n par la formule de Cauchy ; nous trouverons ainsi :

(7) $$(-1)^n \omega^n A_n = \frac{1}{2i\pi} \frac{(2n+1)}{2} \frac{(-iD)}{16\pi} \int \frac{e^{-i\omega r}}{r^3} \zeta^{1-n}\, d\zeta,$$

l'intégrale étant prise le long d'un petit contour fermé entourant le point $\zeta = 0$,

Mais il conviendra de changer de variable en prenant r au lieu de ζ comme variable indépendante. Nous avons trouvé

$$r^2 = D^2 - D\zeta,$$

d'où, si nous prenons D comme unité de longueur afin d'abréger les écritures,

$$\zeta = 1 - r^2.$$

L'intégrale qui figure dans le second membre de (7) peut alors s'écrire :

(8) $$\int \frac{-2\, e^{-i\omega r}\, dr}{r^2 (1 - r^2)^{n+1}}$$

et elle doit être prise le long d'un contour très petit entourant le point $r = 1$, c'est-à-dire $r = D$. Nous pouvons profiter de ce que les nombres ω et n sont très grands et chercher à construire les lignes d'égal module de la fonction

(9) $$e^{-i\omega r}(1 - r^2)^{-n} = e^{-i\omega r}\zeta^{-n}.$$

Pour cela nous pouvons nous servir des figures 3 et 5 du paragraphe 11, la forme des courbes étant grossièrement la même. Deux cas sont à distinguer :

Si $n < \omega$, il faudra prendre la figure 3; les points A et C représentent respectivement les points $r = -1$, $r = +1$; où notre module est égal à l'infini; ce module est donc plus grand en A et en C, ou encore sur la courbe GH; et au contraire plus petit sur la courbe KL, qu'il ne l'est sur la courbe EBMDNF qui passe par les deux points doubles B et D.

Si, au contraire, $n > \omega$, il faudra prendre la figure 5; le module sera infini en A et C, plus petit sur la courbe qui passe en D, plus petit encore sur la courbe qui passe en B.

Cela posé, nous pouvons dans l'un et l'autre cas déformer notre contour d'intégration, et le remplacer par un contour fermé passant par le point D, ne coupant en aucun autre point la courbe d'égal module qui a un point double en D, enveloppant complètement la boucle qui contient le point C, et laissant complètement en dehors la boucle qui contient le point A. On voit que le module de la fonction sous le signe $\int$ sera beaucoup plus grand dans le voisinage du point D qu'il ne l'est sur tout le reste du contour. Nous pouvons donc, pour calculer l'intégrale, nous contenter d'envisager les éléments très voisins du point D et pour calculer ces éléments nous n'avons qu'à appliquer les principes du paragraphe 8.

Notre intégrale peut, comme au paragraphe 8, se mettre sous la forme :

$$\int e^{i\omega\Theta}\,\mathrm{H}\,d\zeta$$

et l'on a

$$\Theta = -r + iz\log\zeta,$$

en posant $n = z\omega$. Le maximum de Θ correspondant au point D sera donné par

(10) $$\frac{d\Theta}{d\zeta} = -\frac{dr}{d\zeta} + \frac{iz}{\zeta} = \frac{1}{2r} + \frac{iz}{\zeta} = 0$$

ou

$$\zeta = -2irz, \qquad r^2 - 2irz - 1 = 0.$$

Nous avons une équation du second degré en r; dans le cas où $n < \omega$, nous pouvons poser

$$z = \sin\theta_0.$$

L'angle θ_0 a alors la même signification que dans le paragraphe 13, où nous avons posé

$$\frac{\sin\xi}{\mathrm{D}} = \frac{\sin\theta_0}{\rho}, \qquad \sin\xi = \frac{n}{\omega\rho},$$

d'où

$$n = \omega\,\mathrm{D}\sin\theta_0$$

ou, en faisant $\mathrm{D} = 1$, $z = \frac{n}{\omega}$,

$$z = \sin\theta_0.$$

L'équation (10) nous donne alors :

$$z = i\sin\theta_0 \pm \cos\theta_0;$$

et la solution qui nous convient est celle qui se réduit à 1 pour $\theta_0 = 0$, c'est-à-dire :

(11) $$r = e^{i\theta_0}, \qquad \zeta = -2i\sin\theta_0\, e^{i\theta_0}.$$

Dans le cas où $n > \omega$, on trouve

(11 *bis*) $$r = i\left[z \pm \sqrt{z^2 - 1}\right]$$

et c'est le signe — qui convient. On trouve ensuite :

$$\mathrm{H} = \frac{\zeta}{r^3} = -2i\sin\theta_0\, e^{-2i\theta_0}.$$

Nous avons besoin également de la dérivée seconde Θ'' et nous trouvons :

$$\Theta'' = \frac{d^2\Theta}{d\zeta^2} = \frac{1}{4r^3} - \frac{iz}{\zeta^2} = \frac{i\,e^{-3i\theta_0}}{4\,\mathrm{tg}\,\theta_0}.$$

Quant à Θ lui-même il s'écrit :

$$\Theta = e^{i\theta_0} + i \sin\theta_0 \log(-2i \sin\theta_0 \, e^{i\theta_0}),$$

d'où

$$e^{i\omega\Theta} = e^{-i\omega\cos\theta_0 + \omega\sin\theta_0} \zeta^{-n}$$

ou

$$e^{i\omega\Theta} = e^{n} \zeta^{-n} e^{-i\omega\cos\theta_0}.$$

Reprenons la formule (2) du paragraphe 8, qui s'écrit :

$$e^{\frac{i\pi}{4}} \mathrm{H} e^{i\omega\Theta} \sqrt{\frac{2\pi}{\omega\Theta''}}.$$

Notre intégrale devient donc :

$$e^{\frac{i\pi}{4}} (-4i) \sin\theta_0 \, e^{-2i\theta_0} \sqrt{\frac{2\pi}{\omega \operatorname{cotg}\theta_0}} \sqrt{-i} \, e^{\frac{3}{2}i\theta_0} e^{n} \zeta^{-n} e^{-i\omega\cos\theta_0}.$$

Il convient de prendre $\sqrt{-i} = e^{-\frac{i\pi}{4}}$; ce qui, en observant que

$$\zeta^{-n} = (-2i)^{-n} (\sin\theta_0)^{-n} e^{-ni\theta_0} = e^{\frac{ni\pi}{2}} 2^{-n} n^{-n} \omega^{n} e^{-ni\theta_0},$$

nous donne pour l'intégrale :

$$(-i)\, 4 \sin\theta_0 \, 2^{-n} n^{-n} \omega^{n} e^{n} e^{\frac{ni\pi}{2}} e^{-ni\theta_0} e^{\frac{i\theta_0}{2}} e^{-i\omega\cos\theta_0} \sqrt{\frac{2\pi}{\omega \operatorname{cotg}\theta_0}}.$$

Si nous substituons cette valeur de l'intégrale dans l'équation (7), il vient, en se rappelant que $\mathrm{D} = 1$,

$$(-1)^{n} \mathrm{A}_n = (-i) \frac{1}{2i\pi} \frac{2n+1}{2} \frac{(-i)}{16\pi} 4 \sin\theta_0 \, 2^{-n} n^{-n} e^{n} e^{\frac{ni\pi}{2}} e^{-ni\theta_0} e^{-\frac{i\theta_0}{2}} e^{-i\omega\cos\theta_0} \sqrt{\frac{2\pi}{\omega \operatorname{cotg}\theta_0}}.$$

Posons

$$\gamma = n\frac{\pi}{2} - n\theta_0 - \omega\cos\theta_0 - \frac{\theta_0}{2};$$

a formule deviendra :

$$\mathrm{A}_n = i \frac{n\sqrt{2\pi}}{8\pi^2} \sin\theta_0 \, 2^{-n} n^{-n} e^{n} e^{i\gamma} \sqrt{\frac{1}{\omega \operatorname{cotg}\theta_0}} (-1)^{n}.$$

J'ai remplacé $\frac{2n+1}{2}$ par n, ce qui est permis à l'ordre d'approximation adopté.

Si nous rétablissons l'homogénéité en ne prenant plus $\mathrm{D} = 1$, il vient :

$$\gamma = n\frac{\pi}{2} - n\theta_0 - \omega \mathrm{D} \cos\theta_0 - \frac{\theta_0}{2},$$

(12) $$\mathrm{A}_n = i(-1)^{n} \frac{n\sqrt{2\pi}}{8\pi^2} 2^{-n} n^{-n} e^{n} e^{i\gamma} \frac{\sin\theta_0}{\sqrt{\omega \mathrm{D} \operatorname{cotg}\theta_0}},$$

formule identique à la formule (12) du paragraphe 13. Si $n > \omega$ la même formule est encore applicable, mais il convient de prendre :

$$\sin\theta_0 = z, \qquad r = e^{i\theta} = i\left(z - \sqrt{z^2 - 1}\right), \qquad \cos\theta_0 = -i\sqrt{z^2 - 1}.$$

Il nous reste à examiner le cas limite, celui où n est voisin de ω et où il convient d'appliquer les principes du paragraphe 12. Dans ce cas, les points singuliers B et D de la figure 3 deviennent très voisins l'un de l'autre; ils doivent être assimilés aux points A et B de la figure 6, tandis que les parties de la figure 3 voisines de ces points B et D, doivent être assimilées à la figure 6 tout entière; mais la quantité qui correspond à l'ω du paragraphe 12 est négative; dans ces conditions, on voit que notre contour d'intégration devra passer de la région 5 à la région 4 de cette figure.

L'intégrale que nous avons à envisager est donc l'intégrale $\int_5^4$ du paragraphe 12 qui est égale à $-e^{\frac{5i\pi}{3}} F\left(te^{\frac{5i\pi}{3}}\right)$ et que je représenterai pour abréger par $F_1(t)$.

Cela posé, nous n'avons plus qu'à raisonner comme au paragraphe 12, et nous trouverons pour la valeur de A_n :

$$(13) \qquad A_n = \left(\frac{\omega D}{2}\right)^{-\frac{1}{3}} i(-1)^n \frac{n}{8\pi^2} 2^{-n} n^{-n} e^n \sqrt{\sin^3\theta_0}\, F_1\left[\cos^2\theta_0 \left(\frac{\omega D}{2}\right)^{\frac{2}{3}}\right].$$

Les mêmes principes et le rappel des équations (5) du paragraphe 12 nous donneraient pour J_n :

$$(14) \qquad J_n(\omega\rho) = \left(\frac{\omega\rho}{2}\right)^{-\frac{1}{3}} (-1)^n 2^n n^n e^{-n} \sqrt{n\omega\rho}\, F\left[\cos^2\eta \left(\frac{\omega\rho}{2}\right)^{\frac{2}{3}}\right],$$

au lieu de la valeur :

$$(15) \qquad J_n(\omega\rho) = 2^n n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n} \frac{2\cos\alpha}{\sqrt{\cos\eta}}$$

qui convient quand n est notablement plus petit que $\omega\rho$.

15. Calcul de μ.

Nous avons trouvé [form. (9) du paragraphe 6] :

$$(1) \qquad \mu = e^{i\omega t} \sum \frac{A_n P_n}{\rho_0^2 I'_n} = e^{i\omega t} \sum \frac{A_n J_n P_n}{\rho_0^2 I'_n J_n}.$$

Dans ces expressions l'argument de P_n est $\cos\varphi$, celui de I'_n et de J_n est $\omega\rho_0$.

Nous allons dans cette formule remplacer A_n, I'_n, J_n et P_n par leurs valeurs approchées.

Nous envisagerons successivement les cas suivants :

1° n est notablement plus petit que $\omega\rho$ (je puis sans inconvénient écrire ρ au lieu de ρ_0) et, par conséquent, que ωD. Dans ce cas, nous avons trouvé :

$$A_n = i(-1)^n \frac{n\sqrt{2\pi}}{8\pi^2} 2^{-n} n^{-n} e^n e^{i\gamma} \frac{\sin\theta_0}{\sqrt{\omega D \operatorname{cotg}\theta_0}},$$

$$J_n = 2^n n^n e^{-n} \sqrt{\frac{2\pi n}{\cos\eta}}(e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}),$$

$$I'_n J_n = e^{i\alpha}\cos\alpha,$$

$$\frac{A_n J_n}{\rho^2} = \frac{1}{8\pi}\sqrt{\frac{2}{\pi n}} \frac{i\sqrt{2\pi\omega}\sin\theta_0 \sin\eta}{\sqrt{D\rho\cos\theta_0\cos\eta}} \sqrt{\frac{\sin\theta_0}{\rho}}(e^{i\beta_0} + e^{i\beta_1})\frac{2n+1}{2},$$

$$\beta_1 = \alpha + \gamma + n\pi, \qquad \beta_0 = \gamma - \alpha - n\pi :$$

formules (5), (6), (7) du paragraphe **11**, (3 *bis*) et (13) du paragraphe **13**, (12) des paragraphes **13** et **14**.

Si j'écris pour abréger

$$\frac{A_n J_n}{\rho^2} = H_n(e^{i\beta_0} + e^{i\beta_1}),$$

il restera, pour le coefficient de notre formule (1),

$$\frac{A_n J_n}{\rho^2 I'_n J_n} = H_n \frac{e^{i\beta_0} + e^{i\beta_1}}{e^{i\alpha}\cos\alpha} = 2H_n \frac{e^{i(\alpha+\gamma)} + e^{i(\gamma-\alpha)}}{1 + e^{2i\alpha}}(-1)^n,$$

ou encore :

$$\frac{A_n J_n}{\rho^2 I'_n J_n} = 2H_n \frac{e^{i\beta_0} + e^{i(\beta_0+2\alpha)}}{1 + e^{2i\alpha}} = 2H_n e^{i\beta_0}.$$

Ainsi le rapport du coefficient de P_n dans le développement de μ, c'est-à-dire de la composante normale du champ total au coefficient de ce même polynome de Legendre dans le développement de la composante normale du champ extérieur est égal à

$$\frac{2e^{i\beta_0}}{e^{i\beta_1} + e^{i\beta_0}}.$$

Il est aisé d'interpréter ce résultat. Comment avons-nous en effet obtenu au paragraphe **13** la formule qui donne A_n ? C'est en calculant l'intégrale

(2) $$\int_0^\pi f'^{*} P_n \sin\varphi\, d\varphi,$$

ce qui nous permettait de calculer le coefficient de P_n dans le développement de f'^* en polynomes de Legendre.

Supposons maintenant que nous voulions développer de même en polynomes de Legendre une fonction F qui soit égale à f'^* sur la partie éclairée de la sphère, et à zéro sur la partie dans l'ombre. Nous aurions à calculer l'intégrale

$$\int_0^\pi \mathrm{F}\mathrm{P}_n \sin\varphi \, d\varphi = \int_0^h f'^* \mathrm{P}_n \sin\varphi \, d\varphi, \tag{3}$$

h étant la valeur de φ qui correspond à la limite de l'ombre géométrique.

Pour le calcul de notre intégrale, nous avons, au paragraphe 13, appliqué la méthode du paragraphe 8, c'est-à-dire que nous avons considéré seulement les éléments de l'intégrale voisins des maxima et minima de Θ; ces maxima et minima étaient au nombre de 2 et correspondaient à $\varphi = \varphi_0$ et à $\varphi = \varphi_1$; le premier nous avait donné le terme en $e^{i\beta_0}$, le second le terme en $e^{i\beta_1}$. Mais de ces deux maxima, un seul, $\varphi = \varphi_0$, est compris dans la zone éclairée. Donc l'intégrale (3) se calculera comme l'intégrale (2); seulement, au lieu du facteur $e^{i\beta_0} + e^{i\beta_1}$ nous aurons le facteur $e^{i\beta_0}$. Si nous rapprochons ce résultat de celui que nous venons d'obtenir, nous voyons que le coefficient du développement de μ est le double du coefficient correspondant du développement de F, c'est-à-dire que

$$\mu = 2\mathrm{F}.$$

Or dans la région de l'ombre F est nul, il en est donc de même de μ, c'est-à-dire qu'*il n'y a pas de perturbation dans l'ombre géométrique.*

Ce résultat, bien entendu, n'est qu'approché et dû, en particulier, à ce que nous avons négligé dans l'intégrale les éléments voisins de la limite supérieure $\varphi = h$ et qui sont les plus importants après ceux dont nous avons tenu compte.

2° Supposons maintenant n notablement plus grand que $\omega\mathrm{D}$ et par conséquent que $\omega\rho$. Dans ce cas nous avons trouvé :

$$\mathrm{A}_n = i(-1)^n \frac{n\sqrt{2\pi}}{8\pi^2} 2^n n^{-n} e^n e^{i\gamma} \frac{\sin\theta_0}{\sqrt{\omega\mathrm{D}\,\mathrm{cotg}\,\theta_0}},$$

$$\gamma = n\frac{\pi}{2} - n\theta_0 - \omega\mathrm{D}\cos\theta_0 - \frac{\theta_0}{2},$$

$$\sin\theta_0 = z = \frac{n}{\omega\mathrm{D}}, \qquad r = e^{i\theta_0} = i\left(z - \sqrt{z^2 - 1}\right), \qquad \cos\theta_0 = -i\sqrt{z^2 - 1},$$

$$\mathrm{J}_n = 2^n n^n e^{-n} \sqrt{\frac{2\pi n}{\cos\eta}}\, e^{-i\alpha}$$

ou, en donnant à H_n le même sens que plus haut :

$$\frac{A_n J_n}{\rho^2} = H_n e^{i\beta_0}.$$

D'autre part,

$$I'_n J_n = \frac{1}{2},$$

d'où

$$\frac{A_n J_n}{\rho^2 I'_n J_n} = 2 H_n e^{i\beta_0}. \tag{1}$$

C'est la même formule que plus haut, mais il faut distinguer quelle est la valeur qu'il faut adopter pour β_0. Nous observerons que nous avons :

$$|e^{i\gamma}| = |e^{-in\theta_0} e^{-\frac{i\theta_0}{2}} e^{-i\omega D \cos\theta_0}|$$

ou

$$|e^{i\gamma}| = \left(z - \sqrt{z^2 - 1}\right)^{n+\frac{1}{2}} e^{-\omega D \sqrt{z^2-1}} < 1.$$

D'autre part $e^{-i\alpha}$, qui correspond aux éléments de l'intégrale J_n voisins du point D dans la figure du paragraphe 11, est également plus petit que 1; j'ajouterai même que $e^{i\gamma}$ et $e^{-i\alpha}$ sont très petits à cause de la grandeur des exposants n et ωD. Donc $e^{i\beta_0}$ est très petit, d'autant plus que n est plus grand, de sorte que pour $n > \omega D$ les coefficients de notre développement décroissent très rapidement.

3° Supposons ensuite que n soit compris entre ωD et $\omega \rho$ et diffère notablement de l'un et de l'autre. C'est ce qui pourra arriver si D n'est pas très voisin de ρ.

Les formules précédentes sont encore applicables, et l'on trouve encore

$$\frac{A_n J_n}{\rho^2 I'_n J_n} = 2 H_n e^{i\beta_0} = 2 H_n e^{i\gamma} e^{-i\alpha} (-1)^n.$$

Mais ici γ est réel, de sorte que $|e^{i\gamma}| = 1$, tandis que $|e^{-i\alpha}|$ tend rapidement vers zéro. Donc ici encore le terme du développement tend rapidement vers zéro.

4° Supposons que n soit très voisin de ωD et notablement plus grand que $\omega\rho$. Il faudra dans le calcul de A_n appliquer les principes du paragraphe 12, tandis que pour I'_n on pourra continuer à se servir de la formule approchée.

On trouve ainsi :

$$(5)\qquad \frac{A_n J_n}{\rho^2 I'_n J_n} = \left(\frac{\omega D}{2}\right)^{-\frac{1}{3}} (2\pi\omega D\cos\theta_0)^{+\frac{1}{2}}\, 2 H_n e^{-i\alpha} F_1\left[\cos^2\theta_0 \left(\frac{\omega D}{2}\right)^{\frac{2}{3}}\right](-1)^n,$$

avec

$$(6)\qquad H_n = \frac{1}{4\pi\rho}\sqrt{\omega n}\,\frac{\sin\theta_0 \sin\eta}{\sqrt{D \operatorname{cotg}\theta_0 \cos\eta}}$$

(dans le calcul de H_n j'ai remplacé $\frac{2n+1}{2}$ par n ce qui correspond au degré d'approximation adopté) et

$$(7)\qquad \begin{aligned} F_1(t) = & -e^{\frac{2i\pi}{3}} A_0\left(1 - \frac{t^3}{2.3} + \frac{t^6}{2.3.5.6} - \frac{t^9}{2.3.5.6.8.9} + \ldots\right) \\ & - e^{\frac{4i\pi}{3}} A_1\left(t - \frac{t^4}{3.4} + \frac{t^7}{3.4.6.7} - \ldots\right), \end{aligned}$$

A_0 et A_1 étant définis au paragraphe 12.

On peut ajouter que, dans l'argument de F_1, $\cos^2\theta_0 = 1 - \frac{n^2}{\omega^2 D^2}$ peut avec la même approximation être remplacé par $\left(1 - \frac{n}{\omega D}\right)$.

5° Supposons maintenant que n soit très voisin de $\omega\rho$ et notablement plus petit que ωD.

Ici c'est au contraire A_n que l'on doit calculer par la formule approchée et I'_n par les formules du paragraphe 12.

Nous trouvons que le rapport de la valeur de I'_n à sa valeur approchée est

$$-i e^{\frac{2i\pi}{3}} 2^{\frac{2}{3}} (\omega\rho)^{-\frac{1}{6}} (2\pi\cos\eta)^{-\frac{1}{2}} F'\left(t e^{\frac{4i\pi}{3}}\right) e^{-i\alpha},$$

ce qui nous donne :

$$(8)\qquad \frac{A_n J_n}{\rho^2 I'_n J_n} = i e^{-\frac{2i\pi}{3}} 2^{\frac{1}{3}} (\omega\rho)^{\frac{1}{6}} \sqrt{2\pi\cos\eta}\, \frac{H_n}{F'\left[\cos^2\eta\left(\frac{\omega\rho}{2}\right)^{\frac{2}{3}} e^{\frac{4i\pi}{3}}\right]} e^{i\gamma}(-1)^n$$

avec

$$F(t) = A_0\left(1 - \frac{t^3}{2.3} + \ldots\right) + A_1\left(t - \frac{t^4}{3.4} + \ldots\right).$$

6° Les trois derniers cas ne peuvent se présenter que si D diffère notablement de ρ; si D est très voisin de ρ, n très voisin de ωD et de $\omega\rho$, il faudra appliquer les principes du paragraphe 12 à la fois au calcul de A_n et à celui de

J_n et on trouvera :

$$(9)\quad \frac{A_n J_n}{\rho^2 I_n J_n} = i\, e^{\frac{2i\pi}{3}}\, 2^{\frac{2}{3}} (\omega\rho)^{\frac{1}{6}} (\omega D)^{\frac{1}{6}}\, 2\pi \sqrt{\cos\eta \cos\theta_0}\, H_n \frac{F_1\left[\cos^2\theta_0 \left(\frac{\omega D}{2}\right)^{\frac{2}{3}}\right]}{F'\left[\cos^2\eta \left(\frac{\omega\rho}{2}\right)^{\frac{2}{3}} e^{\frac{2i\pi}{3}}\right]} (-1)^n.$$

Il ne sera pas inutile de chercher à nous rendre compte des valeurs des exposants β_0, α et γ. Nous avons trouvé :

$$(10)\quad \begin{cases} \alpha = -\omega\rho\cos\eta - n\eta - \frac{\eta}{2} - (n-1)\frac{\pi}{2}, \\ \gamma = \frac{n\pi}{2} - n\theta_0 - \omega D \cos\theta_0 - \frac{\theta_0}{2}, \\ \beta_0 = \gamma - \alpha - n\pi. \end{cases}$$

Dans le cas où n est très voisin de $\omega\rho$, on a sensiblement $\eta = \frac{\pi}{2}$; d'où, ainsi que nous l'avons vu au paragraphe 12,

$$(11)\quad \alpha = -\frac{\omega\rho\cos^3\eta}{2} + \frac{\pi}{4} - n\pi.$$

De même, dans le cas où n est très voisin de ωD on trouve :

$$(12)\quad \gamma = -\frac{\omega D \cos^3\theta_0}{3} - \frac{\pi}{4}.$$

Si nous supposons que $\omega\rho$ et ωD soient voisins l'un de l'autre, et que n soit notablement plus petit que l'un et que l'autre, on aura sensiblement :

$$\omega\rho = \omega D, \qquad \theta_0 = \eta, \qquad \gamma - \alpha - n\pi = \beta_0 = -\frac{\pi}{2}.$$

Ce résultat était à prévoir; nous voyons en effet que si D est très voisin de ρ, le point S est très près de la sphère et par conséquent du point M_0 de la figure; donc $r_0 = \varphi_0 = 0$ et l'on a

$$\beta_0 = n\varphi_0 - \omega\rho r_0 + \frac{\varphi_0}{2} - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}.$$

Si passant à la limite nous faisons $D = \rho$, nous trouvons pour l'expression de H_n :

$$(13)\quad H_n = \frac{1}{4\pi\rho^2} \frac{n^3}{\omega\rho\sqrt{\omega^2\rho^2 - n^2}},$$

d'où

$$(14)\quad \frac{A_n J_n}{\rho^2 I'_n J_n} = \frac{-i}{2\pi\rho^2} \frac{n^3}{\omega\rho\sqrt{\omega^2\rho^2 - n^2}}$$

pour n notablement différent de $\omega\rho$, en dessus ou en dessous ; et si n est très voisin de $\omega\rho$ et ωD :

(15) $$\frac{A_n J_n}{\rho^2 I'_n J_n} = (-1)^n \frac{i e^{\frac{2i\pi}{3}}}{\rho^2 \sqrt[3]{2}} (\omega\rho)^{-\frac{1}{3}} \frac{n^2}{\omega\rho} \frac{F_1(t)}{F(t)},$$

avec

$$t = \left(\frac{\omega\rho}{2}\right)^{\frac{2}{3}} \left(1 - \frac{n^2}{\omega^2\rho^2}\right).$$

Il ne sera sans doute pas inutile de donner une expression *exacte* de notre coefficient sous la forme du quotient de deux intégrales définies. Nous avons trouvé au paragraphe 14, en faisant $D = 1$,

$$A_n = \left(\frac{-1}{\omega}\right)^n \frac{(2n+1)}{32\pi^2} \int_0^1 \frac{e^{-i\omega r}\, dr}{r^2(1-r^2)^{n-1}}.$$

Mais nous avons obtenu ce résultat en partant d'une valeur approchée de f''^* :

$$4\pi f''^* = e^{i\omega(t-r)} \frac{i\omega}{r} \sin\theta \sin\xi ;$$

la valeur exacte était celle du paragraphe 6 :

$$4\pi f^* = e^{i\omega(t-r)} \left[\frac{i\omega}{r} \sin\theta \sin\xi + \left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{i\omega r^3}\right)(\sin\theta \sin\xi - 2\cos\theta\cos\xi) \right].$$

Pour transformer l'expression approchée, nous avons observé que

$$\rho \sin\theta \sin\xi = \left(\frac{\rho \sin\varphi}{r}\right)' = -\frac{\zeta'}{4r^2}$$

en reprenant les notations du paragraphe 14 et supposant comme dans ce paragraphe $\zeta' = 0$; on trouverait de même :

$$\rho\cos\theta\cos\xi = \sqrt{1 - \frac{\rho^2 \sin^2\varphi}{r^2}} \sqrt{\rho^2 - \frac{\rho^2 \sin^2\varphi}{r^2}} = \sqrt{1 + \frac{\zeta'^2}{4r^2}} \sqrt{\zeta\zeta'' + \frac{\zeta^2}{4r^2}} = \frac{\zeta}{2r} \sqrt{1 + \frac{\zeta'^2}{4r^2}}$$

ou, en se rappelant que $\zeta' = 0$, $\zeta = 1 - r^2$,

$$\rho\cos\theta\cos\xi = \frac{(1-r^2)}{2r} \frac{(1+r^2)}{2r} = \frac{1-r^4}{4r^2},$$

d'où finalement

$$A_n = \left(\frac{-1}{\omega}\right)^n \frac{2n+1}{32\pi^2} \int_0^1 \frac{e^{-i\omega r} \psi(r)\, dr}{(1-r^2)^{n-1}},$$

où

(16) $$\psi(r) = \frac{1}{r^2} + \left(\frac{1}{i\omega r^3} - \frac{1}{\omega^2 r^4}\right)\left(1 - \frac{1-r^4}{2r^2}\right).$$

Passons au calcul de I'_n.

Nous avons trouvé au paragraphe 11 :

$$I_n(\xi) = C\int_1^\infty e^{i\xi x}(x^2-1)^n\xi^{n+1}\,dx,$$

C étant un facteur constant ; d'où

$$I'_n(\xi) = C\int_1^\infty e^{i\xi x}(x^2-1)^n\xi^{n+1}\left(ix+\frac{n}{\xi}\right)dx$$

ou, en remplaçant ξ par $\omega\rho$,

$$I'_n(\omega\rho) = C\int_1^\infty e^{i\omega\rho x}(x^2-1)^n(\omega\rho)^{n+1}\left(ix+\frac{n}{\omega\rho}\right)dx.$$

Il reste à déterminer le coefficient C ; ce coefficient doit être choisi de telle sorte que, si l'on pose

$$J_n(\xi) = \int_{-1}^{+1} e^{i\xi x}(x^2-1)^n\xi^{n+1}\,dx,$$

on ait

(17) $$I'_n J_n - J'_n I_n = 1.$$

Considérons le développement de $I_n(\xi)$ et de $J_n(\xi)$ suivant les puissances croissantes de ξ et soient :

$$J_n(\xi) = A\xi^{n+1}+\ldots \qquad I_n = B\xi^{-n}+\ldots$$

les premiers termes de ces développements; la relation (17) nous donnera :

$$AB = -\frac{1}{2n+1}.$$

Or nous avons trouvé au paragraphe 14 :

$$A = \frac{(-1)^n 2(2^n n!)^2}{(2n+1)!}.$$

Pour avoir B, il faut chercher une valeur approchée de l'intégrale pour ξ très petit; faisons alors

$$i\xi x = -X,$$

d'où

$$\int_1^\infty e^{i\xi x}(x^2-1)^n\xi^{n+1}\,dx = i\xi^{-n}\int_{-\xi}^\infty e^{-X}(-X^2-\xi^2)^n\,dX$$

et pour ξ très petit :

$$\xi^{-n}i(-1)^n\int_0^\infty e^{-X}X^{2n}\,dX = i(-1)^n 2n!\,\xi^{-n}.$$

Il reste donc

$$B = Ci(-1)^n 2n!$$

et

$$\frac{(-1)^{2n} 2 Ci (2^n n!)^2}{2n+1} = -\frac{1}{2n+1}, \qquad C = \frac{i(-1)^{-2n}}{2(2^n n!)^2}$$

ou, pour n entier,

$$C = \frac{i}{2(2^n n!)^2}.$$

d'où enfin :

$$(18) \quad \frac{A_n J_n}{\rho^2 I'_n J_n} = \frac{-i}{\rho^2}\left(\frac{-1}{\omega}\right)^n (4n+2)\frac{(2^n n!)^2}{32\pi^2} \frac{\int e^{-i\omega t}\psi(t)(1-t^2)^{-n}\,dt}{\int e^{i\omega\rho x}(x^2-1)^n(\omega\rho)^{n+1}\left(ix+\frac{n}{\omega\rho}\right)dx}.$$

16. Introduction des valeurs non entières de n.

Il s'agit maintenant (en faisant $t = 0$ pour nous débarrasser du facteur $e^{i\omega t}$) de sommer la série

$$(1) \qquad \mu\rho\ddot{\rho} = \sum \frac{A_n P_n}{I'_n}.$$

On a assez souvent une première approximation de la somme de la série

$$\Sigma F(n):$$

en la remplaçant par l'intégrale

$$\int F(n)\,dn;$$

il suffit pour cela que la formule sommatoire d'Euler soit suffisamment convergente.

Si nous cherchons à appliquer cette méthode au cas qui nous occupe, nous serons arrêtés par une première difficulté; en effet nos fonctions A_n, P_n et I'_n ne sont définies que quand n est entier positif; il faut d'abord les définir pour toutes les valeurs de n. Commençons par P_n. Nous avons trouvé au paragraphe 10 :

$$(2) \qquad 2\pi P_n = \int_{-\pi}^{+\pi} (\cos\varphi + i\sin\varphi\cos\omega)^n\,d\omega$$

et nous pouvons conserver la même formule dans le cas où n n'est pas entier

positif; il pourrait y avoir une difficulté si $\cos\varphi + i\sin\varphi\cos\omega$ s'annulait sur le chemin d'intégration; c'est ce qui peut arriver quand le chemin d'intégration est rectiligne, pour $\varphi = \frac{\pi}{2}$ et pour certaines valeurs imaginaires de φ; mais si l'on attribue à φ l'une de ces valeurs, il suffira de modifier le chemin d'intégration. Nous observerons que *la fonction P_n ainsi définie est une fonction entière de n*; ce n'est pas une fonction uniforme de φ, puisque pour certaines valeurs de φ, on est obligé de déformer le chemin d'intégration ainsi que nous venons de le dire; mais c'est une fonction uniforme de n et c'est ce qui nous importe.

La fonction P_n jouit d'une autre propriété importante. Posons

$$\operatorname{tg}\frac{\omega}{2} = t;$$

notre relation devient :

$$\pi P_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi} t^2)^n\, dt}{(1+t^2)^{n+1}}.$$

Changeons n en $-n-1$; il viendra :

$$\pi P_{-n-1} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(1+t^2)^n\, dt}{(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi} t^2)^{n+1}}.$$

Posons

$$t = u\, e^{i\varphi};$$

il viendra :

$$\pi P_{-n-1} = \int \frac{(1+u^2 e^{2i\varphi})^n e^{i\varphi}\, du}{e^{i(n+1)\varphi}(1+u^2)^{n+1}} = \int \frac{(e^{-i\varphi} + u^2 e^{i\varphi})^n\, du}{(1+u^2)^{n+1}}$$

ou

$$P_{-n-1}(\varphi) = P_n(-\varphi) = P_n(\varphi),$$

car il est aisé de voir que P_n ne change pas quand on change φ en $-\varphi$; il suffit pour cela de changer ω en $\omega + \pi$, dans la formule (2); les limites deviennent 0 et 2π, mais peuvent être ramenées à $-\pi$ et $+\pi$, puisque la fonction sous le signe $\int$ est périodique. *Ainsi la fonction P_n ne change pas quand on change n en $-n-1$.*

Passons maintenant à I'_n et d'abord à I_n; nous avons trouvé à la fin du paragraphe 15 :

$$(3)\quad \begin{cases} I_n = \dfrac{i}{2}[2^n\Gamma(n+1)]^{-2}(-1)^{-2n}\displaystyle\int_1^{\infty} e^{i\omega\rho x}(x^2-1)^n(\omega\rho)^{n+1}\,dx, \\ I'_n = \dfrac{i}{2}[2^n\Gamma(n+1)]^{-2}(-1)^{-2n}\displaystyle\int_1^{\infty} e^{i\omega\rho x}(x^2-1)^n(\omega\rho)^{n+1}\left(ix + \dfrac{n}{\omega\rho}\right)dx. \end{cases}$$

[Nous rétablissons ici le facteur $(-1)^{-2n}$ que nous avons supprimé à la fin du paragraphe 15 parce que ce facteur est égal à 1 quand n est entier.] Le plus simple semble être de généraliser ces formules pour n non entier; mais il peut y avoir une difficulté parce que $x^2 - 1$ s'annule à l'une des limites d'intégration. Si donc la partie réelle de n était plus petite que -1, l'intégrale serait infinie.

En conséquence, au lieu d'un chemin d'intégration C allant de -1 à l'infini, de façon qu'à l'infini l'exponentielle $e^{i\omega\rho x}$ soit très petite, imaginons un autre chemin C_1 allant de l'infini à l'infini après avoir contourné le point -1, et de façon qu'à l'infini $e^{i\omega\rho x}$ soit très petit. Quand on contourne le point -1 et que n n'est pas entier, l'expression $(x^2 - 1)^n$ se trouve multipliée par $e^{2i\pi n}$; il en résulte que nous avons :

$$\int_{C_1} = (e^{2i\pi n} - 1)\int_C$$

et que nous pouvons remplacer les équations (3) par les suivantes :

$$(3\ bis) \qquad I_n \quad \text{ou} \quad I'_n = \frac{i}{2}[2^n\Gamma(n+1)]^{-2}(-1)^{-2n}(e^{2i\pi n} - 1)^{-1}\int_{C_1},$$

les expressions sous le signe $\int$ étant les mêmes que dans les formules (3). L'inconvénient signalé ne se reproduit pas. Nous observerons alors que $\int_{C_1}$ est une fonction entière de n; il en est de même de $[2^n\Gamma(n+1)]^{-2}$, et par conséquent de

$$I_n(e^{2i\pi n} - 1), \qquad I'_n(e^{2i\pi n} - 1).$$

I_n et I'_n sont des fonctions méromorphes de n et elles ne peuvent devenir infinies que pour n entier. Mais si n est entier positif ou nul, $\int_{C_1}$ s'annule également et, à cause de la formule

$$\int_C = (e^{2i\pi n} - 1)^{-1}\int_{C_1},$$

nous verrons que $(e^{i\pi n} - 1)^{-1}\int_{C_1}$ reste fini. Si, au contraire, n est entier négatif, $\Gamma(n+1)^{-1}$ s'annule et $\Gamma(n+1)^{-1}(e^{2i\pi n} - 1)^{-1}$ reste fini. *Donc I_n et I'_n sont des fonctions entières de n.*

Voyons maintenant ce que deviennent I_n et I'_n quand on change n en $-n-1$. Rappelons que I_n satisfait à l'équation différentielle :

$$(4) \qquad I''_n + I_n\left[1 - \frac{n(n+1)}{\xi^2}\right] = 0.$$

où les dérivées sont prises par rapport à ξ et où l'on a posé $\xi = \omega\rho$ (*cf.* § 5, éq. (10) et § 11 *in initio*). La fonction I_n ne cessera pas de satisfaire à cette équation quand n ne sera plus entier. De plus, cette fonction I_n sera sensiblement proportionnelle à $e^{-i\xi}$ quand ξ sera très grand. Or cette condition suffit pour déterminer l'intégrale de (4) *à un facteur constant près.*

Mais quand on change n en $-n-1$, le produit $n(n+1)$ ne change pas. Donc l'équation (4) ne change pas, et celle de ses intégrales qui devient sensiblement proportionnelle à $e^{-i\xi}$ pour ξ très grand reste la même à un facteur constant près. Donc le rapport

$$\frac{I_{-n-1}}{I_n} = \frac{I'_{-n-1}}{I'_n}$$

est indépendant de ξ et ne dépend que de n; il reste à déterminer ce facteur constant.

Indiquons brièvement deux modes de calcul pour cette détermination :

Soit d'abord ξ très grand. Dans ce cas les seuls éléments sensibles sont ceux qui sont voisins de -1; nous pouvons donc remplacer sous le signe $\int$, l'expression x^2-1 par $-2(x+1)$. Alors l'intégrale est facile à calculer par les fonctions eulériennes et l'on trouve :

$$I_n = i^{2-n} 2^{-n-1} \frac{e^{-i\xi}}{\Gamma(n+1)}.$$

En changeant n en $-n-1$, il vient :

$$I_{-n-1} = i^{3+n} 2^n \frac{e^{-i\xi}}{\Gamma(-n)},$$

d'où

(5) $$\frac{I_{-n-1}}{I_n} = i^{2n+1} 2^{2n+1} \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(-n)}.$$

2° Soit maintenant ξ très petit; deux cas sont à distinguer :

Si la partie réelle de n est positive, le terme le plus important sera le terme en ξ^{-n}; on pourra le calculer comme nous avons fait à la fin du paragraphe 15. Nous avons ramené à l'intégrale

$$\int e^{-X}(-X^2-\xi^2)^n \, dX$$

que nous avions prise de $-\xi$ à l'infini; ici il faut prendre le chemin correspondant à C_1, c'est-à-dire que X doit aller de l'infini à l'infini en contournant le

point $X = -\xi$; le chemin d'intégration pourra d'ailleurs contourner également le point $X = \xi$; car cela revient à ajouter J_n multiplié par un facteur constant; or J_n étant de l'ordre de ξ^{n+1} sera, pour ξ très petit, négligeable devant I_n. Dans ces conditions, notre chemin d'intégration peut être tracé de façon que l'on ait constamment $|X| > |\xi|$ et le calcul du paragraphe 15 demeurera applicable. On aura donc :

$$(6) \qquad I_n = \xi^{-n}(-1)^{1-n} \frac{\Gamma(2n+1)}{2[2 \cdot \Gamma(n+1)]^2}.$$

On remarquera que nous avons écrit ici $(-1)^{1-n}$ et non pas $(-1)^{1+n}$, c'est parce que nous avons rétabli le facteur $(-1)^{-2n}$, comme je l'ai expliqué plus haut.

Supposons maintenant que la partie réelle de n soit négative, de sorte que le terme principal soit en ξ^{n+1}. Nous n'avons plus ici le droit de tracer notre contour d'intégration de telle façon qu'il enveloppe les deux points $X = \pm\xi$ (qui correspondent aux deux points $x = \pm 1$), de sorte que l'analyse précédente est en défaut. Mais si ξ est très petit, nous pouvons remplacer $e^{i\xi x}$ par 1, et notre intégrale se réduit à

$$\xi^{n+1}\int_{-\infty}^{+\infty} (x^2-1)^n \, dx = i^{2n+1}\xi^{n+1} \frac{\Gamma\frac{1}{2}\Gamma\left(-n-\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(-n)},$$

d'où

$$(7) \qquad I_n = \frac{i}{2}[2^n\Gamma(n+1)]^{-2} \frac{\Gamma\frac{1}{2}\Gamma\left(-n-\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(-n)} i^{(2n+1)}\xi^{n+1}(e^{2i\pi n}-1)^{-1}$$

et

$$(7\ bis) \qquad I_{-n-1} = \frac{i}{2}[2^{-n-1}\Gamma(-n)]^{-2} \frac{\Gamma\frac{1}{2}\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(n+1)} i^{-(2n+1)}\xi^{-n}(e^{-2i\pi(n+1)}-1)^{-1}.$$

Nous remarquerons que

$$e^{-2i\pi(n+1)} - 1 = (-1)^{-(n+1)} 2i \sin n\pi,$$

d'où

$$I_{-n-1} = \frac{i}{2}[2^{-n-1}\Gamma(-n)]^{-2} \frac{\Gamma\frac{1}{2}\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(n+1)} i^{-2n-1}\xi^{-n}(-1)^{1+n}\frac{1}{2i\sin n\pi}.$$

Nous calculerons donc I_n par la formule (6) et I_{-n-1} par la formule (7 *bis*),

de sorte qu'il viendra

$$\frac{I_{-n-1}}{I_n} = 2^{4n+1}\frac{\Gamma\frac{1}{2}\,\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)\Gamma(n+1)}{\Gamma(2n+1)\Gamma^2(-n)}\,i^{-(2n+1)}(-1)^{2n+1}\frac{1}{\sin n\pi}.$$

Mais

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)\Gamma(n+1) = \Gamma\frac{1}{2}\,\frac{\Gamma(2n+1)}{2^{2n}},$$

d'où

$$\frac{I_{-n-1}}{I_n} = -2^{2n+1}\frac{\Gamma^2\frac{1}{2}}{\Gamma^2(-n)}\,i^{-2n-1}\frac{1}{\sin n\pi}.$$

Mais

$$\frac{\Gamma^2\frac{1}{2}}{\sin n\pi} = \frac{\pi}{\sin n\pi} = -\Gamma(-n)\Gamma(n+1),$$

d'où, finalement,

$$\frac{I_{-n-1}}{I_n} = 2^{2n+1}i^{-2n-1}\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(-n)},$$

formule identique à la formule (5), et qui peut s'écrire :

$$\frac{I_{-n-1}}{\Gamma(n+1)}2^{-n-1}i^{-n-1} = \frac{I_n}{\Gamma(-n)}2^n i^n,$$

ce qui veut dire que

(8) $$\frac{I_n}{\Gamma(-n)}2^n i^n$$

est une fonction entière de n qui ne change pas quand on change n en $-n-1$.

Passons à A_n : nous avons trouvé :

$$A_n = \left(\frac{-1}{\omega}\right)^n \frac{2n+1}{32\pi^2}\int \frac{e^{-i\omega r}\psi(r)\,dr}{(1-r^2)^{n-1}},$$

avec

$$\psi(r) = \frac{1}{r^2} + \left(\frac{1}{i\omega r^3} - \frac{1}{\omega^2 r^4}\right)\left(1 - \frac{1-r^4}{2r^2}\right)$$

ou, en rétablissant l'homogénéité :

(9) $$A_n = \left(\frac{1}{\omega D}\right)^n \frac{2n+1}{32\pi^2}\int \frac{e^{-i\omega r}\psi(r)\,dr\,D^{2n-1}}{(D^2-r^2)^{n-1}},$$

avec

(10) $$\psi(r) = \frac{D^2}{r^2} + \left(\frac{D^2}{i\omega r^3} - \frac{D^2}{\omega^2 r^4}\right)\left(1 - \frac{D^4-r^4}{2r^2D^2}\right).$$

La même définition peut être conservée pour n non entier, cependant il convient de faire l'observation suivante : L'intégration se fait le long d'un contour fermé entourant le point $r = \mathrm{D}$; quand n est entier, il n'est pas nécessaire de préciser quel est le point initial et final de ce contour, il n'en est plus de même si n n'est pas entier ; nous prendrons alors un chemin d'intégration qui partira de l'infini pour revenir à l'infini en enveloppant le point $r = \mathrm{D}$ et de telle façon qu'à l'infini $e^{-i\omega r}$ soit nul. Dans ces conditions A_n sera entièrement défini et l'on voit aisément que *c'est une fonction entière de n*.

Pour aller plus loin, reprenons le triangle SOM du paragraphe 6 dont les côtés sont D, r et ρ, et les angles φ, θ et $\pi - \xi$, et la formule :

$$4\pi f''^* = e^{i\omega(t-r)}\left[\frac{i\omega}{r}\sin\theta\sin\xi + \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{i\omega r^3}\right)(\sin\theta\sin\xi - 2\cos\theta\cos\xi)\right].$$

On remarquera que cette formule présente une symétrie particulière. Supposons que dans le triangle SOM, on permute les sommets S et M ; les longueurs D et ρ se permuteront, φ se changera en $-\varphi$; r ne changera pas, θ se changera en $\pi - \xi$, et ξ en $\pi - \theta$, de sorte que les produits $\sin\theta\sin\xi$ et $\cos\theta\cos\xi$ ne changeront pas. Il en résulte que f''^* ne changera pas. Donc f''^* est une fonction de D, ρ et φ qui ne change pas quand on change D, ρ et φ en ρ, D et $-\varphi$; et comme d'ailleurs elle ne change pas quand on change φ en $-\varphi$, ce sera une fonction symétrique de D et ρ ; mais les conditions de cette symétrie exigent quelque attention. Nous avons trouvé au paragraphe 6 :

$$f''^* = e^{i\omega t}\sum \mathrm{A}_n \mathrm{J}_n(\omega\rho)\frac{1}{\rho^2}\mathrm{P}_n(\cos\varphi),$$

A_n étant une fonction de D ; on serait tenté, à cause de la symétrie, d'écrire que A_n est égale, à un facteur constant près, à $\mathrm{J}_n(\omega\mathrm{D})\frac{1}{\mathrm{D}^2}$; mais la formule précédente n'est vraie que si $\rho < \mathrm{D}$; si l'on avait $\rho > \mathrm{D}$, il faudrait la modifier et y remplacer $\mathrm{J}_n(\omega\rho)$ par $\mathrm{I}_n(\omega\rho)$ (de même que si l'on veut développer $\frac{1}{r}$ suivant les polynomes P_n, le développement procède suivant les puissances positives de ρ si $\rho < \mathrm{D}$, et suivant les puissances négatives si $\rho > \mathrm{D}$). Or si l'on a $\rho < \mathrm{D}$, on aura inversement $\mathrm{D} > \rho$; il faudra donc conclure que A_n est proportionnel non pas à $\mathrm{J}_n(\omega\mathrm{D})\frac{1}{\mathrm{D}^2}$, mais à $\mathrm{I}_n(\omega\mathrm{D})\frac{1}{\mathrm{D}^2}$, et écrire :

$$f''^* = e^{i\omega t}\sum \mathrm{K}_n \mathrm{I}_n(\omega\mathrm{D})\mathrm{J}_n(\omega\rho)\frac{1}{\rho^2\mathrm{D}^2}\mathrm{P}_n(\cos\varphi),$$

K_n étant un coefficient indépendant à la fois de D, de ρ et de φ. Pour déterminer ce coefficient, supposons que D et ρ soient très petits; alors I_n et J_n se réduiront sensiblement à leurs premiers termes; soient

$$I_n(\omega D) = b_n(\omega D)^{-n}, \qquad J_n(\omega\rho) = c_n(\omega\rho)^{n+1}$$

ces premiers termes; il viendra, pour $t = 0$,

$$f'^{*} = \sum K_n b_n c_n \frac{\omega}{\rho D^2}\left(\frac{\rho}{D}\right)^n P_n.$$

D'autre part, dans ces conditions r est très petit, de sorte qu'il reste :

$$4\pi f'^{*} = \frac{1}{i\omega r^3}(\sin\theta \sin\xi - 2\cos\theta\cos\xi).$$

Nous savons que l'on a :

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{D}\sum\left(\frac{\rho}{D}\right)^n P_n.$$

Si nous différentions cette égalité, d'abord par rapport à D, puis par rapport à ρ, en remarquant que si $d\rho = 0$, on a

$$dr = dD\cos\theta$$

et que si $dD = 0$, on a

$$dr = -d\rho\cos\xi, \qquad r\,d\theta = d\rho\sin\xi,$$

nous trouverons :

$$-\frac{\cos\theta}{r^2} = -\frac{1}{D^2}\sum(n+1)\left(\frac{\rho}{D}\right)^n P_n,$$

puis

$$\frac{2\cos\theta\cos\xi}{r^3} - \frac{\sin\theta\sin\xi}{r^3} = \frac{1}{\rho D^2}\sum n(n+1)\left(\frac{\rho}{D}\right)^n P_n$$

ou, en identifiant les deux valeurs de $4\pi f'^{*}$,

$$\frac{-1}{i\omega\rho D^2}\sum n(n+1)\left(\frac{\rho}{D}\right)^n P_n = 4\pi\sum K_n b_n c_n \frac{\omega}{\rho D^2}\left(\frac{\rho}{D}\right)^n P_n$$

ou enfin :

$$K_n = \frac{i}{4\pi\omega^2}\,\frac{n(n+1)}{b_n c_n}.$$

Or nous avons trouvé [§ 14, *in initio* et § 16, form. (6)] :

$$b_n = (-1)^{1+n}\frac{\Gamma(2n+1)}{2[2^n\Gamma(n+1)]^2}, \qquad c_n = (-1)^n\frac{2[2^n\Gamma(n+1)]^2}{\Gamma(2n+2)},$$

d'où

$$b_n c_n = -\frac{\Gamma(2n+1)}{\Gamma(2n+2)} = \frac{-1}{2n+1}$$

et

$$K_n = \frac{-i}{4\pi\omega^2} n(n+1)(2n+1),$$

ce qui me permet d'écrire :

$$\text{(11)} \qquad A_n = \frac{-i}{4\pi\omega^2} n(n+1)(2n+1) \frac{I_n(\omega D)}{D^2}$$

et

$$\text{(12)} \qquad \psi = \frac{-i}{4\pi\omega^2} \frac{1}{\rho^2 D^2} \sum n(n+1)(2n+1) \frac{I_n(\omega D)}{I'_n(\omega\rho)} P_n(\cos\varphi).$$

Il ne sera pas inutile de vérifier que la valeur approchée de A_n concorde bien avec la formule (12) des paragraphes **13** et **14**. Nous avons trouvé :

$$I_n(\omega\rho) = MC\, e^{i\alpha},$$

avec

$$M = 2^n n^n e^{-n} \sqrt{\frac{2\pi n}{\cos\eta}}, \qquad C = \frac{i}{2(2^n n!)^2},$$

d'où

$$I_n(\omega\rho) = \frac{i}{2} e^{i\alpha} \frac{1}{2^n n! \sqrt{\cos\eta}}$$

en tenant compte de

$$n! = n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}.$$

Si nous changeons ρ en D, η se change en θ_0, $e^{i\alpha}$ en $i(-1)^n e^{i\gamma}$, de sorte qu'on trouvera :

$$I_n(\omega D) = \frac{(-1)^{n+1}}{2} e^{i\gamma} \frac{1}{2^n n! \sqrt{\cos\theta_0}},$$

d'où, par la formule (11), en remplaçant $n(n+1)(2n+1)$ par $2n^3$,

$$A_n = \frac{i}{4\pi\omega^2} (-1)^n e^{i\gamma} \frac{n^3}{2^n n! \sqrt{\cos\theta_0}} \frac{1}{D^2}.$$

Or la formule (12), qui s'écrit :

$$A_n = i(-1)^n \frac{n\sqrt{2\pi}}{8\pi^2} 2^{-n} n^{-n} e^n e^{i\gamma} \frac{\sin\theta_0 \sqrt{\sin\theta_0}}{\sqrt{\omega D \cos\theta_0}},$$

peut s'écrire également :

$$A_n = i(-1)^n \frac{n\sqrt{2\pi}}{8\pi^2} \frac{\sqrt{2\pi n}}{2^n n!} \frac{\frac{n}{\omega D}\sqrt{\frac{n}{\omega D}}}{\sqrt{\omega D \cos\theta_0}} e^{i\gamma}$$

qui se ramène facilement à la formule précédente.

L'expression (11) de A_n conserve un sens quand on suppose que n n'est pas entier, puisque I_n a été défini pour n quelconque. Je ne m'occuperai pas de démontrer que cette nouvelle définition de A_n pour n quelconque (*qui est celle que nous adopterons désormais*) concorde avec celle que nous avons donnée plus haut, bien que cela soit probable.

Le terme général de la série (12) est

$$(13) \qquad \frac{i}{4\pi\omega^2\rho^2 D^2}\, n(n+1)(2n+1)\,\frac{I_n(\omega D)}{I'_n(\omega\rho)}\,P_n(\cos\varphi).$$

On voit d'abord que ce terme général est une *fonction méromorphe* de n : Si maintenant nous changeons n en $-n-1$, je dis que cette fonction changera de signe, c'est-à-dire que ce sera une fonction *impaire* de $n+\frac{1}{2}$. En effet nous avons vu que P_n est une fonction paire, qu'il en est de même de

$$\frac{I_n(\omega D)}{\Gamma(-n)}\,2^n i^n, \qquad \frac{I_n(\omega\rho)}{\Gamma(-n)}\,2^n i^n$$

et par conséquent de $\frac{I_n(\omega D)}{I'_n(\omega\rho)}$. Il en est de même de $n(n+1)$; tandis que $2n+1$ est une fonction impaire. Donc l'expression (13) est une fonction impaire.

C. Q. F. D.

17. **Cas limite de $D=\rho$; emploi des séries divergentes.**

Le cas le plus intéressant est celui où D est très voisin de ρ ; on pourrait d'abord songer à faire $D=\rho$ dans la série (12) du paragraphe précédent ; mais cette série deviendrait alors divergente. On peut néanmoins employer l'artifice suivant. Reprenons la série :

$$\varphi = \sum \frac{-in(n+1)(2n+1)}{4\pi\omega^2 D^2\rho^2}\,\frac{I_n(\omega D)}{I'_n(\omega\rho)}\,P_n,$$

que je puis écrire :

$$(14) \qquad \varphi = \sum \frac{-in(n+1)(2n+1)}{4\pi\omega^2 D^2\rho^2}\,\frac{I_n(\omega D)}{I'_n(\omega D)}\,\frac{I'_n(\omega D)}{I'_n(\omega\rho)}\,P_n.$$

Tant que $\rho < D$, elle converge; si l'on fait $\rho = D$, le facteur $\frac{I'_n(\omega D)}{I'_n(\omega\rho)}$ devient égal à 1 et elle diverge. Ce facteur, pour n très grand est sensiblement égal à

$\left(\frac{\rho}{D}\right)^{n+1}$, de sorte que nous sommes amenés à comparer notre série à la suivante :

$$(2)\qquad \mu = \sum \frac{i n(n+1)(2n+1)}{4\pi\omega^2 D^2 \rho^2}\,\frac{I_n(\omega D)}{I'_n(\omega D)}\left(\frac{\rho}{D}\right)^{n+1} P_n.$$

Je me propose d'établir que, quand ρ tend vers D, les deux séries (1) et (2) tendent vers une même limite. La démonstration repose d'abord sur la possibilité d'écrire :

$$(3)\quad \frac{I'_n(\omega D)}{I'_n(\omega\rho)} = \left(\frac{\rho}{D}\right)^{n+1}\left[1 + \frac{A_1(\rho - D)}{n} + \frac{A_2(\rho - D)}{n^2} + \ldots + \frac{A_{p-1}(\rho - D)}{n^{p-1}} + \frac{B(\rho - D)}{n^p}\right],$$

où $A_1, A_2, \ldots, A_{p-1}$ sont des fonctions de ρ et de D, *indépendantes de n*, tandis que B est une fonction de ρ, de D et de n qui reste limitée même pour n très grand. Pour le démontrer, il suffit d'établir que l'on a

$$I_n(\xi) = A\xi^{-n-1}\left[1 + \frac{C_1}{n} + \frac{C_2}{n^2} + \ldots + \frac{C_{p-1}}{n^{p-1}} + \frac{C_p}{n^p}\right],$$

où $C_1, C_2, \ldots, C_{p-1}$ sont des fonctions de ξ, et C_p une fonction de ξ et de n qui reste limitée même pour n très grand.

Pour cela, rappelons que $I_n(\xi)$ est donné, à un coefficient constant près qui n'a pas à intervenir ici, par la formule

$$I_n = i\xi^{-n}\int_{\xi}^{\infty} e^{-X}(X^2 - \xi^2)^n\, dX.$$

On voit que c'est une fonction entière de ξ ; cette fonction est d'ailleurs la somme d'une fonction impaire et d'une fonction paire ; car on a

$$I_n = i\xi^{-n}\left[\frac{1}{2}\left(\int_{\xi}^{\infty} + \int_{-\xi}^{\infty}\right) + \frac{1}{2}\int_{-\xi}^{\xi}\right].$$

On voit ainsi que le coefficient de ξ^{-n} est $i(-1)^n 2n!$ (*cf.* § 15) et que celui de ξ^{n+1} est donné par la formule

$$\frac{1}{2}i\xi^{-n}\int_{-\xi}^{\xi} e^{-X}(X^2 - \xi^2)^n\, dX = \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} e^{\xi x}(x^2 - 1)^n \xi^{n+1}\, dx,$$

où l'on regarde ξ comme très petit, ce qui donne :

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1}(x^2 - 1)^n\, dx = \frac{1}{2}(-1)^n\, 2^{2n+1}\,\frac{\Gamma(n+1)^2}{\Gamma(2n+2)}.$$

Les deux coefficients ont pour valeur approximative

$$i(-1)^n 2^{2n} n^{2n}\sqrt{4\pi n}\, e^{-2n} \quad \text{et} \quad (-1)^n 2^{2n} \frac{n^{2n} e^{-2n} \sqrt{4\pi^2 n^2}}{(2n+1)2^{2n} n^{2n} e^{-2n} \sqrt{4\pi n}} = (-1)^2 \frac{\sqrt{\pi n}}{2n}.$$

Le second est donc beaucoup plus petit que le premier, de sorte que les termes qui ont même parité que ξ^{n+1} n'interviendront pas dans la discussion. Nous aurons :

$$\begin{aligned} I_n(\xi) = i(-1)^n 2n!\, \xi^{-n} \left[1 + \sum A_{2q} \left(\frac{\xi}{n} \right)^{2q} \right] \\ + \frac{1}{2}(-1)^n 2^{2n+1} \frac{\Gamma(n+1)^2}{\Gamma(2n+2)} \xi^{n+1} \left[1 + \sum B_{2q} \left(\frac{\xi}{n} \right)^{2q} \right], \end{aligned}$$

où A_{2q} et B_{2q} sont des coefficients développables suivant les puissances négatives de n. Cela suffit pour établir aisément la formule que nous avons en vue.

La formule (3) étant ainsi démontrée, nous avons :

$$\begin{aligned} \sum \alpha_n \frac{I'_n(\omega D)}{I'_n(\omega\rho)} = \sum \alpha_n \left(\frac{\rho}{D} \right)^{n+1} + A_1(\rho - D) \sum \frac{\alpha^n}{n} \left(\frac{\rho}{D} \right)^{n+1} + \ldots \\ \ldots + A_{p-1}(\rho - D) \sum \frac{\alpha_n}{n^{p-1}} \left(\frac{\rho}{D} \right)^{n+1} + (\rho - D) \sum \frac{\alpha_n C}{n^p} \left(\frac{\rho}{D} \right)^{n+1}. \end{aligned}$$

Si nous supposons que les séries $\sum \frac{\alpha^n}{n^q} \left(\frac{\rho}{D} \right)^{n+1}$ $(q = 1, 2, \ldots, p-1)$ tendent vers une limite finie pour $\rho = D$, et que la série $\sum \frac{\alpha_n}{n^p}$ et par conséquent aussi la série $\sum \frac{\alpha_n C}{n^p}$ soit absolument convergente, tous les termes du second membre de la relation précédente tendent vers zéro pour $\rho = D$, sauf le premier, et il reste

$$\lim \sum \alpha_n \frac{I'_n(\omega D)}{I'_n(\omega\rho)} = \lim \sum \alpha_n \left(\frac{\rho}{D} \right)^{n+1}.$$

Or il est aisé de constater que ces conditions sont remplies pour la série qui nous occupe; et en effet, en reprenant les formules asymptotiques des paragraphes précédents pour n très grand même par rapport à ω, et calculant au besoin des termes complémentaires par la méthode du paragraphe 8, on trouve que l'on peut écrire :

$$\alpha_n = P_n \left[\frac{A_0}{n^k} + \frac{A_1}{n^{k+1}} + \ldots + \frac{A_p}{n^{k+p}} \right],$$

$A_0, A_1, \ldots, A_{p-1}$ étant indépendants de n, A_p dépendant de n mais restant fini pour n infini ; et voici une première conséquence.

Nous trouvons :

$$(4)\qquad \frac{d\mu D^2}{dD} = \sum \frac{-in(n+1)(2n+1)}{4\pi\omega\rho^2} \frac{I'_n(\omega D)}{I'_n(\omega\rho)} P_n.$$

Les considérations précédentes étant applicables à cette nouvelle série, nous avons :

$$\lim \frac{d\mu D^2}{dD} (\text{pour } \rho = D) = \lim \sum \frac{-in(n+1)(2n+1)}{4\pi\omega\rho^2} \left(\frac{\rho}{D}\right)^{n-1} P_n;$$

ce qui, au facteur $\frac{-i}{4\pi\omega D^2}$ près, peut s'écrire :

$$\sum n(n+1)(2n+1) P_n \left(\frac{\rho}{D}\right)^n.$$

Or,

$$\sum P_n \left(\frac{\rho}{D}\right)^n = \frac{1}{r} = (\rho^2 + D^2 - 2D\rho\cos\varphi)^{-\frac{1}{2}},$$

d'où

$$\sum n(n+1)(2n+1) P_n \left(\frac{\rho}{D}\right)^n = \frac{d^3 \frac{1}{r}}{dD^2\, d\rho} - \frac{d^3 \frac{1}{r}}{dD\, d\rho^2}.$$

Or un calcul direct montre que le second membre de cette égalité s'annule pour $\rho = D$, donc : *quand* D *tend vers* ρ, *la dérivée de* μD^2 *par rapport à* D *tend vers zéro.*

Disons encore quelques mots d'une seconde question, tout à fait analogue à celle que nous venons de traiter et qui d'ailleurs nous sera utile dans la suite. *Dans quelles conditions peut-on affirmer que l'on a*

$$(5)\qquad \lim(\rho = 1) \text{ de } \sum \alpha_n \rho^n = \lim(\varepsilon = 0) \text{ de } \sum \frac{\alpha_n}{1 + \varepsilon n^2}\,?$$

1° Il est clair d'abord que cela a lieu si $\sum \alpha_n$ est convergente, même si la convergence n'est pas absolue; et en effet la limite du premier membre est $\sum \alpha_n$, en vertu d'un théorème bien connu d'Abel; et il en est de même de la limite du second membre en vertu d'une démonstration toute pareille.

2° Si $\sum \frac{\alpha_n}{n^2}$ converge absolument, nous pourrons donc affirmer que

$$\lim \sum \frac{\alpha_n \rho^n}{n^2} = \lim \sum \frac{\alpha_n}{n^2(1 + \varepsilon n^2)}.$$

Je suppose de plus que

$$\sum \frac{\alpha_n \rho^n}{n^2} = F(\rho)$$

soit une fonction analytique autour de $\rho = 1$, de telle sorte que la série puisse être continuée analytiquement en dehors du cercle de convergence. Il en sera de même de

$$\Phi(\rho) = \sum \frac{\alpha_n \rho^n}{n^2(1+\varepsilon n^2)}$$

et en effet $\Phi(\rho)$ est défini par l'équation différentielle :

$$\Phi(\rho) + \varepsilon(\rho^2\Phi'' + \rho\Phi') = F$$

dont les intégrales sont analytiques.

Celle de ces intégrales qui nous convient est d'ailleurs :

$$\Phi = \frac{1}{2i\sqrt{\varepsilon}}\left[\rho^{\frac{-1}{i\sqrt{\varepsilon}}}\int_0^\rho \frac{F}{\rho}\rho^{\frac{1}{i\sqrt{\varepsilon}}}d\rho - \rho^{\frac{1}{i\sqrt{\varepsilon}}}\int_0^\rho \frac{F}{\rho}\rho^{\frac{-1}{i\sqrt{\varepsilon}}}d\rho\right].$$

Et on trouverait de même :

$$\Phi_1 = \frac{\alpha}{2}\left[\rho^{-\alpha}\int_0^\rho F_1\rho^{\alpha-1}d\rho - \rho^{\alpha}\int_0^\rho F_1\rho^{-\alpha-1}d\rho\right],$$

en posant, pour abréger,

$$\Phi_1(\rho) = \rho^2\Phi''(\rho) + \rho\Phi'(\rho),$$

$$F_1(\rho) = \rho^2 F''(\rho) + \rho F'(\rho),$$

$$\alpha = \frac{1}{i\sqrt{\varepsilon}}.$$

On a, pour $\rho < 1$,

$$\sum \frac{\alpha_n}{1+\varepsilon n^2}\rho^n = \Phi_1(\rho)$$

et, la série restant convergente pour $\rho = 1$, le théorème d'Abel donne :

$$\sum \frac{\alpha_n}{1+\varepsilon n^2} = \Phi_1(1) = \frac{\alpha}{2}\int_0^1 F_1(\rho^{\alpha-1} - \rho^{-\alpha-1})\,d\rho.$$

L'application des principes du paragraphe 8 à cette intégrale montre que, quand ε tend vers zéro et, par conséquent α vers l'infini, cette intégrale tend vers $F_1(1)$.

Or,

$$F_1(1) = \lim F_1(\rho) = \lim \sum \alpha_n \rho^n \quad (\text{pour } \rho = 1);$$

donc :

$$\lim \sum \alpha_n \rho_n \ (\text{pour } \rho = 1) = \lim \sum \frac{\alpha_n}{1+\varepsilon n^2} \quad (\text{pour } \varepsilon = 0).$$

18. Étude de la fonction méromorphe $\frac{I_n}{I'_n}$.

Pour utiliser les résultats précédents, il importe de se rendre compte de la façon dont se comporte la série divergente

$$4i\pi\omega^2 D^2\rho^2\psi = \sum n(n+1)(2n+1)\frac{I_n(\omega D)}{I'_n(\omega D)}P_n;$$

et pour cela il faut d'abord chercher comment se comporte le rapport $\frac{I_n}{I'_n}$ pour n très grand par rapport à ωD.

Nous avons, il est vrai, trouvé déjà une expression approchée, mais il est nécessaire de pousser l'approximation plus loin. Envisageons le développement de $I_n(\xi)$ suivant les puissances de ξ, c'est-à-dire :

$$I_n = \xi^{-n}\left[1+\frac{\xi^2}{4n-1.2}+\frac{\xi^4}{(4n-1.2)(8n-3.4)}+\frac{\xi^6}{(4n-1.2)(8n-3.4)(12n-5.6)}+\dots\right];$$

les premiers termes de ce développement nous donnent une valeur approchée de I_n pour n très grand. On voit ainsi que $\xi^n I_n$ peut, *au point de vue asymptotique*, se développer suivant les puissances de $\frac{\xi^2}{n}$ et de $\frac{1}{n}$; si nous écrivons :

$$I_n\xi^n = 1+\sum C_k\left(\frac{\xi^2}{n}\right)^k.$$

C_k étant développable suivant les puissances de $\frac{1}{n}$, il viendra

$$\frac{I_n}{I'_n} = -\frac{\xi}{n}\left[\frac{1+\sum C_k\left(\frac{\xi^2}{n}\right)^k}{1+\sum C_k\left(\frac{\xi^2}{n}\right)^k - 2\sum\frac{k}{n}C_k\left(\frac{\xi^2}{n}\right)^k}\right].$$

Si nous nous bornons aux premiers termes du développement, nous trouverons :

$$-\frac{I_n}{I'_n}\frac{n}{\xi} = 1+2C_1\frac{\xi^2}{n^2}+4C_2\frac{\xi^4}{n^3}+6C_3\frac{\xi^6}{n^4}-2C_1^2\frac{\xi^4}{n^3}-6C_1C_2\frac{\xi^6}{n^4}+2C_1^3\frac{\xi^6}{n^4}+4C_1^2\frac{\xi^4}{n^4}.$$

Or,

$$C_1 = \frac{1}{4-\frac{2}{n}} = \frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{2n}+\frac{1}{4n^2}\right),\qquad C_1^2 = \frac{1}{16}\left(1+\frac{1}{n}\right),\qquad C_1^3 = \frac{1}{64},$$

$$C_2 = \frac{1}{\left(4-\frac{2}{n}\right)\left(8-\frac{12}{n}\right)} = \frac{1}{32}\left(1+\frac{1}{2n}\right)\left(1+\frac{3}{2n}\right) = \frac{1}{32}\left(1+\frac{2}{n}\right),$$

$$C_1C_2 = \frac{1}{128},\qquad C_3 = \frac{1}{384};$$

d'où

$$\frac{I_n}{I'_n}\frac{n}{\xi} = 1 + \xi^2\left(\frac{1}{2n^2} + \frac{1}{4n^3} + \frac{1}{8n^4}\right) + \xi^4\left(\frac{3}{8n^5}\right) + \ldots$$

Nous avons donc pour n très grand la formule approximative :

$$n(n+1)(2n+1)\frac{I_n}{I'_n} = -\xi(n+1)(2n+1) - \frac{\xi^3}{2},$$

à des termes près qui s'annulent avec $\frac{1}{n}$. Cette formule est applicable lorsque la partie réelle de n est positive et très grande, et lorsque par conséquent les termes en ξ^{-n}, ξ^{-n+1}, ..., sont pour les petites valeurs de ξ très grands par rapport aux termes en ξ^{n+1}, ξ^{n+2}, ... Si, au contraire, la partie réelle de n est négative et très grande, c'est le contraire qui arrivera et ce seront les termes en ξ^{n+1}, ... qui seront très grands par rapport aux termes en ξ^{-n}, ...

Cette formule nous montre toutefois que :

$$\lim \frac{I_n}{I'_n} = 0 \quad \text{pour partie réelle de } n \text{ positive et très grande;}$$

et comme $\frac{I_n}{I'_n}$ ne change pas quand on change n en $-n-1$, on aura de même :

$$\lim \frac{I_n}{I'_n} = 0 \quad \text{pour partie réelle de } n \text{ négative et très grande.}$$

Je voudrais maintenant étudier de plus près l'expression

$$R(n) = n(n+1)(2n+1)\frac{I_n}{I'_n},$$

qui est une fonction méromorphe de n, et rechercher en particulier comment sont distribués les infinis de cette fonction méromorphe et surtout ceux pour lesquels n est très grand. Nous avons :

$$I_n = C\int \xi^{n+1} e^{i\xi x}(x^2-1)^n\,dx,$$

C étant un coefficient constant indépendant de ξ et de x, mais dépendant de n; l'intégrale est prise le long d'un chemin allant de l'infini à l'infini, mais enveloppant le point singulier -1. Nous devons surtout nous occuper des coefficients des termes en ξ^{-n} et ξ^{n+1}, que j'appellerai A_n et B_n; on trouve :

$$A_n = e^{(2n-1)i\frac{\pi}{2}}(e^{4ni\pi}-1)\Gamma(2n+1)C,$$

$$B_n = (e^{4ni\pi} - e^{2ni\pi})e^{ni\pi}\frac{\Gamma(n+1)\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)}C.$$

Il est aisé de vérifier que, si l'on désigne par $\frac{A'_n}{B'_n}$ ce que devient le rapport $\frac{A_n}{B_n}$ quand on y change n en $-n-1$, on a comme il convient :

$$\frac{A_n}{B_n}\frac{A'_n}{B'_n} = 1.$$

Quoi qu'il en soit, nous pouvons écrire :

$$I_n = C(K_n + L_n),$$

où CK_n représente l'ensemble des termes du développement de I_n suivant les puissances de ξ qui sont de degré $-n$, $-n+1$, $-n+2$, ..., tandis que CL_n représente l'ensemble des autres termes, c'est-à-dire ceux qui sont de degré $n+1$, $n+2$, $n+3$, ... Si n est très grand, K_n se réduit sensiblement à son premier terme $A_n\xi^{-n}$, et L_n à son premier terme $B_n\xi^{n+1}$; nous pourrons donc écrire :

$$I_n = C(A_n\xi^{-n} + B_n\xi^{n+1})$$

et

$$\frac{I_n}{I'_n} = \frac{A_n\xi^{-n} + B_n\xi^{n+1}}{-nA_n\xi^{-n-1} + (n+1)B_n\xi^n}.$$

Si la partie réelle de n est positive ou négative et très grande, l'un des termes du numérateur (comme du dénominateur) l'emportera de beaucoup sur l'autre. Si la partie imaginaire de n est très grande sans que sa partie réelle le soit, ces deux termes seront comparables et il pourra se faire que le dénominateur s'annule.

On obtiendra donc les racines du dénominateur en écrivant :

$$\xi^{2n+1} = \frac{A_n}{B_n}\frac{n}{n+1}$$

ou sensiblement

$$\xi^{2n+1} = \frac{A_n}{B_n} = \frac{2^{2n}i}{\pi e^{2i\pi n}}\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)(e^{2i\pi n}+1)$$

ou, en remplaçant les fonctions eulériennes par leurs valeurs approchées,

$$\xi^{2n+1} = 4i\pi 2^{2n} e^{-2i\pi n} n^{2n} e^{-2n} 2\pi n$$

ou, en observant que l'argument de n doit être compris entre $-\pi$ et $+\pi$ (pour que les formules approchées des fonctions eulériennes soient applicables) et par conséquent voisin de $\frac{\pi}{2}$,

$$(2n+1)\log\xi = \log 8i\pi^2 + 2n(\log 2 - 1 - 2i\pi) + (2n+1)\log n - 2iK\pi.$$

K étant un entier. Cette formule pour n très grand équivaut sensiblement à

$$n\log n = i\mathrm{K}\pi$$

ou encore, plus grossièrement, à

$$n = \frac{i\mathrm{K}\pi}{\log \mathrm{K}},$$

ce qui nous indique que les infinis de notre fonction méromorphe sont un peu moins « condensés » que les nombres entiers K, mais plus condensés que les puissances $\mathrm{K}^{1+\varepsilon}$, quelque petit que soit ε.

Il y a intérêt à connaître le résidu correspondant. Posons

$$\Phi = \frac{\mathrm{B}_n}{\mathrm{A}_n}\xi^{2n-1}, \qquad \Phi_1 = \frac{\mathrm{B}_n}{\mathrm{A}_n}\,\frac{n+1}{n}\,\xi^{2n-1},$$

d'où

$$\frac{\mathrm{I}_n}{\mathrm{I}'_n} = \frac{\Phi+1}{\Phi_1-1}\,\frac{\xi}{n};$$

le résidu sera :

$$\frac{\xi}{n}\,\frac{1+\Phi}{\Phi_1}\,\frac{1}{\text{dér.}\log\Phi_1},$$

la dérivée logarithmique de Φ_1 étant prise par rapport à n. Mais pour une racine on doit avoir $\Phi_1 = 1$, et comme n est très grand, on a sensiblement $\Phi = \Phi_1$; il reste donc

$$\frac{2\xi}{n}\,\frac{1}{\text{dér.}\log\Phi_1}.$$

Or on trouve sensiblement

$$\text{dér.}\log\Phi_1 = -2\log n,$$

d'où

$$\text{résidu de } \frac{\mathrm{I}_n}{\mathrm{I}'_n} = -\frac{\xi}{n\log n} = \frac{i\xi}{\mathrm{K}\pi}.$$

Quant au résidu de $\mathrm{R}(n)$ il est sensiblement $\dfrac{-2\xi n^2}{\log n}$.

Cela nous permet de tirer des conclusions au sujet du développement de la fonction $\mathrm{R}(n)$; on voit que $\dfrac{\mathrm{I}_n}{\mathrm{I}'_n}$ s'annulant pour n très grand, il en est de même de $n^{-3}\mathrm{R}(n)$, et la considération de la distribution des infinis et des résidus nous montre qu'on peut construire dans le plan des n une série de cercles concentriques, de rayons indéfiniment croissants, tels que $n^{-3}\mathrm{R}(n)$ tend uniformément vers zéro sur ces cercles, quand le rayon de ces cercles croît indéfi-

niment. L'application du théorème de Cauchy suffit alors pour montrer que l'on a :

$$n^{-3}R(n) = \frac{\alpha_1}{n} + \frac{\alpha_2}{n^2} + \frac{\alpha_3}{n^3} + \sum \frac{B_k}{(n-\varepsilon_k)\varepsilon_k^3},$$

les α étant des constantes, les ε représentant les différents infinis de $n^{-3}R_n$ et les B_k étant les résidus correspondants de $R(n)$.

J'ai encore une remarque à faire au sujet de la distribution des infinis. Supposons que ξ soit très grand : si n est fini, $\frac{I_n}{I'_n}$ sera sensiblement égal à i et ne pourra pas devenir infini. Donc, tous les infinis auront un module très grand. Si maintenant n est très grand et réel positif, nous pourrons appliquer les formules du paragraphe 11 : elles nous donnent :

$$\frac{I_n}{I'_n} = \frac{i}{\cos\varphi} = \frac{i\xi}{\sqrt{n^2-\xi^2}},$$

ce qui montre que nous ne pouvons avoir d'infini que pour $n = \xi$; mais pour n voisin de ξ, les formules du paragraphe 11 ne sont plus applicables et il faut recourir à celles du paragraphe 12. La conclusion subsiste quand, la partie réelle de n étant positive et très grande, la partie imaginaire est finie, ou simplement est très petite par rapport à ξ.

Si la partie réelle de n est négative et très grande, sa partie imaginaire étant finie ou petite par rapport à ξ, on peut ramener au cas précédent en changeant n en $-n-1$, ce qui, comme on sait, ne change pas $\frac{I_n}{I'_n}$.

En résumé, si l'on fait abstraction des cas où il faut recourir aux procédés du paragraphe 12, tous les infinis ont leur partie imaginaire très grande de l'ordre de ξ.

Venons maintenant aux cas où il faut recourir à ces principes, c'est-à-dire où $\frac{n}{\xi}$ est voisin de ∓ 1 (mettons de $+1$) ; en reprenant les notations du paragraphe 12, les infinis cherchés seront donnés par la formule :

$$F'\left(t e^{\frac{2i\pi}{3}}\right) = 0.$$

Si $t = t_0$ est la plus petite racine de cette équation, on posera comme au paragraphe 12 :

$$t = \varepsilon^2\left(\frac{\xi}{2}\right)^{\frac{2}{3}}, \qquad n = \xi\cos\varepsilon = \xi - \frac{\xi\varepsilon^2}{2};$$

il viendra donc pour celui des infinis de $R(n)$ dont la partie imaginaire est la plus petite en valeur absolue :

$$n = \xi - t_0 \left(\frac{\xi}{2}\right)^{\frac{1}{3}},$$

ce qui montre que la partie imaginaire de cet infini est très grande de l'ordre de $\xi^{\frac{1}{3}}$.

On pourrait pousser plus loin l'étude des infinis de $R(n)$. Supposons n très grand, mais d'argument quelconque; nous avons une valeur approchée de I'_n qui nous est fournie par les procédés du paragraphe 11. Soit

$$C^{-1} I'_n = \Phi(n)$$

cette valeur approchée. Cette valeur est applicable, non seulement pour n très grand réel positif, mais pour divers arguments de n. Pour tous les arguments qui diffèrent des premiers de π, on aura

$$C^{-1} I'_n = \Phi(-n-1),$$

puisque $C^{-1} I'_n$ ne change pas quand on change n en $-n-1$. On verrait que l'on a dans tous les cas :

$$C^{-1} I'_n = \Phi(n) + \Phi(-n-1),$$

de sorte que les infinis seraient donnés par la formule

$$\Phi(n) + \Phi(-n-1) = 0.$$

Le coefficient C^{-1} devrait être choisi de telle sorte que $C^{-1} I'_n$ ne change pas quand on change n en $-n-1$, c'est-à-dire qu'on devrait, d'après le paragraphe 16, prendre

$$C^{-1} = (2i)^n \Gamma(n+1).$$

Mais il n'y a pas lieu d'insister sur tous ces points qui ne me sont pas utiles pour mon objet principal.

19. **Sommation de séries diverses.**

Nous allons envisager diverses séries de la forme

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} R(n) P_n(\cos\varphi),$$

où $R(n)$ est une fonction rationnelle ou méromorphe de n. Parmi ces séries, il y en aura qui seront divergentes; par définition, et par application des principes du paragraphe 17, la somme de ces séries sera la limite vers laquelle tend la série

$$\sum R(n)\rho^n P_n$$

quand ρ, d'abord plus petit que 1, tend vers l'unité. Cette limite existera dans les cas que nous aurons à traiter.

Nous partirons de l'identité

$$(1) \qquad \frac{-2i\pi}{e^{ix(\varphi-2\pi)} - e^{ix\varphi}} = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \frac{e^{in\varphi}}{n+x}.$$

On peut démontrer cette identité, soit en développant le premier membre par la formule de Fourier, soit en considérant ce premier membre comme une fonction méromorphe de x, décomposable en éléments simples, soit encore par d'autres procédés.

Cette identité suppose toutefois que φ est compris entre 0 et 2π.

Soit maintenant

$$f(z) = \sum A_n z^n$$

une fonction de z holomorphe à l'intérieur du cercle de rayon 1. On aura, par le théorème de Cauchy,

$$(2) \qquad 2i\pi A_n = \int f(z) z^{-n-1}\, dz, \qquad 0 = \int f(z) z^n\, dz \qquad (n \geq 0)$$

si l'intégrale est prise le long d'un cercle de rayon $1-\varepsilon$.

Soit

$$U = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n}{x-n-1};$$

il viendra, d'après les formules (2),

$$(3) \qquad 2i\pi U = \int f(z) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{z^n}{n+x}\, dz.$$

Mais si nous faisons $z = e^{i\psi}$, il viendra, d'après l'identité (1),

$$(4) \qquad \sum \frac{z^n}{n+x} = \frac{-2i\pi}{e^{ix(\psi-2\pi)} - e^{ix\psi}},$$

d'où

$$(5) \qquad U = \lambda(x) \int f(z)\, z^{-x}\, dz,$$

avec

$$(6) \qquad \lambda(x) = \frac{e^{2ix\pi}}{e^{2ix\pi} - 1}.$$

Le chemin d'intégration est représenté sur la figure 8 :

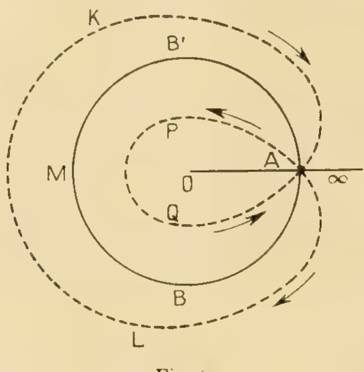


Fig. 8.

O est l'origine dans le plan des z, A est le point 1 ; ABMB′ est le cercle de rayon 1 ; OA est une coupure rectiligne. Le chemin d'intégration doit différer peu du cercle ABB′, puisque nous avons fait dans nos formules $z = e^{i\psi}$; il doit être à l'intérieur de ce cercle, pour que la fonction $f(z)$ reste holomorphe ; il doit partir du point A pour aboutir au point A, puisque ψ doit rester compris entre 0 et 2π pour que la formule (1) reste applicable. La valeur de z^{-x} au point A initial est 1, et au point A final elle sera $e^{-2i\pi x}$. Le chemin d'intégration sera donc le chemin APQA parcouru dans le sens de la flèche.

Nous chercherons une valeur approchée de U quand x est très grand, et pour cela nous appliquerons les principes du paragraphe 8. Si la partie imaginaire de x est positive et très grande, $\lambda(x)$ est sensiblement égal à $-e^{2ix\pi}$; les seuls éléments sensibles de l'intégrale sont ceux qui sont voisins du point A final. de sorte que nous trouvons pour l'intégrale :

$$f(1)\frac{e^{2i\pi(1-x)}}{1-x} = \frac{f(1)\, e^{-2ix\pi}}{1-x}$$

et

$$U = -\frac{f(1)}{1-x}.$$

Si la partie imaginaire de x est négative et très grande, $\lambda(x)$ est sensiblement égal à 1; les seuls éléments sensibles de l'intégrale sont ceux qui sont voisins du point A initial, de sorte que nous trouvons pour l'intégrale

$$f(1)\frac{-1}{1-x}$$

et encore

$$U = -\frac{f(1)}{1-x}.$$

On peut prendre, par exemple,

$$f(z) = \sum z^n e^{i\varphi n} = \frac{1}{1-z e^{i\varphi}},$$

d'où

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{in\varphi}}{x-n-1} = \frac{1}{x-1}\,\frac{1}{1-e^{i\varphi}};$$

mais ce n'est pas là l'application que nous avons en vue; nous prendrons

(7) $$f(z) = \sum P_n z^n = \frac{1}{\sqrt{1-2z\cos\varphi+z^2}}$$

et nous en tirerons

(8) $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{P_n}{x-n-1} = \frac{1}{2(x-1)\sin\frac{\varphi}{2}}.$$

C'est là une première sommation d'une série de la forme $\Sigma R(n) P_n$; mais, ainsi que nous allons le voir, les résultats sont bien différents quand la fonction rationnelle $R(n)$ jouit de la propriété

$$R(n) = -R(-n-1).$$

Comme premier exemple, prenons

$$R(n) = \frac{1}{x-n-1} + \frac{1}{-x-n}.$$

Nous avons trouvé d'abord :

(9) $$\sum \frac{P_n}{x-n-1} = \lambda(x)\int f(z)\, z^{-x}\, dz.$$

$f(z)$ étant la fonction (7). En changeant dans cette formule x en $1-x$, on trouve :

(10) $$\sum \frac{P_n}{-x-n} = \lambda(1-x)\int f(z)\, z^{x-1}\, dz.$$

Transformons cette intégrale en faisant $z = \frac{1}{u}$; il viendra :

$$-\int f\left(\frac{1}{u}\right) u^{1-x} \frac{du}{u^2}.$$

Quand z décrira le chemin APQA dans le sens de la flèche, u décrira le chemin ALKA dans le sens de la flèche; la valeur initiale de u^{-x} sera 1 et la valeur finale sera $e^{2i\pi x}$. Mais

$$\lambda(1-x) = -e^{2i\pi x}\lambda(x);$$

nous pouvons donc transformer la formule (10) et écrire :

$$(11) \qquad \sum \frac{P_n}{-x-n} = -\lambda(x) e^{-2i\pi x} \int f(z) z^{x-1} dz = \lambda(x) e^{-2i\pi x} \int f\left(\frac{1}{u}\right) u^{1-x} \frac{du}{u^2}.$$

Mais $e^{-2i\pi x} u^{-x}$ peut être regardé comme une autre détermination de u^{-x}, à savoir celle qui, au lieu d'avoir 1 pour valeur initiale et $e^{2i\pi x}$ pour valeur finale, a $e^{-2i\pi x}$ comme valeur initiale et 1 comme valeur finale. Nous pouvons donc écrire :

$$\sum \frac{P_n}{-x-n} = \lambda(x) \int f\left(\frac{1}{u}\right) u^{1-x} \frac{du}{u^2};$$

l'intégration est prise le long de ALKA avec la valeur initiale $e^{-2i\pi x}$ pour u^{-x}. Mais $f\left(\frac{1}{u}\right) = uf(u)$, ce qui donne :

$$(12) \qquad \sum \frac{P_n}{-x-n} = \lambda(x) \int f(u) u^{-x} du.$$

Si l'on observe que la valeur initiale de z^{-x} dans (9) est égale à la valeur finale de u^{-x} dans (12) et inversement, on voit qu'il est possible de raccorder les deux intégrales.

Pour calculer $\Sigma R(n) P_n$, nous n'aurons qu'à ajouter les deux formules (9) et (12), après avoir dans cette dernière remplacé u par z, ce qui est un simple changement de notation; on trouve alors :

$$(13) \qquad \sum R(n) P_n = \lambda(x) \int f(z) z^{-x} dz.$$

L'intégrale est prise le long du contour fermé APQALKA, la valeur initiale et finale de z^{-x} étant 1. On remarquera que, si l'on pratique les coupures $OA\infty$ et BMB', cette dernière allant de $B = e^{i\varphi}$ à $B' = e^{i(2\pi-\varphi)}$, les deux fonctions $f(z)$ et z^{-x} deviennent uniformes; et que notre contour ne coupe pas ces coupures.

Nous pouvons en conséquence déformer notre contour d'intégration d'une manière continue, pourvu que ce contour reste fermé, enveloppe la coupure BMB', en laissant en dehors la coupure OA ∞. Nous pouvons, par exemple, prendre un contour qui suit l'une des lèvres de la coupure B'MB du côté interne en allant de B en B' et qui revient ensuite de B' en B, en suivant l'autre lèvre de cette même coupure ; ce que nous pouvons encore écrire :

$$\sum R(n) P_n = 2\lambda(x) \int_B^{B'} f(z) z^{-x} dz \tag{14}$$

avec cette condition que l'intégrale doit être prise le long de la coupure sur la lèvre interne.

Nous allons chercher à évaluer approximativement l'intégrale (14), en appliquant les méthodes du paragraphe 8.

Deux cas sont à distinguer :

Si la partie imaginaire de x est positive et très grande, on aura sensiblement :

$$\lambda(x) = e^{-ix\pi}$$

et les seuls éléments sensibles de l'intégrale seront ceux qui sont voisins du point B' ; on aura alors :

$$\sum RP_n = -2e^{-ix\pi} \int^{2\pi-\varphi} \frac{i e^{ix(\varphi+\psi)} d\psi}{\sqrt{i(\varphi+\psi-2\pi)(e^{-2i\varphi}-1)}}.$$

Nous pouvons remplacer au numérateur l'exponentielle $e^{ix(\varphi+\psi)}$ par

$$e^{ix(2\pi-\varphi-\psi)} = e^{-ix\varphi} e^{-ix\psi}$$

et les formules du paragraphe 8 nous donnent, à un facteur numérique près,

$$\frac{e^{-i\varphi}}{\sqrt{e^{-2i\varphi}-1}} \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-ix(2\pi-\varphi)},$$

d'où

$$\sum RP_n = k \frac{e^{ix\varphi}}{\sqrt{(1-e^{2i\varphi})x}} \quad (k \text{ étant un facteur numérique}).$$

On remarquera que la partie imaginaire de x étant positive, l'exponentielle $e^{ix\varphi}$ est très petite.

Supposons maintenant que la partie imaginaire de x soit négative et très grande ; on aura sensiblement :

$$\lambda(x) = 1$$

et les seuls éléments sensibles de l'intégrale seront voisins du point B; on aura donc :

$$\sum \mathrm{RP}_n = 2\int_{\varphi} \frac{i\, e^{i(1-x)\psi}\, d\psi}{\sqrt{i(\psi-\varphi)(e^{2i\varphi}-1)}}.$$

On peut remplacer $e^{i(1-x)\psi}$ par $e^{i\varphi}e^{-ix\psi}$, ce qui donne, à un facteur numérique près,

$$\frac{e^{i\varphi}}{\sqrt{e^{2i\varphi}-1}}\,\frac{1}{\sqrt{x}}\,e^{-ix\varphi}.$$

On a donc :

$$\sum \mathrm{RP}_n = \mathrm{K}\,\frac{e^{-ix\varphi}}{\sqrt{(1-e^{-2i\varphi})x}}.$$

Ici encore, la partie imaginaire de x étant négative, l'exponentielle $e^{-ix\varphi}$ est très petite.

On voit donc que les deux parties de la somme,

$$\sum \frac{\mathrm{P}_n}{x-n-1}, \qquad \sum \frac{\mathrm{P}_n}{-x-n},$$

se compensent presque exactement.

Supposons maintenant

$$\mathrm{R}(n) = (2n+1)^p.$$

Nous avons

$$\frac{1}{\sqrt{\rho^2-2\rho\mathrm{D}\cos\varphi+\mathrm{D}^2}} = \sum \frac{\rho^n}{\mathrm{D}^{n+1}}\mathrm{P}_n = \mathrm{S},$$

formule valable pour $\rho < \mathrm{D}$.

Introduisons le symbole d'opération :

$$\Delta\mathrm{S} = \rho\frac{d\mathrm{S}}{d\rho} - \mathrm{D}\frac{d\mathrm{S}}{d\mathrm{D}};$$

nous trouverons successivement :

$$\Delta\mathrm{S} = \sum (2n+1)\frac{\rho^n}{\mathrm{D}^{n+1}}\mathrm{P}_n, \qquad \Delta^2\mathrm{S} = \sum (2n+1)^2\frac{\rho^n}{\mathrm{D}^{n+1}}\mathrm{P}_n$$

et en général :

$$\Delta^p\mathrm{S} = \sum (2n+1)^p\frac{\rho^n}{\mathrm{D}^{n+1}}\mathrm{P}_n.$$

Quand on permute ρ et D, la fonction S ne change pas, le symbole Δ se change en $-\Delta$, et $\Delta^p\mathrm{S}$ se change en $(-1)^p\Delta^p\mathrm{S}$. Si donc p est impair et si l'on

fait $D = \rho$, on aura :

$$\Delta^p S = 0.$$

Nous avons :

$$\Delta^p S = \sum (2n+1)^p \frac{\rho^n}{D^{n+1}} P_n$$

en supposant $\rho < D$; faisons $D = 1$, faisons tendre ρ vers D, le premier membre tendra vers zéro, le second membre tendra vers une limite qui sera par définition la somme de la série divergente

$$\sum (2n+1)^p P_n.$$

On aura donc, pour p impair,

$$\sum (2n+1)^p P_n = 0.$$

On conclura de là que

$$\sum R(n) P_n = 0$$

quand $R(n)$ est un polynome entier tel que

$$R(n) = -R(-n-1).$$

20. Conclusion.

Appliquons ces principes à notre problème. Nous avons trouvé :

(1) $$\mu = \frac{-i}{4\pi\omega^2 D^2 \rho^2} \sum n(n+1)(2n+1) \frac{I_n(\omega D)}{I'_n(\omega \rho)} P_n.$$

Nous avons vu au paragraphe 17 que la limite de cette expression, pour $\rho = D$, est

(2) $$\mu = \frac{-i}{4\pi\omega^2 D^4} \sum R(n) P_n,$$

où

$$R(n) = n(n+1)(2n+1) \frac{I_n(\omega D)}{I'_n(\omega D)},$$

la somme de la série divergente (2) étant définie comme nous l'avons fait aux paragraphes 17 et 19.

Nous avons observé ensuite que $R(n)$ est une fonction méromorphe de n satisfaisant à la condition

$$R(n) = -R(-n-1).$$

Nous avons vu ensuite au paragraphe 18 que cette fonction méromorphe peut être décomposée en éléments simples. Soit ε_k l'un des infinis de $R(n)$, et B_k le résidu correspondant : la série

$$(3) \qquad \sum \frac{B_k n^2}{\varepsilon_k^2(n-\varepsilon_k)}$$

est convergente et sa somme ne diffère de $R(n)$ que par un polynome du second degré.

Distinguons parmi les infinis ε_k ceux dont la partie imaginaire est positive : nous aurons en outre les infinis $-1-\varepsilon_k$ qui auront leur partie imaginaire négative, et le résidu correspondant sera $+B_k$; on peut donc diviser la série (3) en deux parties,

$$(4) \qquad \sum \frac{B_k n^2}{\varepsilon_k^2(n-\varepsilon_k)}, \qquad \sum \frac{B_k n^2}{(1+\varepsilon_k)^2(n+1+\varepsilon_k)},$$

en ne donnant aux ε_k que les valeurs dont la partie réelle est positive.

Comparons la seconde série (4) à la suivante :

$$\sum \frac{B_k(n+1)^2}{\varepsilon_k^2(n+1+\varepsilon_k)}.$$

Nous constaterons que ces deux séries convergent et que leur différence est un polynome du second degré en n. Cela nous permet d'écrire :

$$(5) \qquad R(n) = \prod(n) + \sum Q_k(n),$$

avec

$$Q_k(n) = \frac{B_k n^2}{\varepsilon_k^2(n-\varepsilon_k)} - \frac{B_k(n+1)^2}{\varepsilon_k^2(n+1+\varepsilon_k)}.$$

On aura d'ailleurs :

$$(6) \qquad \prod(n) = -\prod(-n-1),$$

$$(7) \qquad Q_k(n) = -Q_k(-n-1).$$

Nous sommes ainsi conduit à envisager la double somme :

$$(8) \qquad \sum_n \prod(n) P_n + \sum_n \sum_k Q_k(n) P_n.$$

Nous observerons que, d'après le paragraphe 19 et la relation (6), on aura :

$$\sum \prod(n) P_n = 0.$$

D'autre part,

$$Q_k(n) = \varpi_k(n) + B_k\left[\frac{1}{n-\varepsilon_k} + \frac{1}{n+1+\varepsilon_k}\right],$$

ϖ_k étant un polynome du second degré, tel que

$$\varpi_k(n) = -\varpi_k(-n-1),$$

ce qui entraîne :

$$\sum \varpi_k(n) P_n = 0,$$

$$\sum_n Q_k(n) P_n = B_k \sum \left[\frac{1}{n-\varepsilon_k} + \frac{1}{n+1+\varepsilon_k}\right] P_n.$$

Or la somme qui figure ici au second membre est, aux notations près, celle que nous avons évaluée au paragraphe 19.

Comme $-\varepsilon_k$ a sa partie imaginaire négative, elle est égale à

$$K' \frac{e^{i\varepsilon_k\varphi}}{\sqrt{\varepsilon_k(1-e^{-2i\varphi})}},$$

K′ étant un facteur numérique. La somme (8) prend ainsi la forme :

$$(9) \qquad K' \sum_k \frac{B_k e^{i\varepsilon_k\varphi}}{\sqrt{\varepsilon_k(1-e^{-2i\varphi})}}.$$

Nous savons que la série $\sum \frac{B_k}{\varepsilon_k^3}$ converge absolument ; mais les exponentielles $e^{i\varepsilon_k\varphi}$ décroissent beaucoup plus rapidement que les facteurs $\frac{1}{\varepsilon_k^3}$; nous sommes donc certain que la série (9) converge, et il est aisé de s'assurer que sa somme est bien la même que celle de la série (8). Les termes de la série (9) décroissent même si rapidement qu'on peut réduire la série à son premier terme et écrire :

$$(10) \qquad \mu = \frac{K''}{\omega^2 D^4} \frac{B_1 e^{i\varepsilon_1\varphi}}{\sqrt{\varepsilon_1(1-e^{-2i\varphi})}},$$

K″ étant un nouveau facteur numérique.

Qu'est-ce maintenant que ε_1 ? La remarque finale du paragraphe 18 nous permet de nous en rendre compte ; on a

$$\varepsilon_1 = \omega D - t_0\left(\frac{\omega D}{2}\right)^{\frac{1}{3}},$$

t_0 étant la plus petite racine de l'équation

$$F\left(t e^{\frac{i\pi}{3}}\right) = 0.$$

Ainsi l'expression de μ contiendra un facteur $e^{i\varepsilon_1\rho}$, ce facteur décroîtra très rapidement quand ρ augmentera, c'est-à-dire à mesure qu'on s'éloignera de la source ; son module est, en effet, égal à $e^{-h\rho}$, h étant la partie imaginaire de ε_1 ; or cette partie imaginaire est de la forme $m(\omega D)^{\frac{1}{3}}$, m étant un facteur numérique, ou en prenant $D = 1$, de la forme $m\omega^{\frac{1}{3}}$.

Quand ρ augmente, c'est-à-dire quand on s'éloigne de la source, l'amplitude des oscillations varie sensiblement comme l'exponentielle $e^{-m\omega^{\frac{1}{3}}\rho}$.

C'est là notre conclusion finale. Comme ω est très grand, $\omega^{\frac{1}{3}}$ est très grand aussi, de sorte que cette decroissance est très rapide, quoique moins rapide que si l'exposant était de la forme $-m\omega\rho$.

Cette conclusion finale permet-elle d'expliquer les phénomènes observés ? Pour s'en rendre compte, il convient alors de se reporter à la remarque du paragraphe 7, d'après laquelle les ondes hertziennes possèdent un spectre continu où les composantes qui correspondent à des valeurs de ω qui ne sont pas très grandes ne sont pas négligeables. Cette explication est-elle suffisante ? il est permis d'en douter. Des calculs numériques et des expériences précises permettront seuls de trancher la question.

Peut-être sera-t-on obligé d'en revenir à une autre hypothèse déjà souvent proposée, et d'après laquelle les couches supérieures de l'atmosphère, devenues conductrices par ionisation, réfléchiraient les ondes. Ce qui viendrait à l'appui de cette opinion, c'est la grande différence constatée entre les transmissions à grande distance de nuit et de jour. Il est possible, en effet, que les conditions de l'ionisation n'étant pas les mêmes de nuit et de jour, le passage des couches non conductrices aux couches conductrices se fasse plus brusquement la nuit, de façon à rendre la réflexion possible.

Notre conclusion finale, est exactement conforme à celle que j'avais formulée dans les leçons que j'ai professées à l'École supérieure de Télégraphie et qui ont été reproduites dans la *Lumière électrique*. Elle est, en revanche, en contradiction avec une formule que j'ai donnée dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*.

Je dois au public l'explication de mes palinodies successives. A l'époque de mes leçons de l'École de Télégraphie, j'avais introduit par une voie indirecte l'équation différentielle du paragraphe 12, et je m'étais contenté, comme

démonstration, d'un simple aperçu. Reprenant ensuite la question, je trouvais les formules approchées des paragraphes 11, 13 et 14; je voyais bien qu'elles cessaient d'être applicables quand n est très voisin de $\omega\rho$ ou de ωD, mais je croyais, par erreur, que les termes correspondants étaient trop peu nombreux pour avoir une influence et que je pouvais sans inconvénient appliquer les formules approchées sans restriction. C'est le contraire qui arrive; les termes auxquels ces formules ne sont pas applicables ont une somme sensible, et qui compense presque exactement celle des autres. C'est là l'origine de ma Note des *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*.

Je ne m'étais pas encore aperçu de mon erreur quand j'ai fait mes Conférences de Göttingen; au moment où ces conférences ont été imprimées, je venais seulement de la reconnaître et j'ai dû me borner à indiquer, par une note brève en français, que la dernière formule était inexacte.

Paris, 15 octobre 1909.

ÜBER EINIGE GLEICHUNGEN

IN DER

THEORIE DER HERTZSCHEN WELLEN

Mathematisch Naturwissenschaftliche Blätter (Berlin), t. 8, n° 4, 4 s. (13 octobre 1910).

Meine Herren! Ich will einen kleinen Satz über die Hertzschen Wellen Ihnen beweisen und dieser Satz ist mit den Greenschen Sätzen ähnlich. Man kann mit Hilfe dieses Satzes die wichtigsten Probleme lösen, welche auf diesem Gebiete sich darstellen. Ich werde die Maxwellschen Bezeichnungen gebrauchen, aber nur die Lichtgeschwindigkeit als Einheit der Geschwindigkeit nehmen.

$$f, \quad g, \quad h$$

sind die Komponenten der elektrischen Verschiebung; α, β, γ sind die Komponenten der magnetischen Kraft. Also gelten für diese Funktionen die bekannten Maxwellschen Gleichungen, d. h.

$$4\pi \frac{df}{dt} = \frac{d\gamma}{dy} - \frac{d\beta}{dz},$$

$$-\frac{d\alpha}{4\pi\, dt} = \frac{dh}{dy} - \frac{dg}{dz}$$

und die anderen Gleichungen, die man von diesen durch Symmetrie erzielen kann.

Ich setze voraus, dass alle unsere Funktionen von der Zeit so abhängen, dass sie der Exponentialfunktion $e^{i\omega t}$ proportional sind.

Wenn man einen physikalischen Sinn darüber bekommen will, so muss man nur den reellen Bestandteil unserer Funktion nehmen; und man hat,

wenn ω reell ist, eine ungedämpfte, periodische Schwingung. Wenn die Schwingung gedämpft ist — das setze ich hier [voraus] —, so ist ω komplex. Ich setze [also] hier voraus, dass ω komplex und dass die Schwingung gedämpft ist. Wir haben nun :

$$4\pi \frac{df}{dt} = \frac{d\gamma}{dy} - \frac{d\beta}{dz} = 4\pi i\omega\alpha f,$$

$$-\frac{d\alpha}{4\pi\, dt} = \frac{dh}{dy} - \frac{dg}{dz} = -\frac{i\omega\alpha}{4\pi}.$$

Dies sind die Gleichungen des Maxwellschen Feldes.

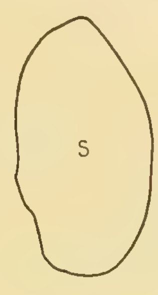


Fig. 1.

Jetzt denke ich mir irgend eine geschlossene Fläche S. Ich betrachte den inneren Raum und den äusseren Raum. Ich betrachte zwei verschiedene Felder, z. B.

$$f_1, \quad g_1, \quad h_1; \qquad \alpha_1, \quad \beta_1, \quad \gamma_1;$$

dies ist das erste Feld; aber das zweite Feld wird mit dem Index 2 bezeichnet :

$$f_2, \quad g_2, \quad h_2; \qquad \alpha_2, \quad \beta_2, \quad \gamma_2.$$

Ich betrachte das Integral, das ich mit $[f_1, \alpha_2]$ bezeichne :

$$\int \begin{vmatrix} f_1, & g_1, & h_1 \\ \alpha_2, & \beta_2, & \gamma_2 \\ l, & m, & n \end{vmatrix} d\sigma = [f_1, \alpha_2]$$

$d\sigma$ ist ein Flächenelement der Fläche S; l, m, n sind die Richtungs *cos* dieses Elementes. Man sieht, dass in unserer Determinante die tangentiellen Komponenten unserer beiden Felder vorkommen, die normalen Komponenten haben nichts zu tun, sie verschwinden. Es ist wichtig, dies zu bemerken. Wenn man eine teilweise Integration durchführt, so bekommt man die folgende

Gleichung :

$$[f_1, \alpha_2] = \int d\tau \left[\frac{i\omega}{4\pi} \sum_{\alpha, \beta, \gamma} \alpha_1 \alpha_2 + 4\pi i\omega \sum_{f, g, h} f_1 f_2 \right].$$

Dies ist ein Raumintegral, das durch alle Raumelemente $d\tau$ des inneren Gebietes durchgeführt werden muss. Sie können sehen, dass dieser Ausdruck symmetrisch ist [in bezug auf die Indizes] :

$$[f_1, \alpha_2] = [f_2, \alpha_1].$$

Das ist unser Satz; aber der Satz ist nur für das innere Gebiet so bewiesen. Wenn wir ihn für das äussere Gebiet beweisen wollen, so kommt eine kleine Schwierigkeit vor.

Wir könnten für einen Raum zwischen der Fläche S und einer grossen Kugel von unendlich zunehmendem Radius den Satz beweisen und in die Grenzen gehen. Und das könnte gehen, wenn im Unendlichen alle unsere Funktionen verschwinden. Aber das ist nicht immer der Fall. Es ist dann der Fall, wenn ω reell ist, wenn der imaginäre Bestandteil von ω positiv ist. Aber dies ist nicht der Fall, wenn dieser Bestandteil negativ ist, d. h. im Falle der gedämpften Schwingungen. Wir müssen also einen weiten Umweg machen.

Ich werde den Satz zuerst für den Fall der Kugel durchfüren. Es sei also S eine Kugel. Sei irgend ein System von drei Funktionen in dem Raume [gegeben]. Diese drei Funktionen in dem Raume stellen die Komponenten eines Vektors dar; dieser Vektor hängt von dem Punkte (x, y, z) ab. Seien ξ, η, ζ diese drei Komponenten. Man kann diese drei Komponenten so in dieser Weise definieren :

$$\xi = x \Sigma \mathrm{PT} + \sum \mathrm{U} \frac{d\mathrm{P}}{dx} + \sum \left(z \frac{d\mathrm{P}}{dy} - y \frac{d\mathrm{P}}{dz} \right) \mathrm{V},$$

$$\eta = y \Sigma \mathrm{PT} + \sum \mathrm{U} \frac{d\mathrm{P}}{dy} + \sum \left(x \frac{d\mathrm{P}}{dz} - z \frac{d\mathrm{P}}{dx} \right) \mathrm{V},$$

$$\zeta = z \Sigma \mathrm{PT} + \sum \mathrm{U} \frac{d\mathrm{P}}{dz} + \sum \left(y \frac{d\mathrm{P}}{dx} - x \frac{d\mathrm{P}}{dy} \right) \mathrm{V}.$$

P sind die sogenannten Kugelpolynome; man hat also : $\Delta \mathrm{P} = 0$.

Das Polynom P ist homogen; man erhält daher :

$$\sum_{x, y, z} x \frac{d\mathrm{P}}{dx} = n \mathrm{P}.$$

T, U, V hängen nur von r ab, sind also von der Form $f(r)$. Diesen Satz zu beweisen, das wäre etwas länger; aber können bemerken, dass wir haben :

$$\Sigma x\xi = \Sigma P(r^2 T + n U).$$

Wir wissen also, dass irgend eine Funktion im Raume, wenn sie im Unendlichen verschwindet, kann nach Kugelpolynomen entwickelt werden mit Koeffizienten, welche nur von r abhängen. Wir haben [für] $\sum \frac{d\xi}{dx}$ einen ähnlichen Ausdruck und auch für

$$\sum x\left(\frac{d\zeta}{dy} - \frac{d\eta}{dz}\right).$$

Wir können bemerken, dass unser Vektor (ξ, η, ζ) auch von den Ausdrücken $\Sigma x\xi$, $\sum \frac{d\xi}{dx}$ und $\sum x\left(\frac{d\zeta}{dy} - \frac{d\eta}{dz}\right)$ ganz bestimmt ist. Und wirklich, wenn

$$\Sigma x\xi = \sum \frac{d\xi}{dx} = \sum x\left(\frac{d\zeta}{dy} - \frac{d\eta}{dz}\right) = 0 \text{ sind.}$$

verschwinden, so verschwindet der Vector (ξ, η, ζ). Denn $\Sigma x\xi = 0$ bedeutet : Der Vektor ist der Kugelfläche tangent, er berührt die Kugelfläche. Was heisst die zweite Gleichung

$$\sum \frac{d\xi}{dx} = 0\,?$$

d. h. wir haben auf der Kugelfläche keine Konvergenz. Und was heisst die dritte Gleichung

$$\sum x\left(\frac{d\zeta}{dy} - \frac{d\eta}{dz}\right) = 0\,?$$

Das bedeutet : Auf der Kugelfläche gibt es keine Rotation; es ist ein [sogenannter] irrotationaler Vektor. Ein Vektor, welcher auf einer geschlossenen Fläche keine Konvergenz und keine Rotation besitzt, verschwindet identisch. Also, wir können den Satz annehmen.

Jetzt werden wir also unsere beiden Vektoren (f, g, h) und (α, β, γ) in dieser Art entwickeln. Ich werde zuerst den Satz $[f_1, \alpha_2] = [f_2, \alpha_1]$ beweis en für einen besonderen Fall. Ich setze voraus, dass α, β, γ nur ein einfaches Glied der Entwicklung enthält; d. h., dass wir haben z. B.

$$\alpha = \left(z\frac{dP}{dy} - y\frac{dP}{dz}\right)V \text{ usw.,}$$

Wenn α, β, γ gegeben sind, so kann man f, g, h mit den Maxwellschen Gleichungen leicht berechnen. Ein solches Feld heisse ein einfaches Feld erster Gattung.

Setzen wir jetzt voraus, dass wir haben

$$f = \left(z\frac{dP}{dy} - y\frac{dP}{dz}\right) V \text{ usf.},$$

und berechnen wir die magnetische Kraft mit den Maxwellschen Gleichungen. Ein Solches Feld heisse ein einfaches Feld zweiter Gattung. Ein beliebiges Feld ist die Summe einer unendlichen Reihe von einfachen Feldern erster und zweiter Gattung. Es genügt also, unseren Satz zu beweisen für den Fall, wo die beiden Felder einfache Felder erster oder zweiter Gattung sind. Also betrachten wir unseren Ausdruck $[f_1, \alpha_2] - [f_2, \alpha_1]$, welcher nach unserem Satz verschwinden muss. Dieser Ausdruck ist von dem Radius der Kugel unabhängig. Denn wir können den Raum betrachten, welcher zwischen zwei Kugeln von verschiedenem Radius steht; und dieser Raum ist endlich. Also wir haben keine Schwierigkeit. Für diesen Raum gilt der Satz. Dieser Ausdruck verschwindet für die beiden Grenzen des Raumes; also $[f_1, \alpha_2] - [f_2, \alpha_1]$ hat denselben Wert für die innere und die äussere Kugel und ist von r unabhängig. Wir haben vorausgesetzt, dass unsere beiden Felder einfache Felder sind, welche von zwei Funktionen V abhängen und diese Funktionen können V_1 und V_2 heissen. Unser Ausdruck hängt von den Funktionen V_1 und V_2 ab. Und man kann sehen : V muss einer Gleichung genug tun. V ist eine Funktion von r :

$$V'' + \frac{2(n+1)}{r} V' + \omega^2 V = 0.$$

Wir brauchen bloss eine (partikuläre) Lösung dieser algebraischen Gleichung (mit) zu nehmen, das ist die Lösung :

$$V = e^{-i\omega r}\,\pi\left(\frac{1}{r}\right),$$

wo π ein ganzes Polynom ist.

Man kann beweisen, dass unser Ausdruck von der form $e^{-2i\omega r}\,\pi\left(\frac{1}{r}\right)$ ist.

Diese partikuläre Lösung ist diejenige, welche die Bedingung erfüllt, dass die Störung von der Quelle bis zum Unendlichen fortgepflanzt wird. Dieser Ausdruck kann nur konstant und von r unabhängig sein, wenn er ganz identisch verschwindet. Der Satz ist also für das äussere Gebiet einer Kugel bewiesen.

Um diesen Satz für irgend eine Fläche zu erweitern, das ist jetzt ganz leicht.

Wir haben eine Fläche S und eine grosse Kugel S′. Dieser Satz gilt für den Raum ausserhalb S′, weil S′ eine Kugel ist; er gilt für den Raum zwischen S und S′; er muss also für den Raum ausserhalb S′ gelten. Ich betrachte jetzt, was ich Grundfunktion nennen werde; wir haben zwei Arten von Grundfunk-

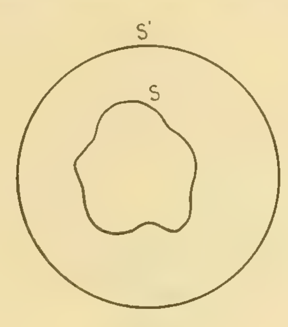


Fig. 2.

tionen. S ist eine Oberfläche; das wird die Oberfläche des Hertzschen Leiters, des Hertzschen Erregers oder des Hertzschen Akzeptors oder eines beugenden Körpers.

Unsere Funktionen f, g, h; α, β, γ genügen den Maxwellschen Gleichungen ausserhalb S und innerhalb S und sie verhalten sich regulär innerhalb S und ausserhalb S, aber sie sind unstetig an der Oberfläche S.

f und α, das sind die Grundfunktionen. f_1^e ist die Funktion in dem äusseren Gebiete, f_1^i in dem inneren Gebiete. μ ist ein konstanter Koeffizient; [dann ist] : $f_1^e = \mu f_1^i$ für die tangentiellen Komponenten der elektrischen Verschiebung und $f_1^e = f_1^i$ für die Normalkomponenten der elektrischen Verschiebung. Für die magnetische Kraft ist es umgekehrt :

$$\alpha_1^e = \alpha_1^i \quad \text{für die tangentiellen Komponenten}$$

und

$$\alpha_1^e = \mu \alpha_1^i \quad \text{für die normalen Komponenten.}$$

Dies ist für die [Grund-]funktionen der I. Gattung und für die Funktionen der II. Gattung ist es umgekehrt :

$$f_2^e = f_2^i \quad \text{für die tangentiellen Komponenten}$$

und

$$f_2^e = \mu f_2^i \quad \text{für die normalen Komponenten}$$

der elektrischen Verschiebung [und entsprechend die Komponenten der ma-

gnetischen Kraft]. Also, wenn wir haben den Ausdruck $[f_1', \alpha_2']$, so hangt dieser Ausdruck, wie ich schon oben bemerkt habe, nur ab von den tangentiellen Komponenten. Ich setze voraus, dass das erste Feld $f_1, \ldots$ durch eine Grundfunktion erster Gattung bestimmt wird, und das zweite Feld $f_2, \ldots$ durch eine Grundfunktion zweiter Gattung.

Man hat also :

$$[f_1', \alpha_2'] = \mu\mu'[f_1', \alpha_2']$$

und umgekehrt hat man :

$$[f_2', \alpha_1'] = [f_2', \alpha_1'].$$

Nach unserem Satze ist aber der erste Ausdruck dem zweiten gleich; also alle Ausdrücke müssen verschwinden, wenn nicht $\mu\mu' = 1$ ist.

Das ist eine Eigenschaft der Grundfunktion.

Ich will unser Feld nach Grundfunktionen entwickeln in der folgenden Weise : f und α sind das betrachtete Feld. Ich setze :

$$f = \Sigma\lambda_k f_k \qquad \text{und} \qquad \alpha = \Sigma\lambda_k\alpha_k.$$

f_k und α_k sind die Grundfunktionen erster Gattung, α_k' und f_k' sind die Grundfunktionen II. Gattung, welche so gewählt werden, dass $\mu\mu' = 1$ ist, wenn man zwei Grundfunktionen von verschiedener Gattung, aber von demselben Index k betrachtet. Wie kann man nun die Entwicklung durchführen, wie kann man die Koeffizienten λ berechnen? Man hat

$$[f, \alpha_j'] = \Sigma\lambda_k[f_k, \alpha_j']$$

und die Glieder dieses Ausdruckes verschwinden nach unserem Satze, wenn $\mu\mu' \neq 1$ ist oder wenn die Indizes verschieden sind : $j \neq k$. Mann kann annehmen, dass unsere Grundfunktionen nur bis auf konstante Koeffizienten bestimmt sind. Ich kann annehmen, dass, wenn $j = k$ ist, unser Ausdruck $[f_j, \alpha_j'] = 1$ ist. Es bleibt also in der Entwicklung nur ein Glied, nämlich λ_j; alle anderen verschwinden, also :

$$[f, \alpha_j'] = \lambda_j.$$

Wir können in dieser Weise die Koeffizienten der Entwicklung berechnen. Um die Möglichkeit der Entwicklung zu beweisen, müsste man die Fredholm-Hilbertsche Methode benutzen. Dazu habe ich nicht Zeit genug. Ich betrachte ein physikalisches Problem :

S ist die Oberfläche des Rezeptorleiters; f, α bezeichnen das sogenannte innere Feld, welches von den Oberflächen-Konduktionsströmen auf der Ober-

fläche des Rezeptorleiters erzeugt wird, und f^*, α^* sind das aussere Feld, d. h. das Feld, welches die Konduktionsströme der Oberfläche des Erregers erzeugen. Das Doppelfeld ist $f + f^*$.

Das äussere Feld ist bekannt; ich setze voraus, dass wir eine bekannte Quelle von Hertzschen Wellen besitzen, und wir werden den Einfluss dieser Quelle auf einen Rezeptorleiter studieren. Das äussere Feld ist gegeben; unbekannt ist das innere Feld (f, α). Da das äussere Feld bekannt ist, so können wir es entwickeln in der obigen Weise. α^*_i ist das Feld innerhalb, α^*_e ist das Feld ausserhalb der Leiterfläche. Man kann schreiben : $\alpha^*_i = \alpha^*_e$, weil die Oberfläche des Rezeptorleiters für das äussere Feld, (das nur von den Erregerströmen erzeugt ist,) nicht eine Unstetigkeitsfläche ist. Da die Oberfläche des Rezeptorleiters keine Unstetigkeit aufweist und da das Feld bekannt ist, so können wir dieses entwickeln in der Weise :

$$\alpha^*_i - \alpha^*_e = \sum \lambda_k \alpha'_k .$$

Es wird entwickelt hier nach den Funktionen I. Gattung. Die Koeffizienten λ' sind bekannt und können nach früherer Formel berechnet werden. Im Innern des Leiters gibt es kein Feld, also

$$\alpha_i + \alpha^*_i = 0$$

und wir haben :

$$\alpha^*_i = + \sum \lambda_k \alpha'_k .$$

Und wir müssen jetzt α_e, das innere Feld, aber ausserhalb der Leiterfläche berechnen, und nach den Eigenschaften und der Definition der Grundfunktionen hat man :

$$\alpha_e = \sum \lambda_k \eta_k \alpha'_k .$$

Diese Formel gilt nur für die tangentiellen Komponenten der magnetischen Kraft. Da die Komponenten des äusseren Feldes schon bekannt sind, so sind die tangentiellen Komponenten der magnetischen Kraft des totalen Feldes $\alpha_e + \alpha^*_e$ vollständig bestimmt, man kann daher die Oberflächenkonduktionsströme berechnen. α_e ist also ganz bestimmt. Um die Existenz der Grundfunktion, die Möglichkeit der Entwicklung zu beweisen, oder um die Grundfunktion wirklich zu bekommen, muss man die Fredholm-Hilbertsche Methode anwenden. Das kann ich hier nicht ausführlich erklären; aber es ist ein Satz der für die Theorie der elektrischen Wellen benutzt werden kann.

Ich hätte gewünscht Ihnen etwas Neueres vorzutragen, aber unglücklicherweise ist es nicht ganz fertig. Meine Absicht war die periodische Lösung des

Dreikörperproblems weiterzustudieren. Ich habe die Existenz dieser Lösung für die kleinen Werte der Massen bewiesen, aber für die grösseren Werte der Massen wusste ich gar nichts und ich versuchte die Existenz der Lösungen in samtlichen Fällen zu beweisen. Dazu brauchte ich einen Satz; das ist der folgende :

Sei in der Ebene eine Ring mit einem äusseren und einem inneren Kreise, Grenzkreise. Ich denke mir eine Punkttransformation von diesem Ring in sich selbst; diese ist eine stetige und umkehrbar eindeutige. Der äussere Kreis geht in sich selbst über und ebenso der innere. Die Punkttransformation transformiert den Ring in sich selbst. Ich setze voraus, dass jeder Punkt für die äussere Grenze im Sinne des Uhrzeigers, für die innere Grenze im entgegengesetzten Sinne geht.

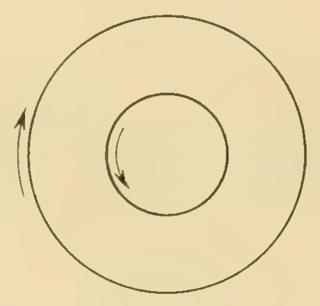


Fig. 3.

Der Satz ist : Wenn für die Punkttransformation der Flächeninhalt unverandert bleibt oder wenn die Punkttransformation irgend welche positive Integralinvariante besitzt, so sind in dem Ringe immer 2 invariante Punkte, die von der Transformation nicht verändert werden.

Um den Satz zu beweisen, habe ich auf folgende Weise versucht : Seien xy die Polarkoordinaten : ich kann sie auch als rektanguläre Koordinaten betrachten. Unsere Kreise werden [dabei] Gerade, und der Ring ist unendlich schmal auf der Ebene.

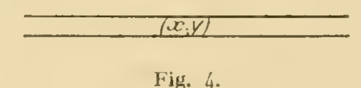


Fig. 4.

(xy) sind ganz bestimmt, und die Richtung der Bewegung des äusseren Grenzkreises ist ganz bestimmt.

Aber ich betrachte jetzt die Punkttransformation derselben Beschaffenheit; aber ich setze nicht voraus, dass diese Punkttransformation einen integralinvarianten Punkt besitzt oder dass sie den Flächeninhalt nicht ändert. Aber ich setze voraus, dass wir keinen invarianten Punkt im Innern des Kreises

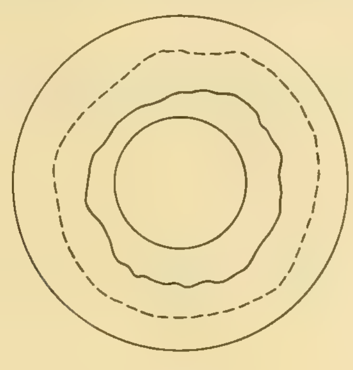


Fig. 5.

haben. Und ich versuchte zu beweisen, dass in diesem Falle ich immer eine solche geschlossene Kurve bekomme, die durch die Transformation in eine andere geschlossene Kurve transformiert wird, die entweder ganz innerhalb oder ganz ausserhalb liegt. Der Flächeninhalt bleibt also nicht unverändert; es ist bewiesen, dass unsere Transformation keine integralinvarianten Punkte besitzt.

Aber leider geben sich viele, viele besondere Fälle zu betrachten. Ich habe mancherlei besondere Fälle betrachtet, und in jedem ist es mir gelungen, die Kurve zu finden und den Satz zu beweisen. Ich glaube keinen Fall vergessen zu haben; aber ich bin noch nicht ganz sicher davon. Ich glaubte indessen, dass es nicht ohne Interesse sein könnte.

SUR LA DIFFRACTION

DES

ONDES HERTZIENNES

Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. 154, p. 795-797 (25 mars 1912).

M. March vient de présenter à l'Université de Munich une dissertation intitulée *Ueber die Ausbreitung der Wellen der drahtlosen Telegraphie auf der Erdkugel*. Cette dissertation, qui contient d'ailleurs des choses très intéressantes, aboutit à des conclusions diamétralement opposées à celles de mon Mémoire des *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo* et à celles que M. Nicholson a obtenues de son côté dans le travail qu'il a consacré à cette question.

Il est aisé de voir d'où provient la divergence; l'auteur envisage page 39 l'intégrale

$$(94) \qquad H_1 = \frac{ik}{\rho^2}\int \alpha P_{\alpha-\frac{1}{2}}(\cos\theta)\,\frac{\xi_{\alpha-\frac{1}{2}}^{(2)}(\rho)}{\xi_{\alpha-\frac{1}{2}}^{(1)}(\rho)}\,d\alpha,$$

prise le long d'un chemin formé d'une demi-circonférence de rayon ρ et de centre ρ ayant par conséquent ses extrémités aux points 0 et 2ρ et de l'axe réel depuis 2ρ jusqu'à $+\infty$.

Il annonce ensuite page 42 que, si ρ est très grand, on peut remplacer la fonction sous le signe $\int$ par sa valeur approchée, de sorte que l'intégrale

$$(100) \qquad H_1 = \frac{2ki}{\rho}\sqrt{\frac{2}{\pi\sin\theta}}\int \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\rho^2-\alpha^2}}\cos\left(\alpha\theta-\frac{\pi}{4}\right)d\alpha$$

est une « bonne approximation de l'intégrale (94) »; ce qui est exact, c'est

qu'on peut écrire

$$H_1 = -\frac{2ki}{\rho}\sqrt{\frac{2}{\pi\sin\theta}}\int \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\rho^2-\alpha^2}}\cos\left(\alpha\theta-\frac{\pi}{4}\right)(1+\varepsilon)\,d\alpha,$$

ε étant une quantité très petite de l'ordre de $\frac{1}{\rho}$, c'est-à-dire que l'erreur relative sur la quantité sous le signe $\int$ est de l'ordre de $\frac{1}{\rho}$, mais l'erreur *absolue* sur cette même quantité est de l'ordre de $\frac{\cos\alpha\theta}{\rho^2}$, ou de $\frac{e^{\beta\theta}}{\rho^2}$, β étant la partie imaginaire de α, laquelle est elle-même de l'ordre de ρ, puisque α décrit une demi-circonférence de rayon ρ.

Tout ce qu'il serait permis d'en conclure, c'est que l'erreur commise sur H est plus petite que l'expression

$$\Delta = \frac{2k}{\rho}\sqrt{\frac{2}{\pi\sin\theta}}\left|\int \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\rho^2-\alpha^2}}\cos\left(\alpha\theta-\frac{\pi}{4}\right)\varepsilon\,d\alpha\right|,$$

et cette expression est elle-même de l'ordre de $\frac{e^{\rho\theta}}{\rho^{2}}$, c'est-à-dire *très grande* par rapport à l'intégrale (100) que M. March a calculée et trouvée égale à

$$H_1 = \frac{2}{a}\frac{1}{\sqrt{\theta\sin\theta}}e^{-ia\theta},$$

c'est-à-dire de l'ordre de $\frac{1}{\rho}$.

En réalité, des compensations s'opèrent et l'erreur commise est très éloignée de la limite ainsi trouvée. Au lieu d'être très grande par rapport à l'intégrale (100) elle-même, elle est sensiblement égale et de signe contraire, de sorte que la valeur exacte (94) est beaucoup plus petite que la soi-disant valeur approchée (100).

C'est ainsi que 1001 est une « bonne approximation » pour 1000, puisque l'erreur relative est de $\frac{1}{1000}$, mais que 1001 — 1000 n'est pas une bonne approximation pour 1000 — 1000 puisque l'erreur relative est infinie.

Mes conclusions antérieures se trouvent donc confirmées, mais je suis maintenant en mesure de les énoncer plus nettement. Depuis la publication de mon Mémoire, en effet, il y a eu des mesures faites en Amérique par M. Austin sur la transmission des ondes à longue distance; le coefficient d'affaiblissement a été trouvé, *même de jour*, cent fois plus faible que le coefficient théorique résultant de mon calcul. La théorie ordinaire ne rend donc pas compte des faits, il y a quelque chose à trouver.

NOTES ET COMMENTAIRES.

XXV. — OSCILLATIONS HERTZIENNES.

Contribution à la théorie des expériences de Hertz (p. 1).

Un exposé historique sur l'origine des recherches de Hertz et sur les discussions auxquelles elles donnèrent lieu se trouve dans l'Ouvrage de E. T. Whittaker (*History of the theories of Ether and Electricity*, 2ᵉ édit., 1951, p. 322-328). M. Whittaker rappelle en note que les expériences de Hertz (*Ann. Physik*, t. 31, 1887, p. 421; t. 34, 1888, p. 551) donnaient $\frac{45}{28}$ pour le rapport entre les vitesses de propagation des ondes électriques dans l'air et conduites par les fils ainsi que 2.10^{-10} cm/s pour cette dernière vitesse. H. Poincaré a montré que la période calculée par Hertz était la vraie période multipliée par $\sqrt{2}$, ce qui conduisait à une vitesse de propagation dans l'air approximativement égale à la vitesse de la lumière multipliée par $\sqrt{2}$.

Ernst Lecher (*Wiener Berichte*, 8 mai 1890) en mesurant la vitesse de propagation des vibrations électriques dans les fils trouva au lieu de la valeur 2.10^{10} cm/s de Hertz une vitesse ne différant que de 2 % de celle de la lumière. E. Sarazin et L. de la Rive, à Genève (*Arch. Sc. Phys. Nat.*, t. 29, 1893, p. 358-441) montrèrent l'égalité des vitesses de propagation dans l'air et dans les fils. H. Poincaré dans l'Ouvrage : *Les oscillations électriques* (Paris, 1894, § 31 et suiv.) a décrit les expériences de Hertz, donné le calcul de la période des oscillations et exposé les discussions qui suivirent les travaux de Hertz.

Sur le calcul de la période des oscillateurs hertziens (p. 6).

H. Poincaré a repris et développé ces calculs dans l'Ouvrage : *Les oscillations électriques* (Paris, 1894, chap. III : *Étude théorique des oscillations hertziennes*, p. 68-92).

Sur la résonance multiple des oscillations hertziennes (p. 20).

H. Poincaré a donné un exposé détaillé de la théorie des phénomènes de résonance et de la théorie du résonateur dans *Les oscillations électriques* (Paris, 1894, chap. IV :

Phénomènes de résonance, p. 102; chap. VI : *Théorie du résonateur*, p. 220). Les travaux de H. Poincaré et la théorie de V. Bjerknes (*Ann. Physik.*, t. 44, 1891, p. 74, 92 et 513) sont exposés brièvement dans l'article de M. Abraham : *Elektromagnetische Wellen* (*Encykl. Mathem. Wiss.*, t. 5, vol. 2, § 8, p. 509).

Sur la théorie des oscillations hertziennes (p. 33).

H. Poincaré introduit ici l'expression dite des potentiels retardés attribuée généralement à Lorentz. La priorité de Poincaré est signalée par E. T. Whittaker (*History of the Theories of Æther and Electricity*, 2e édit., 1951, p. 394) qui rappelle également l'introduction des potentiels retardés dans la théorie électromagnétique de la lumière proposée par L. Lorenz en 1867.

Sur un mode anormal de propagation des ondes (p. 38).

Une étude approfondie de l'influence des conditions aux limites sur la propagation des ondes acoustiques ou électromagnétiques a été effectuée par L. Brillouin (*Revue générale de l'Électricité*, t. 40, 1936, p. 227-239; *The Mathematics of ultra hight frequencies in radio*, cours professé à Brown University en 1943, Providence, 1943, chap. II, p. 40 et suiv.).

Diffraction des ondes hertziennes (p. 53, 65, 70, 76, 78, 88, 92, 94, 204 et 214).

Dans cette série de publications, H. Poincaré discute le problème de la sommation des séries permettant d'évaluer la diffraction des ondes électromagnétiques par la terre supposée sphérique. Ce problème, l'un des plus ardus de la Physique théorique, n'a pu être résolu d'une façon satisfaisante qu'après que G. N. Watson en 1918 (*Proc. Roy. Soc. London*, A **95**, 1918, p. 83-99 et 546-563) eut obtenu une représentation par une intégrale du plan complexe prise le long d'un parcours convenable de la série de polynomes de Legendre représentant le vecteur de Hertz de l'onde diffusée. La méthode du col [P. Debye, *Mathem. Ann.*, t. **67**, 1909, p. 535-558; L. Brillouin, *Ann. Éc. Norm. Sup.*, (1), t. 33, 1916, p. 17; G. N. Watson, *Proc. Camb. Phil. Soc.*, t. **19**, 1918, p. 96-120] permet alors d'obtenir des expressions approchées conduisant à des évaluations numériques précises.

A. E. H. Love [*The transmission of electric waves over the surface of the Earth* (*Phil. Trans. Roy. Soc. London*, A **215**, 1915, p. 105-131)] a donné un exposé d'ensemble sur les plus importants des travaux relatifs à ce problème antérieurs à l'introduction de la transformation de Watson : celle-ci sert de base à la théorie moderne de la propagation des ondes électromagnétiques dans une atmosphère homogène développée par exemple dans l'Ouvrage de H. Bremmer : *Terrestrial Radiowaves. Theory of propagation* (Elsevier Publ. Cy, 1949).

Selon A. E. H. Love, la solution sous forme d'une série de polynomes de Legendre pour l'expression du vecteur de Hertz de l'onde diffusée a été obtenue pour la pre-

mière fois par H. M. Mac Donald (*Proc. Roy. Soc.*, A **71**, 1903, p. 251-258). Celui-ci calcula approximativement la somme de la série en substituant des valeurs approchées pour les fonctions de Bessel intervenant dans sa formule. La diffraction résultant de ce calcul était si importante que l'exactitude de celui-ci fut mise en doute par Lord Rayleigh (*Proc. Roy. Soc.*, A **72**, 1904, p. 40-41) et par H. Poincaré (*Proc. Roy. Soc.*, A **72**, 1904, p. 42, ce Tome, p. 53). Lord Rayleigh remarqua notamment que les termes de la série dont l'influence devait être prépondérante dans la somme correspondait aux polynomes de Legendre dont l'ordre n devait être grand, de l'ordre de kR (R, rayon de la sphère; $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, λ, longueur d'onde). M. H. Mac Donald (*Proc. Roy. Soc.*, A **72**, 1904, p. 59-68) admit la validité de ces critiques et révisa ses calculs.

De nombreuses méthodes furent proposées pour calculer la somme de la série permettant d'évaluer l'influence de la courbure de la terre sur la propagation des ondes électromagnétiques. Toutes ces méthodes reposent sur des transformations de la série en intégrales définies dont on cherche ensuite des évaluations approchées.

H. Poincaré (*Rend. Circ. Mat. Palermo*, t. **29**, 1910, p. 169; ce Tome, p. 94), bien que ne développant pas sa méthode jusqu'aux résultats numériques, arriva à la conclusion que l'expression du déplacement électrique normal à la surface dans la direction faisant un angle θ avec le doublet devait contenir un facteur de la forme $e^{-\lambda\theta}$.

J. W. Nicholson (*Phil. Mag.*, 6e série, t. **19**, 1910, p. 276) a critiqué la Note de H. Poincaré du 29 mars 1909 (ce Tome, p. 70) en remarquant une erreur dans le calcul de celui-ci : « ... quand l'ordre et l'argument (m et z) d'une fonction de Bessel sont grands et $z > m$, le développement asymptotique comprend un facteur $(z^2 - m^2)^{-\frac{1}{4}}$, si $z < m$, il comprend le facteur $(m^2 - z^2)^{-\frac{1}{4}}$. M. Poincaré a supposé la continuité entre ces développements quand $m = z$ ... ». H. Poincaré a de son côté rectifié les points critiqués par J. W. Nicholson dans l'article du *Circolo Matematico di Palermo* (ce Tome, p. 94).

J. W. Nicholson (*Phil. Mag.*, 6e série, t. **19**, 1910, p. 436 et 757), tout en étant d'accord avec l'ensemble de l'analyse de Poincaré n'admet pas ses résultats quantitatifs qui diffèrent de ceux qu'il obtient indépendamment, mais reconnaît finalement la validité du facteur exponentiel de Poincaré. De son côté, H. M. Mac Donald (*Proc. Phil. Trans.*, A **210**, 1911, p. 113) obtint également des résultats numériques précis incompatibles avec ceux de H. Poincaré et de J. W. Nicholson. Ce dernier critiqua vivement (*loc. cit.*, p. 757) les résultats de Mac Donald.

J. W. Nicholson indiqua alors une nouvelle méthode de déduction et de sommation des séries [*On the bending of electric waves round a large sphere* (*Phil. Mag.*, 6e série, t. **19**, 1910, p. 516-537; t. **20**, 1910, p. 157; t. **21**, 1911, p. 62 et 281)] et retrouva notamment le facteur exponentiel de Poincaré.

H. M. Mac Donald [*The transmission of electric waves around the earth's surface* (*Proc. Roy. Soc.*, A **90**, 1914, p. 50-61; A **92**, 1916, p. 433-437)] remarqua une difficulté dans l'analyse de H. Poincaré et de J. W. Nicholson en signalant que « ... la force magnétique dans la direction faisant l'angle θ avec l'oscillateur est de la

forme $Ae^{-\alpha\theta}$, où A et α dépendent du zéro de $\frac{d}{dz_0}\left[z_0^{\frac{1}{2}}K_{n+\frac{1}{2}}(iz_0)\right]$ pour lequel $\left|n+\frac{1}{2}-z_0\right|$ est le plus petit possible. La valeur de ce zéro a été calculée par Nicholson ainsi que celle de A. Le nombre qu'il obtient n'est pas en accord avec la valeur calculée ci-après et ceci peut être dû au fait que le processus de sommation utilisé par lui n'est pas valable, car il considère que $z^{\frac{1}{2}}K_{n+\frac{1}{2}}(iz) \Big/ \frac{d}{dz}\left[z^{\frac{1}{2}}K_{n+\frac{1}{2}}(iz)\right]$ est une fonction méromorphe de $n+\frac{1}{2}$, ce qui n'est pas vrai . . . ».

Une solution différente du problème fut proposée par H. W. March (*Ann. Physik*, 4e série, t. 37, 1912, p. 29-50). March selon une suggestion de A. Sommerfeld [*Reports of a discussion* (*British Ass. Rep.*, 1912, p. 401] chercha une solution sous la forme d'une représentation intégrale analogue à celle obtenue par A. Sommerfeld (*Ann. Physik*, 4e série, t. 28, 1909, p. 665) dans le cas de la diffraction par une surface plane. Il borna son analyse au cas d'un conducteur parfait et fut conduit à un facteur angulaire de la forme $(\theta \sin\theta)^{\frac{1}{2}}$. H. Poincaré (*C. R. Acad. Sc.*, t. 154, 1912, p. 795; ce tome, p. 214) remarqua une erreur dans le calcul de H. March. M. von Rybczynski (*Ann. Physik*, 4e série, t. 41, 1913, p. 191-208) entreprit la correction du travail de March et obtint encore un résultat différent de celui de H. M. Mac Donald (*loc. cit.*, 1911). Ce dernier (*Proc. Roy. Soc.*, A 90, 1914, p. 50-61) a remarqué une difficulté dans l'analyse de M. von Rybczynski de telle sorte que selon A. E. H. Love (*loc. cit.*, 1915), il est vraisemblable qu'il n'existe pas de solution du type cherché par H. W. March.

SUR LA

THÉORIE DE L'ÉLASTICITÉ

Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. 112, p. 914-915 (27 avril 1891).

Dans le tome XIII du *Bulletin des Sciences mathématiques*, M. Brillouin a rendu compte de mon Ouvrage sur la *Théorie mathématique de la lumière*: dans cette analyse, d'ailleurs très bienveillante et dont je le remercie, il m'adresse quelques critiques de détail auxquelles je désirerais répondre. Je ne l'ai pas fait plus tôt, parce qu'elles méritaient un examen approfondi et que j'étais distrait par d'autres travaux. La plus importante de ces critiques se trouve à la page 196 du *Bulletin* et se rapporte à ce que j'ai dit de la polarisation par diffraction. Je n'y reviendrai pas, parce qu'il me semble que mes Notes récentes sur les expériences de M. Wiener ont suffisamment éclairci le malentendu sur lequel elle repose et que la concision de ma première rédaction avait pu faire naître.

Mais il est une autre critique que je ne puis laisser sans réponse. Pour faire rentrer certaines théories optiques de la double réfraction, telles que celles de Cauchy et de Fresnel, dans les cadres de la théorie générale de l'élasticité, j'ai dû élargir un peu ces cadres et généraliser les conceptions de Lamé. J'ai écrit la fonction fondamentale qui définit l'élasticité d'un corps et que j'ai désignée par W_2 avec 27 coefficients arbitraires au lieu de 21. M. Brillouin conteste la légitimité de cette extension (notes des pages 176 et 189), parce que la pres-

sion P_{yx} ne serait plus égale à la pression P_{xy}, ce qui rendrait impossible l'équilibre du corps élastique.

C'est là une erreur que j'ai quelque temps partagée, mais qu'il est aisé de rectifier. J'adopterai les notations que j'ai employées dans ma *Théorie mathématique de la lumière* et qu'il est inutile de rappeler ici, puisque aussi bien la présente Note ne pourra intéresser que les personnes qui ont lu cet Ouvrage et l'analyse de M. Brillouin.

Extraits de l'analyse de l'Ouvrage de M. Henri Poincaré sur la Théorie mathématique de la Lumière, par M. Marcel Brillouin [1].

. . . .

Conclusions. — Les conclusions de M. Poincaré sont tout à fait agnostiques. Des théories dont le point de départ est fort différent conduisent aux mêmes lois numériques pour les phénomènes principaux. La raison mathématique, c'est que les équations sont linéaires; si elles admettent pour solution ξ, η, ζ, elles admettront aussi pour solution

$$\xi_1 = \frac{d\zeta}{dy} - \frac{d\eta}{dz}, \qquad \eta_1 = \frac{d\xi}{dz} - \frac{d\zeta}{dx}, \qquad \zeta_1 = \frac{d\eta}{dx} - \frac{d\xi}{dy},$$

et bien d'autres combinaisons encore. Si (ξ, η, ζ) est la vibration de Fresnel, perpendiculaire au plan de polarisation, (ξ_1, η_1, ζ_1) est celle de Neumann, parallèle au plan de polarisation.

La polarisation par diffraction semblait pouvoir permettre de décider entre les deux théories. « Mais certainement, dit M. Poincaré, les calculs étaient inexacts. » Les expériences n'ont d'ailleurs jamais pu être faites dans des conditions décisives; en particulier, dans les très intéressantes expériences de M. Gouy, la source et le point observé sont trop près du bord de l'écran pour que les calculs ordinaires de diffraction soient applicables.

C'est l'affirmation théorique de M. Poincaré sur laquelle je me permettrai de présenter quelques observations. Dans la théorie de la réflexion, ou de la double réfraction, on peut obtenir l'accord avec l'expérience en partant de l'une ou l'autre des deux hypothèses sur la position du plan de polarisation et de la vibration, mais c'est parce qu'il reste des hypothèses disponibles sur la densité et l'élasticité de l'éther. Rien de pareil dans la théorie de la diffraction. Tout se passe dans un milieu unique; l'état vibratoire au delà de l'ouverture est entièrement déterminé par l'état vibratoire dans le plan de l'ouverture; il ne reste rien d'arbitraire dans le résultat

---

[1] *Bull. Sc. math.*, 2e série, t. 13, 1889, p. 173-198.

On peut être tenté de croire que

$$-\frac{dW}{d\xi_x}d\omega, \quad -\frac{dW}{d\eta_x}d\omega, \quad -\frac{dW}{d\zeta_x}d\omega$$

sont les trois composantes de la pression qui s'exerce sur un élément de surface $d\omega$ orienté perpendiculairement à l'axe des x. Ce sont, en réalité, les trois composantes de la pression qui s'exerce sur un élément de surface qui, *avant la déformation*, avait pour aire $d\omega$ et était perpendiculaire à l'axe des x.

—

du calcul. Ce résultat le voici : Prenons comme ligne de repère la normale au plan de diffraction, c'est-à-dire, au plan du rayon incident et du rayon diffracté que l'on observe, et considérons deux vibrations incidentes situées dans deux plans rectangulaires, à $\pm 45°$ de la normale au plan de diffraction. Après la diffraction, toutes deux se sont rapprochées de la normale au plan de diffraction, le plan de la vibration a tourné pour l'une dans un sens, pour l'autre en sens opposé. Tel est le résultat de la théorie approchée donnée au chapitre IV. Si ce résultat est exact, c'est-à-dire si l'angle de rotation n'est pas rigoureusement nul, il permet de choisir entre les deux théories : Si le plan de polarisation est parallèle au plan de vibration (Neumann), l'angle aigu du plan de polarisation avec la normale au plan de diffraction diminue par la diffraction. Il augmente au contraire si le plan de polarisation est normal à la vibration (Fresnel). L'expérience est difficile à faire à cause de la petitesse de l'effet à mesurer; mais il me semble que, si l'on réussit à la faire en ne faisant intervenir que la diffraction par des écrans noirs, elle sera décisive.

On peut aussi recourir à la comparaison des intensités de lumières diffractées dans la même direction, et provenant de vibrations, l'une parallèle, l'autre perpendiculaire au plan de diffraction. Les expériences connues sont plutôt favorables à l'hypothèse de Fresnel.

La question peut encore se poser autrement : Les vibrations transversales ξ, η, ζ sont nécessairement accompagnées de rotations élémentaires $\zeta'_y - \eta'_z$, ..., également transversales, mais perpendiculaires aux vibrations. Le plan de polarisation est-il parallèle aux vibrations (Neumann) ou aux rotations qui les accompagnent (Fresnel)? C'est sous la même forme que la question se pose dans la théorie électromagnétique de la lumière. Le plan de polarisation est-il parallèle à la force magnétique ou à la force électromotrice? Et l'on peut imaginer une forme d'expérience, que je me réserve de décrire ailleurs, bien que nos moyens d'observation manquent encore de sensibilité, pour attaquer la question ainsi posée.

Je crois donc qu'on est là en présence d'un problème, non pas insoluble, mais seulement non encore résolu.

De même, les diverses théories de la dispersion et de la double réfraction ne resteront pas au même plan pour le physicien, après la lecture de ce Livre. L'une d'elles, c'est du moins mon impression, passera nettement au premier plan, c'est celle qui fait intervenir directement les actions mutuelles du corps pondérable et de l'éther du vide, mais à la condition d'exprimer complètement ces actions

Cet élément, quand la déformation a eu lieu, ne conserve pas son aire et son orientation, et ses projections sur les trois axes deviennent (en négligeant, bien entendu, les carrés de ξ, η, ζ)

$$d\omega(1+\eta_y+\zeta_z), \qquad d\omega\,\xi_y, \qquad d\omega\,\xi_z.$$

Si donc nous appelons

$$P_{xx}\,d\omega, \quad P_{yx}\,d\omega, \quad P_{zx}\,d\omega$$

mutuelles. Pour la dispersion, un travail tout récent de M. Carvallo montre que la formule à trois constantes seulement

$$\frac{1}{n^2} = a + \frac{b}{\lambda^2} + c\lambda^2$$

représente exactement des expériences de M. Langley sur le sel gemme depuis la longueur d'onde de 5/1000e de millimètre jusqu'à l'extrême violet, 4/10000e de millimètre. Elle satisfait de même aux mesures sur les radiations lumineuses et ultra-violettes des substances peu absorbantes, et les indications de Ketteler, de Selmeyer, d'Helmholtz montrent que le développement de la même idée fondamentale conduit nécessairement à l'explication de la dispersion anormale. Enfin elle conduit directement à l'explication de l'aberration astronomique.

La théorie de la périodicité de distribution de l'éther semble poûvoir rendre compte du terme en λ^2 et même de la dispersion anormale, par un simple changement dans les hypothèses relatives à l'ordre de grandeur des rayons d'activité et des distances moléculaires. Quant à l'aberration, peut-être pourrait-on l'expliquer en regardant l'excès périodique de densité sur l'éther du vide comme se propageant avec le solide, entraînée par son mouvement. Mais les calculs semblent devoir être inextricables, et les constantes des formules définitives seront indépendantes, tandis que dans l'autre théorie elles ont entre elles des relations susceptibles de contrôle. En outre, il restera toujours à se demander : Quelles sont les conditions d'équilibre de l'éther à la limite de deux corps différents ? Quelles sont les conditions de stabilité de l'équilibre ?

Mes préférences sont fondées, comme on voit, sur d'autres raisons que la neutralité de M. Poincaré. En me plaçant à son point de vue, je tombe d'accord avec lui, que toutes ces théories sont à peu près équivalentes quant à l'explication numérique des faits. On ne m'étonnerait même que médiocrement si l'on me montrait un jour une théorie numériquement satisfaisante fondée sur l'hypothèse de l'émission.

. . . .

CHAPITRE I (p. 1-48). — *Étude des petits mouvements dans un milieu élastique.* — On admet comme hypothèses fondamentales la conservation de l'énergie et la forme linéaire des équations différentielles du mouvement ; on développe parallèlement la théorie générale dans laquelle l'énergie interne est une fonction quelconque de toutes les distances des molécules prises deux à deux, et la théorie

les trois composantes de la pression qui s'exerce sur un élément qui, *après la déformation*, se trouve avoir pour aire $d\omega$ et être orienté normalement à l'axe des x, on devra avoir

$$\text{(1)} \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{dW}{d\xi'_x} &= -P_{xx}(1+\eta'_y+\zeta'_z) + P_{xy}\xi'_y + P_{xz}\xi'_z, \\ \frac{dW}{d\eta'_x} &= -P_{yx}(1+\eta'_y+\zeta'_z) + P_{yy}\xi'_y + P_{yz}\xi'_z \end{aligned} \right.$$

et non pas

$$\frac{dW}{d\xi'_x} = -P_{xx}, \qquad \ldots.$$

---

particulière plus spécialement connue sous le nom de *théorie moléculaire* dans laquelle, les forces étant centrales, l'énergie est la somme de toutes les valeurs que prend une même fonction d'une seule variable, la distance de deux molécules, pour tous les couples de molécules du corps; cette dernière forme est caractérisée par cette propriété différentielle que la dérivée seconde de l'énergie par rapport à deux distances moléculaires différentes est nulle. Enfin on admet que le potentiel dû aux actions mutuelles des molécules comprises dans un volume quelconque est la somme des potentiels dus à chacun des éléments de volume dont il est formé, quelque petits qu'ils soient, sans aucun terme provenant des actions mutuelles de deux des éléments voisins.

L'énergie rapportée à l'unité de volume est la somme de deux fonctions homogènes, l'une du premier degré W_1, l'autre du second degré W_2 des 9 dérivées des déplacements ξ, η, ζ par rapport aux axes x, y, z. Lorsque la pression à la surface limite du milieu n'est pas nulle, il y a dans W_2 27 coefficients arbitraires, et 21 seulement dans l'hypothèse des forces centrales. Si la pression à la surface limite est nulle, il y a 21 coefficients, et pour les forces centrales 15 seulement.

Enfin, si le milieu est isotrope, le nombre des coefficients distincts se réduit à trois, dont un pour les pressions extérieures [1],

$$\begin{aligned} W_2 = {} & \lambda(\xi'_x\eta'_y - \xi'_y\eta'_x + \eta'_y\zeta'_z - \eta'_z\zeta'_y - \zeta'_z\xi'_x - \zeta'_x\xi'_z) \\ & + \mu(\xi'^2_x + \xi'^2_y + \xi'^2_z + \eta'^2_x + \eta'^2_y + \eta'^2_z + \zeta'^2_x + \zeta'^2_y + \zeta'^2_z) \\ & + \nu(\xi'_x + \eta'_y + \zeta'_z)^2. \end{aligned}$$

Les relations qui expriment que les forces sont centrales et que la pression extérieure est nulle sont respectivement

$$\lambda + \nu = 0, \qquad \lambda + 2\mu = 0.$$

La fonction W_1 contient seulement six coefficients distincts, ξ'_y et η'_x entrant

---

(1) λ de Lamé $= 2(\mu - \nu)$ de Poincaré,
μ » $= -2\mu$ » .

Il est aisé de calculer les valeurs de $\frac{dW}{d\xi'_x}$, $\frac{dW}{d\eta'_x}$, ... et celles de P_{xy}, P_{yx}, ...

On voit alors que les conditions (1) sont remplies en négligeant les carrés des ξ, et que l'on a

$$P_{xy} = P_{yx}.$$

L'objection de M. Brillouin se trouve ainsi écartée. J'ai cependant un mot à ajouter : M. Brillouin fait observer que les termes additionnels que j'introduis devraient exercer une influence sur la stabilité de l'équilibre, et que cependant

---

symétriquement, et se réduit dans le cas des corps isotropes à

$$W_1 = 2(\lambda + 2\mu)(\xi'_x + \eta'_y + \zeta'_z).$$

La théorie paraît exiger que ces coefficients λ, μ soient les mêmes dans W_1 que dans W_2 (¹).

D'ailleurs, les équations du mouvement des corps isotropes ne dépendent que des deux coefficients distincts μ, ν ; et ceux-ci se réduisent à un seul si la pression extérieure est nulle et si les forces sont centrales, ce qui donne, par élimination de λ, $\nu = 2\mu$.

L'une des équations est

$$-\rho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = 2\mu\,\Delta\xi + 2\nu \frac{\partial \Theta}{\partial x},$$

Δ désignant la somme des dérivées secondes $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ et Θ la dilatation cubique $\xi'_x + \eta'_y + \zeta'_z$.

. . . .

Enfin, si l'on abandonne l'hypothèse des forces centrales, sans se préoccuper de la théorie de Fresnel, on peut reprendre la question directement comme Lamé et

---

(¹) Il me paraît important de remarquer que l'existence du terme en λ a pour conséquence une différence entre les pressions P_{xy} et P_{yx}. L'élément de volume de l'éther serait ainsi soumis à un couple élastique proportionnel au volume quand il est déformé. Il faut écrire les équations du mouvement de rotation de cet élément, quand il n'est soumis à aucun couple extérieur, ce qui est le cas de l'éther lumineux ; on voit facilement que le moment d'inertie est infiniment petit du deuxième ordre par rapport au volume, et, comme les rotations $\left(\frac{\partial\eta}{\partial x} - \frac{\partial\xi}{\partial y}, \cdots\right)$ ne sont pas infinies, il faut que le couple moteur soit nul. On trouve ainsi que le coefficient λ est nul dans les corps isotropes, et, en général, sont nuls aussi six des coefficients que l'existence des pressions extérieures introduit en plus des vingt et un de Green, ou des quinze de Cauchy.

La conservation de ce coefficient λ conduirait d'ailleurs à une conséquence singulière : il entre dans W_2 ; il influe donc sur le signe de la fonction des forces, et par suite la stabilité ou l'instabilité de l'équilibre initial paraît dépendre de la grandeur de ce coefficient ; et pourtant il n'entre pas dans les trois équations du mouvement de translation, les seules écrites, et qui d'ailleurs déterminent les inconnues, et par conséquent il ne peut avoir aucune influence sur cette stabilité.

ils disparaissent des équations définitives du mouvement. Cela n'est pas tout à fait exact. La condition nécessaire et suffisante de la stabilité n'est pas que la forme quadratique W_2 soit définie et négative. Il faut, en effet, dans la recherche de cette condition, tenir compte du travail des pressions extérieures ; on voit ainsi que, au moins pour les corps isotropes, nos termes additionnels ne doivent pas intervenir.

Neumann, et écrire que le milieu peut propager des vibrations rigoureusement transversales, mais non les vibrations longitudinales dont la vitesse de propagation est supposée nulle. Dans ce cas, l'ellipsoïde de polarisation est un cylindre normal au plan de l'onde, qui, rapporté comme toujours aux plans de symétrie optique du milieu, a pour équation

$$(4) \qquad H = a(C'\beta - B'\gamma)^2 + b(A'\gamma - C'\alpha)^2 + c(B'\alpha - A'\beta)^2.$$

Les vitesses de propagation sont rigoureusement les mêmes que celles de Fresnel; mais les vibrations A′, B′, C′ de Neumann et A, B, C de Fresnel, qui correspondent à la même vitesse de propagation, sont liées par les relations

$$\frac{C'\beta - B'\gamma}{A} = \frac{A'\gamma - C'\alpha}{B} = \frac{B'\alpha - A'\beta}{C},$$

et sont par conséquent perpendiculaires l'une à l'autre [1].

. . . .

---

(1) Cette théorie de Lamé, Neumann (1862) a été indiquée pour la première fois par Green (1839) et est connue en Angleterre sous le nom de *première théorie de Green.*

Dans cette théorie, l'énergie est de la forme

$$W = a[(\zeta'_y + \eta'_z)^2 - 4\zeta'_z\eta'_y] + b[(\xi'_z + \zeta'_x)^2 - 4\xi'_x\zeta'_z] + c[(\eta'_x + \xi'_y)^2 - 4\eta'_y\xi'_x],$$

et ne dépend que du changement de forme d'un parallélépipède et non de sa rotation. Un élément de volume n'est soumis à aucun couple élastique.

Quant aux autres théories, il est facile de voir que les ellipsoïdes de polarisation (1), (2), (3) exigent que l'énergie contienne des termes tels que $\xi'^2_y + b\eta'^2_x$, ... Il en résulte que les pressions P_{yx} et P_{xy} sont différentes et que l'équation des moments n'est pas satisfaite pour un élément de volume tant que les coefficients a, b, c sont distincts, c'est-à-dire tant qu'il y a double réfraction. Ces termes sont introduits par Cauchy, et aussi par Green, pour tenir compte des pressions extérieures. Peut-être peuvent-ils exister si l'élément de volume dont la déformation reste homogène dans la théorie de la lumière est extrêmement petit par rapport au rayon d'activité; car, dans ce cas, la notion intermédiaire de pression n'a plus de sens. Parmi les théories qui ne font intervenir que l'éther, celle de Lamé me paraît, en somme, la seule qui se déduise naturellement de la théorie de l'élasticité des solides.

SUR LA

THÉORIE DE L'ÉLASTICITÉ

Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. 114, p. 385-388 (22 février 1892).

A l'occasion de ses intéressantes recherches sur l'élasticité qui lui ont permis de déterminer expérimentalement le rapport des deux coefficients de Lamé, notre éminent Confrère M. Cornu a attiré mon attention sur une question théorique au sujet de laquelle je désirerais présenter quelques observations.

Soit un prisme rectangle élastique dont les six faces seront, si les axes de coordonnées sont convenablement choisis,

$$x = \pm a, \qquad y = \pm b, \qquad z = \pm c.$$

Je suppose que les faces $z = \pm c$ soient soumises à des forces extérieures quelconques, mais que les quatre autres faces restent libres. Il s'agit d'étudier comment varie le rapport des deux rayons de courbure que prend une de ces quatre faces après sa déformation.

J'adopterai les notations de Lamé, en désignant par N_1, N_2, N_3 les composantes normales des pressions qui s'exercent sur des éléments parallèles aux trois plans de coordonnées, et par T_1, T_2, T_3 les composantes tangentielles.

On devra avoir alors en tous les points de la face $x = a$

$$N_1 = T_2 = T_3 = 0,$$

et comme cela a lieu quels que soient y et z, on aura aussi

$$\frac{dN_1}{dy} = \frac{dT_2}{dy} = \frac{dT_3}{dy} = 0, \qquad \frac{dN_1}{dz} = \frac{dT_2}{dz} = \frac{dT_3}{dz} = 0.$$

La première des équations d'équilibre

$$\frac{dN_1}{dx}+\frac{dT_3}{dy}+\frac{dT_2}{dz}=0$$

se réduit alors à

$$\frac{dN_1}{dx}=0,$$

de sorte que les trois dérivées de N_1 sont nulles.

De même sur la face $y=b$, on aura

$$N_2=T_1=T_3=0,$$
$$\frac{dN_2}{dx}=\frac{dN_2}{dy}=\frac{dN_2}{dz}=0.$$

Cela posé, j'appelle ξ, η, ζ les trois composantes du déplacement de la molécule x, y, z; λ et μ les deux coefficients de Lamé; θ la dilatation cubique

$$\theta=\frac{d\xi}{dx}+\frac{d\eta}{dy}+\frac{d\zeta}{dz}.$$

On aura

$$N_1=\lambda\theta+2\mu\frac{d\xi}{dx},\qquad T_1=\mu\left(\frac{d\zeta}{dy}+\frac{d\eta}{dz}\right)$$

avec les équations qu'on en peut déduire par symétrie.

La surface $x=a$ déformée prend une courbure très peu prononcée, et l'indicatrice de cette surface a évidemment pour équation

$$\frac{d^2\xi}{dy^2}y^2+2\frac{d^2\xi}{dy\,dz}yz+\frac{d^2\xi}{dz^2}z^2=1.$$

Si l'on suppose que l'on soit placé dans le plan $z=0$ qui est un des plans de symétrie de la surface, si les mêmes forces sont appliquées aux deux bases du prisme, les axes de cette indicatrice sont parallèles aux axes de coordonnées et $\frac{d^2\xi}{dy\,dz}$ est nul. Le rapport des deux rayons de courbure principaux est alors égal au rapport des deux quantités $\frac{d^2\xi}{dy^2}$ et $\frac{d^2\xi}{dz^2}$.

Or on a évidemment

$$\frac{d^2\xi}{dy^2}=\frac{1}{\mu}\frac{dT_3}{dy}-\frac{d^2\eta}{dx\,dy}=-\frac{d^2\eta}{dx\,dy},$$

puisque $\frac{dT_3}{dy}$ est nul sur la base $x=a$.

D'autre part,

$$\mu\frac{d^2\eta}{dx\,dy}=\frac{dN_2}{dx}-\lambda\frac{d\theta}{dx},\qquad \theta=\frac{N_1+N_2+N_3}{3\lambda+2\mu},$$

d'où

$$\mu \frac{d^2\xi}{dy^2} = -\frac{dN_2}{dx} + \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu}\left(\frac{dN_1}{dx} + \frac{dN_2}{dx} + \frac{dN_3}{dx}\right).$$

On trouverait de même

$$\mu \frac{d^2\xi}{dz^2} = -\frac{dN_3}{dx} + \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu}\left(\frac{dN_1}{dx} + \frac{dN_2}{dx} + \frac{dN_3}{dx}\right).$$

Comme $\frac{dN_1}{dx}$ est nul sur le plan $x = a$, il vient

$$\mu(3\lambda + 2\mu)\frac{d^2\xi}{dy^2} = -2(\lambda + \mu)\frac{dN_2}{dx} + \lambda\frac{dN_3}{dx},$$

$$\mu(3\lambda + 2\mu)\frac{d^2\xi}{dz^2} = \lambda\frac{dN_2}{dx} - 2(\lambda + \mu)\frac{dN_3}{dx}.$$

On sait que Saint-Venant a étudié une solution particulière du problème de l'élasticité en supposant

$$N_2 = T_3 = N_1 = 0.$$

Il en résulte que les termes en $\frac{dN_2}{dx}$ disparaissent et que le rapport des rayons de courbure est constant et égal à $\frac{-\lambda}{2\lambda + 2\mu}$.

Mais le point sur lequel je désire attirer l'attention, c'est que cette relation est encore vraie, non seulement pour la solution particulière de Saint-Venant, mais pour la solution la plus générale du problème. Seulement elle ne l'est plus sur toute la face $x = a$, mais seulement sur l'arête $x = a$, $y = b$; nous avons vu, en effet, qu'en tous les points de la face $y = b$ on a

$$\frac{dN_2}{dx} = 0.$$

Il en résulte que, au point

$$z = 0, \qquad x = a, \qquad y = b,$$

c'est-à-dire au milieu d'une des arêtes, le rapport des deux courbures prises par l'une des faces est égal à $\frac{-\lambda}{2\lambda + 2\mu}$, quelles que soient d'ailleurs les forces déformantes.

C'est aux physiciens à voir s'ils peuvent tirer quelque parti de ces remarques.

SUR
LES TENTATIVES D'EXPLICATION MÉCANIQUE
DES
PRINCIPES DE LA THERMODYNAMIQUE

Comptes rendus de l'Académie des sciences, t. 108, p. 550-553 (18 mars 1889).

Parmi les tentatives qui ont été faites pour rattacher aux théorèmes généraux de la Mécanique les principes fondamentaux de la Thermodynamique, la plus intéressante est, sans contredit, celle que M. Helmholtz a développée dans son Mémoire sur la statique des systèmes monocycliques (*Journal de Crelle*, t. 97) et dans son Mémoire sur le principe de la moindre action (*Journal de Crelle*, t. 100). L'explication proposée dans ces deux Mémoires me paraît satisfaisante en ce qui concerne les phénomènes réversibles.

Les phénomènes irréversibles se prêtent-ils de la même manière à une explication purement mécanique; peut-on, par exemple, en se représentant le monde comme formé d'atomes, et ces atomes comme soumis à des attractions dépendant des seules distances, expliquer pourquoi la chaleur ne peut jamais passer d'un corps froid sur un corps chaud? Je ne le crois pas, et je vais expliquer pourquoi la théorie de l'illustre physicien ne me semble pas s'appliquer à ce genre de phénomènes.

Soit un système dont la situation est définie par un certain nombre de paramètres p_a et soit H le potentiel cinétique du système. Il vient

$$(1) \qquad q_a = \frac{dp_a}{dt}, \qquad s_a = -\frac{dH}{dq_a}, \qquad \frac{ds_a}{dt} + \frac{dH}{dp_a} = -P_a.$$

Si l'on pose ensuite

$$E = H + \Sigma s_a q_a,$$

E est l'énergie, et il vient, en regardant E comme une fonction des s_a et des p_a,

$$(2) \qquad \frac{dp_a}{dt} = \frac{dE}{ds_a}, \qquad \frac{ds_a}{dt} = -\frac{dE}{dp_a} - P_a,$$

les P_a représentant les termes dus aux forces extérieures (*Journal de Crelle*, t. 100, p. 221).

Pour que des phénomènes irréversibles soient possibles, il faut et il suffit que H contienne non seulement des puissances paires des q_a, mais encore des puissances impaires de ces quantités. Si les puissances paires y entraient seules, les équations différentielles (1) et (2) ne changeraient pas quand on y changerait t en $-t$, q_a en $-q_a$, s_a en $-s_a$; elles seraient donc réversibles.

Comment les puissances impaires des q_a pourront-elles s'introduire dans l'expression du potentiel cinétique? Helmholtz montre (*Journal de Crelle*, t. 100, p. 147) que cela peut arriver s'il y a des *mouvements cachés*; c'est ainsi, pour ne citer qu'un cas simple, que les équations du mouvement d'un système quelconque rapporté à des axes mobiles ne sont plus réversibles à cause des termes dus à la force de Coriolis.

Avons-nous pour cela une explication satisfaisante des lois thermodynamiques des phénomènes irréversibles? Nullement; et, en effet, ce qu'il s'agit d'expliquer, c'est, avant tout, l'augmentation continuelle de l'entropie.

Envisageons un système soustrait à toute action extérieure; les P_a seront nuls et les équations (2) se réduiront à

$$(3) \qquad \frac{dp_a}{dt} = \frac{dE}{ds_a}, \qquad \frac{ds_a}{dt} = -\frac{dE}{dp_a}.$$

De plus, il existera une certaine fonction S des s_a et des p_a qui ira constamment en augmentant et qu'on appellera *entropie*.

On devra donc avoir constamment l'inégalité

$$(4) \qquad \frac{dS}{dt} = \sum \left(\frac{dS}{dp_a}\frac{dE}{ds_a} - \frac{dS}{ds_a}\frac{dE}{dp_a} \right) > 0.$$

Cette inégalité est-elle possible?

Nous pouvons toujours supposer que le système, tout en restant soustrait à toute action extérieure, est soumis à des liaisons telles que l'entropie soit susceptible d'un maximum.

Il ne serait pas difficile de trouver des exemples de pareils systèmes.

Alors le maximum de l'entropie correspond à un état d'équilibre stable.

Soient s_a^0 et p_a^0 les valeurs de s_a et de p_a qui correspondent à ce maximum. Nous pouvons toujours supposer que pour ces valeurs S et E s'annulent, puisque S et E ne sont définis qu'à une constante près.

Pour ces valeurs, les dérivées du premier ordre de S s'annulent, puisque S doit atteindre son maximum. Les dérivées de E s'annulent également, puisque ce maximum est une position d'équilibre et que $\frac{ds_a}{dt}$ et $\frac{dp_a}{dt}$ doivent s'annuler.

Si donc nous développons S et E suivant les puissances croissantes des $s_a - s_a^0$ et des $p_a - p_a^0$, les premiers termes qui ne s'annuleront pas seront ceux du deuxième degré. Si, de plus, on considère les valeurs de s_a et de p_a assez voisines de s_a^0 et de p_a^0 pour que les termes du troisième degré soient négligeables, S et E se réduiront à deux formes quadratiques en $s_a - s_a^0$ et $p_a - p_a^0$.

La forme S sera définie négative; elle doit, en effet, atteindre son maximum o pour

$$s_a = s_a^0, \qquad p_a = p_a^0.$$

La forme E pourra être définie ou indéfinie.

L'expression

$$\sum \left(\frac{dS}{dp_a} \frac{dE}{ds_a} - \frac{dS}{ds_a} \frac{dE}{dp_a} \right)$$

sera encore une forme quadratique par rapport aux $s_a - s_a^0$ et aux $p_a - p_a^0$.

Pour que l'inégalité (4) soit satisfaite, il faudrait que cette forme fût définie et positive; or il est aisé de s'assurer que cela est impossible si l'une des deux formes S et E est définie, ce qui a lieu ici.

Nous devons donc conclure que les deux principes de l'augmentation de l'entropie et de la moindre action (entendu au sens hamiltonien) sont inconciliables. Si donc M. von Helmholtz a montré, avec une admirable clarté, que les lois des phénomènes réversibles découlent des équations ordinaires de la Dynamique, il semble probable qu'il faudra chercher ailleurs l'explication des phénomènes irréversibles et renoncer pour cela aux hypothèses familières de la Mécanique rationnelle d'où l'on a tiré les équations de Lagrange et de Hamilton.

RÉPONSE A L'ARTICLE DE P. G. TAIT :

POINCARÉ'S THERMODYNAMICS (1)

Nature (London), t. 45, p. 414-415 (3 mars 1892).

Permettez-moi de répondre en quelques mots à l'article que M. Tait a consacré à ma Thermodynamique, non que je veuille prendre la défense de mon imprimeur, ou réfuter des reproches généraux, contre lesquels ma préface proteste suffisamment.

J'abuserais ainsi de votre hospitalité et de la patience de vos lecteurs; je me bornerai donc à discuter une seule des critiques de M. Tait, et je choisirai celle que ce savant paraît regarder comme la plus importante et qu'il a formulée avec le plus de précision. Je commence par en reproduire le texte :

« Even the elaborate thermo-electric experiments of Sir W. Thomson, Magnus, etc., are altogether ignored. What else can we gather from passages like the following?

« . . . Si l'effet Thomson a pu être mis en évidence par l'expérience, on n'a pu jusqu'ici constater l'existence des forces électromotrices qui lui donnent naissance... »

Rappelons d'abord que, dans l'étude des phénomènes électriques et thermiques qui se produisent au contact de deux métaux, il faut soigneusement distinguer trois choses :

1° Le phénomène calorifique connu sous le nom d'effet Peltier. Dans le cas

(1) *Nature* (London), t. 45, 1892, p. 245-246.

d'un métal unique mais inégalement chauffé, le phénomène correspondant s'appelle *effet Thomson* et se manifeste par un transport de chaleur.

2° La différence de potentiel vraie ou force électromotrice de contact.

3° La force électromotrice apparente ou différence de potentiel entre les couches d'air voisines de la surface de deux métaux.

L'effet Thomson a été mis en évidence par l'expérience. M. Tait croit qu'il en est de même de la différence de potentiel *vraie*.

Ou la phrase que j'ai citée plus haut n'a aucun sens, ou elle signifie qu'il me blâme d'avoir dit le contraire.

Or cette manière de voir ne soutient pas un instant d'examen. Nous n'avons aucun moyen de mesurer la différence de potentiel vraie.

Les méthodes électrostatiques ne nous font connaître que la différence de potentiel *apparente*; les méthodes électrodynamiques ne nous font connaître que la somme des forces électromotrices vraies dans un circuit *fermé*.

Enfin les méthodes indirectes, fondées sur l'écoulement ou sur les phénomènes électrocapillaires, ne sont pas applicables dans le cas qui nous occupe.

RÉPONSE A P. G. TAIT [1]

Nature (London), t. 45, p. 485 (24 mars 1892).

M. Tait ne répond pas à mon objection sous prétexte qu'elle est sans importance. Je maintiens que nous n'avons aucun moyen non seulement d'assigner l'origine des forces électromotrices Thomson, mais encore d'en constater l'existence. Si M. Tait veut répondre, et s'il connaît ce moyen, qu'il l'indique. Dans le cas contraire, s'il n'est pas en mesure de soutenir une quelconque de ses critiques, et s'il préfère un autre terrain de discussion, je suis prêt à l'y suivre.

Seulement je serai forcé d'être un peu plus long, car il me faudra passer en revue les trois reproches de M. Tait :

1° La forme de mon Ouvrage est trop mathématique.

C'est là une appréciation personnelle dont il n'y a pas à disputer. Je veux bien d'ailleurs d'une polémique sur une question de doctrine, mais non d'un procès de tendance où je jouerais le rôle d'accusé.

Toutefois il est certain que je consacre relativement peu de place à la description des expériences, et l'on aurait le droit de s'en étonner si je n'en donnais l'explication. Mon livre est la reproduction textuelle de mon cours; or mes auditeurs avaient tous suivi déjà un cours de Physique expérimentale, où ces expériences leur étaient décrites en détail. Je n'avais donc qu'à leur en rappeler brièvement les résultats.

2° J'ai mal parlé de la définition de la température absolue.

Autant que je puis comprendre, M. Tait ne trouve pas ma définition mauvaise,

(1) Note parue dans *Nature* (London), t. 45, 1892, p. 439.

et n'en propose pas une autre; mais, dit-il, j'aurais dû parler des expériences de Joule et Thomson, qui permettent de mesurer la température absolue.

Or j'ai décrit ces expériences à la page 164, et j'ai montré à la page 169 comment elles permettent de déterminer la température absolue.

3° J'ai laissé complètement de côté une explication mécanique du principe de Clausius que M. Tait appelle « the true (*i. e.* the statistical) basis of the second Law of Thermodynamics ».

Je n'ai pas parlé de cette explication, qui me paraît d'ailleurs assez peu satisfaisante, parce que je désirais rester complètement en dehors de toutes les hypothèses moléculaires quelque ingénieuses qu'elles puissent être; et en particulier j'ai passé sous silence la théorie cinétique des gaz.

RÉPONSE A P. G. TAIT [1]

Nature (London), t. 46, p. 76 (26 mai 1892).

Rentrant à Paris après une assez longue absence, je prends seulement connaissance de la dernière lettre de M. Tait. Je ne veux pas continuer une discussion qui ne saurait se prolonger sans dégénérer en une simple logomachie. Il résulte en effet des débats que M. Tait n'attribue pas le même sens que moi à certaines expressions, et en particulier au mot force électromotrice. Il me semble seulement, puisque c'était mon livre qu'il critiquait, que c'était à lui d'adopter mon langage, qui est d'ailleurs celui de tout le monde. Je m'arrêterai donc là, quoiqu'il arrive.

Je suis pourtant obligé d'insister sur un point, parce que je ne veux pas laisser suspecter ma bonne foi. M. Tait a écrit : « Nothing is said, in this connexion, about Joule's experiments. » En ne tenant pas compte de ces mots « in this connection », j'aurais dénaturé sa pensée. Ces mots ne m'avaient pas échappé. Ils signifient, si je ne me trompe : « dans ses rapports avec la détermination de la température absolue ». Et c'est pourquoi, après avoir rappelé que j'avais décrit ces expériences à la page 164, j'ai ajouté que j'avais expliqué à la page 169 comment elles permettent de déterminer la température absolue.

[I need scarcely say that I never dreamt of doubting the good faith of M. Poincaré. What I did (and still do) doubt is my having made my meaning

(1) Lettre parue dans *Nature* (London), t. 45, 1892, p. 532.

clear to him. For I cannot see how such a discussion could degenerate into a mere war of words. So far as I understand myself, I have been dealing mainly with the validity of certain modes of establishing physical laws, *not* with the mere terms employed in describing the experimental facts on which they are founded.—P. G. T.]

SUR UNE OBJECTION

A LA

THÉORIE CINÉTIQUE DES GAZ

Comptes rendus de l'Académie des sciences, t. 116, p. 1017-1021 (8 mai 1893).

Maxwell, dans un de ses Mémoires sur la Théorie dynamique des gaz, donne la formule de la détente adiabatique des gaz et son résultat est conforme aux données expérimentales. Malheureusement son calcul n'est pas correct, et en corrigeant l'erreur qu'il a commise on n'est plus du tout d'accord avec l'expérience.

Rappelons d'abord ses notations et ses résultats.

Considérons un élément de volume $d\tau$ contenant N molécules, soient $u+\xi$, $v+\eta$, $w+\zeta$ les composantes de la vitesse d'une de ces molécules; u, v, w sont des quantités qui sont les mêmes pour les N molécules contenues dans l'élément $d\tau$ et qui sont choisies de telle sorte que

$$\Sigma\xi = \Sigma\eta = \Sigma\zeta = 0.$$

Le vecteur u, v, w représente alors la vitesse moyenne des diverses molécules contenues dans l'élément $d\tau$: c'est la vitesse *apparente* des gaz, c'est-à-dire ce qu'en Hydrodynamique on appelle *vitesse des gaz*.

La demi-force vive de translation des diverses molécules gazeuses contenues dans $d\tau$ est donc

$$(1)\quad \begin{cases} \Phi = \sum \frac{M}{2}[(u+\xi)^2 + (v+\eta)^2 + (w+\zeta)^2] = \Sigma\varphi, \\ \varphi = \frac{M}{2}[(u+\xi)^2 + (v+\eta)^2 + (w+\zeta)]^2. \end{cases}$$

Mais Clausius a montré que cette expression ne représente pas la chaleur contenue dans l'élément. Pour avoir cette chaleur il faut tenir compte aussi de l'énergie due à la vibration des divers atomes dont chaque molécule se compose. Pour rendre compte des faits, il faut admettre que cette énergie de vibration, et par conséquent l'énergie totale (c'est-à-dire la chaleur interne), est proportionnelle à l'énergie de translation, du moins si le gaz est en repos apparent, c'est-à-dire si u, v, w sont nuls. On a alors

$$U = \beta\Phi.$$

U représente l'énergie totale, Φ l'énergie de translation et β est un coefficient numérique dont l'expérience nous donne la valeur.

Maxwell admet que, si le gaz est en mouvement apparent, on a

$$(2)\quad \begin{cases} U = \dfrac{M}{2}\Sigma[(u+\xi)^2 + (v+\eta)^2 + (w+\zeta)^2 + (\beta-1)(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)] = \Sigma\theta, \\ \theta = \dfrac{M}{2}[(u+\xi)^2 + (v+\eta)^2 + (w+\zeta)^2 + (\beta-1)(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)]. \end{cases}$$

J'ai fait sortir M du signe Σ parce que je suppose que toutes les molécules ont même masse. Maxwell désigne par Q une fonction quelconque des vitesses des molécules, et par $\overline{Q}$ la valeur moyenne de cette fonction à l'intérieur de l'élément, c'est-à-dire

$$\overline{Q} = \frac{\Sigma Q}{N},$$

et il arrive à l'équation suivante, à laquelle il donne le n° 75 (*Œuvres complètes*, Cambridge University Press, 1890, t. II, p. 56),

$$(75)\qquad N\frac{\partial \overline{Q}}{\partial t} + \frac{d\,\xi\overline{Q}N}{dx} + \frac{d\,\eta\overline{Q}N}{dy} + \frac{d\,\zeta\overline{Q}N}{dz} = N\frac{\delta\overline{Q}}{\delta t}.$$

La dérivée $\frac{\partial \overline{Q}}{\partial t}$ se rapporte aux variations que subit la valeur de $\overline{Q}$ relative à un élément de volume *supposé entraîné par le mouvement apparent des gaz*. $\delta\overline{Q}$ est l'accroissement de $\overline{Q}$ dû aux chocs entre les molécules.

Dans cette équation, Maxwell fait (p. 62) $Q = \theta$, θ étant défini par l'équation (2), et après diverses transformations, et en négligeant certains termes très petits, il trouve, pour la loi de la détente adiabatique (p. 65),

$$(108)\qquad \frac{dp}{p} = \frac{2+3\beta}{3\beta}\,\frac{d\rho}{\rho},$$

p et ρ étant la pression et la densité; cette formule est conforme à l'expérience.

Si, au lieu de faire $Q = \theta$, Maxwell avait fait $Q = \varphi$, il aurait trouvé

$$\frac{dp}{p} = \frac{5}{3}\frac{d\rho}{\rho}. \tag{3}$$

En effet, on a

$$\delta\varphi = \delta\theta = 0,$$

car les chocs ne peuvent altérer la force vive de translation des N molécules ni dans le mouvement absolu, ni dans le mouvement relatif du système par rapport à son centre de gravité.

La formule (3) n'est pas conforme à l'expérience, quoiqu'elle se déduise de l'équation (75) aussi légitimement et, nous allons le voir, plus légitimement que la formule (108).

En effet, je dis que la formule (75) n'est légitime que si Q est fonction de $u + \xi$, $v + \eta$, $w + \zeta$ et non pas si Q est une fonction quelconque de u, v, w, ξ, η et ζ.

Considérons deux éléments de volume contigus $d\tau$ et $d\tau'$ séparés par un élément de surface $d\omega$ que l'on peut regarder comme plan. Voyons comment raisonne Maxwell, page 52. Il cherche à évaluer « the quantity of Q transferred across the plane », et pour cela il considère les molécules qui traversent l'élément $d\omega$ et fait la somme des valeurs de Q correspondantes. Cela suppose que la valeur de Q correspondant à une molécule reste la même quand cette molécule passe de l'élément $d\tau'$ dans l'élément $d\tau$. Il en est effectivement ainsi quand dQ est fonction de $u + \xi$, $v + \eta$, $w + \zeta$, puisque le mouvement de la molécule est rectiligne et uniforme. Mais il n'en est plus de même quand Q est fonction de ξ, η et ζ. En effet, le vecteur u, v, w est la vitesse du centre de gravité du système des molécules contenues dans l'élément $d\tau$. Il en résulte que u n'a pas la même valeur dans $d\tau$ et dans $d\tau'$; donc, quand la molécule passera de $d\tau'$ dans $d\tau$, $u + \xi$ ne variera pas, mais u et, par conséquent, ξ varieront.

Ainsi Q doit être fonction de $u + \xi$, $v + \eta$ et $w + \zeta$; on peut donc faire $Q = \varphi$, mais non $Q = \theta$. La formule (3) est correcte, la formule (108) ne l'est pas.

En résumé, dans son état actuel, la théorie cinétique donne une formule inexacte pour la détente adiabatique; le coup de pouce donné par Maxwell pour retrouver la formule exacte n'est pas légitime.

Je profite de l'occasion pour signaler une autre erreur qui se trouve dans le même Mémoire de Maxwell, mais dont les conséquences sont moins graves.

La formule (43) de la page 49 (*loc. cit.*) n'est pas correctement déduite de la formule (39) de la page précédente. Au lieu de

$$\frac{\partial_1 \overline{\xi_1 V_1^2}}{\partial t} = \left(\frac{K_1}{2M_1^3}\right)^{\frac{1}{2}} M_1 N_1 A_2 (\xi_1 . V_1^2 - \overline{\xi_1 V_1^2}),$$

on devrait trouver

$$\frac{\partial_1 \overline{\xi_1 V_1^2}}{\partial t} = \left(\frac{K_1}{2M_1^3}\right)^{\frac{1}{2}} M_1 N_1 A_2 \left[4\xi_1 . V_1^2 - 2\xi_1 . \overline{\xi_1^2} - 2\eta_1 . \overline{\xi_1 \eta_1} - 2\zeta_1 . \overline{\xi_1 \zeta_1} - 2\overline{\xi_1 V_1^2}\right],$$

et, par conséquent, si l'on suppose que les valeurs moyennes de ξ_1, η_1, ζ_1 sont nulles, au lieu de

$$\frac{\partial_1 \overline{\xi_1 V_1^2}}{\partial t} = -3\left(\frac{K_1}{2M_1^3}\right)^{\frac{1}{2}} M_1 N_1 A_2 \overline{\xi_1 V_1^2},$$

on devrait trouver

$$\frac{\partial_1 \overline{\xi_1 V_1^2}}{\partial t} = -2\left(\frac{K_1}{2M_1^3}\right)^{\frac{1}{2}} M_1 N_1 A_2 \overline{\xi_1 V_1^2}.$$

La valeur du coefficient de conductibilité s'en trouve modifiée.

Maxwell trouve

$$k = \frac{5}{3\gamma}\mu,$$

où k est le coefficient de conductibilité, et μ le coefficient de viscosité, γ le rapport des chaleurs spécifiques.

Il devrait trouver

$$k = \frac{5}{2\gamma}\mu.$$

L'expérience a donné, pour la conductibilité de l'air, 56.10^{-6}; le calcul erroné avait donné 54.10^{-6}; le calcul rectifié donnerait 81.10^{-6}.

SUR LA

THÉORIE CINÉTIQUE DES GAZ

Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. 116, p. 1165-1166 (23 mai 1893).

J'ai, dans une Communication précédente, exposé les défauts du raisonnement par lequel Maxwell cherche à établir la loi de la détente adiabatique; mais je n'ai pas expliqué quelles modifications il faut y apporter pour le rendre correct.

Reprenons l'équation (75) de Maxwell

$$N\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{d}{dx}(\overline{\xi Q}N) + \frac{d}{dy}(\overline{\eta Q}N) + \frac{d}{dz}(\overline{\zeta Q}N) = N\frac{\delta Q}{\delta t}.$$

Nous avons vu qu'on pouvait faire, dans cette équation,

$$Q = \frac{M}{2}[(u+\xi)^2 + (v+\eta)^2 + (w+\zeta)^2] = \varphi,$$

mais qu'on ne pouvait pas y faire

$$Q = (\beta - 1)\frac{M}{2}(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2).$$

En revanche appelons H l'énergie de vibration d'une molécule, c'est-à-dire la force vive due au moment relatif de ses atomes par rapport à son centre de gravité, augmentée de l'énergie potentielle due aux attractions mutuelles de ces atomes.

Bien que la valeur *moyenne* de H soit égale à

$$(\beta - 1)\frac{M}{2}(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2),$$

nous aurons le droit de faire $Q = H$; et, en effet, quand une molécule passe

d'un élément de volume $d\tau$ dans un élément contigu $d\tau'$ en traversant l'élément de surface $d\omega$ qui les sépare, ainsi que je l'ai expliqué dans ma dernière Communication, la valeur de

$$(\beta - 1)\frac{M}{2}(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)$$

change, mais celle de H ne changera pas.

Rien ne s'oppose donc à ce que l'équation (75) s'applique à H ou à $\varphi + H$.

Si les lois du choc appliquées par Maxwell dans le Mémoire cité étaient rigoureusement exactes, on devrait avoir

$$\delta\varphi = \delta H = 0.$$

Il en résulterait que, dans la détente adiabatique, la valeur moyenne de H ne demeurerait pas égale à

$$(\beta - 1)\frac{M}{2}(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)$$

et que la détente adiabatique suivrait une loi différente de la loi expérimentale.

Mais nous pouvons supposer, ce qui est plus conforme à la pensée de Maxwell, que ces lois ne sont qu'approximatives; alors $\delta\varphi$ n'est pas rigoureusement nul; cette quantité est seulement beaucoup plus petite que ne le serait, par exemple,

$$\delta \frac{M}{2}(u + \xi)^2.$$

Ce qui est rigoureusement vrai c'est que

$$\delta(\varphi + H) = 0.$$

On en conclut, en faisant $Q = \varphi + H$ dans l'équation (75),

$$N\frac{d(\overline{\varphi + H})}{dt} + \frac{d(\overline{(\varphi + H)\xi}N)}{dx} + \frac{d(\overline{(\varphi + H)\eta}N)}{dy} + \frac{d(\overline{(\varphi + H)\zeta}N)}{dz} = 0.$$

Cette équation conduirait à la véritable loi adiabatique des gaz si l'on admet, conformément au principe de Boltzmann-Maxwell, que l'effet des chocs est de faire osciller H autour de

$$(\beta - 1)\frac{M}{2}(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2).$$

SUR LA

THÉORIE CINÉTIQUE DES GAZ

Revue générale des Sciences pures et appliquées, t. 5, p. 513-521 (1894).

Ce qui m'a donné l'idée d'écrire cet article, c'est l'étude d'une communication faite récemment par lord Kelvin à la Société Royale. Cette communication se rapporte à une question essentielle pour la théorie cinétique des gaz. Mais, comme cette théorie a été beaucoup moins cultivée par les physiciens français que par les anglais, il m'a semblé que le lecteur comprendrait mal la portée de l'objection de lord Kelvin, et les rapports qu'elle peut avoir avec les hypothèses sur la constitution des gaz, si je ne commençais par un exposé général des idées de Maxwell à ce sujet.

J'ai été ainsi conduit à développer un des points les plus importants de la théorie cinétique des gaz : mais un point particulier seulement. Peut-être reviendrai-je sur d'autres parties de la théorie, mais dans un autre article; celui-ci est déjà trop long.

Cette théorie mérite-t-elle les efforts que les Anglais y ont consacrés? On peut quelquefois se le demander; je doute que, dès à présent, elle puisse rendre compte de tous les faits connus. Mais il ne s'agit pas de savoir si elle est *vraie*; ce mot, en ce qui concerne une théorie de ce genre, *n'a aucun sens*. Il s'agit de savoir si sa fécondité est épuisée ou si elle peut encore aider à faire des découvertes. Or, on ne saurait oublier qu'elle a été utile à M. Crookes dans ses travaux sur la matière radiante, ainsi qu'aux inventeurs de la théorie de la pression osmotique. On peut donc encore se servir de l'hypothèse cinétique, pourvu qu'on n'en soit pas dupe. Aussi puis-je espérer qu'on voudra bien me pardonner la longueur de cet article et le caractère un peu technique que j'ai été obligé de lui donner.

I. L'idée fondamentale de la théorie cinétique des gaz est ancienne. On sait en quoi elle consiste : on se représente un gaz comme formé de molécules très nombreuses et très petites, animées de vitesses très grandes, ces molécules n'exerçant les unes sur les autres que des actions insensibles, sauf dans le cas où leur distance est extrêmement petite.

Il en résulte qu'une molécule décrira une trajectoire rectiligne, et qu'elle ne s'en écartera que dans deux cas, d'abord si elle vient à rencontrer la paroi du vase où le gaz est renfermé ; tout se passe alors comme si, repoussée par cette paroi, elle rebondissait en suivant les lois du choc des corps élastiques. Notre molécule s'écartera encore de sa trajectoire rectiligne quand elle approchera assez d'une autre molécule pour que l'attraction de celle-ci devienne sensible ; on dira alors que les deux molécules sont en collision. La durée des collisions sera très courte si l'on admet, comme nous l'avons fait, que l'attraction moléculaire ne se fait sentir qu'à une distance excessivement petite ; nous admettrons de même qu'une molécule ne subit d'action de la part d'une paroi que quand elle en est extrêmement rapprochée ; une collision d'une molécule contre une paroi sera donc aussi de très courte durée.

La trajectoire d'une molécule quelconque se composera donc de portions rectilignes raccordées par de petits arcs de courbe, si petits même, qu'en première approximation, on pourra les assimiler à des points et comparer la trajectoire à une ligne brisée.

Dans cette manière de voir, la pression d'un gaz serait l'effet des chocs incessants des molécules gazeuses contre les parois.

Toutes ces idées sont anciennes et bien connues, mais la théorie n'a pris sa forme définitive que quand Clausius a démontré le théorème du *viriel* :

Considérons un milieu constitué comme nous venons de l'imaginer, et supposons que la pression sur les parois soit uniforme. Alors, trois fois, le produit du volume par la pression est égal à deux fois la force vive de translation des molécules gazeuses, plus le *viriel interne*.

Ce *viriel interne* est la somme des répulsions mutuelles des molécules, multipliées par leurs distances. Si, comme nous l'avons supposé, cette répulsion n'est sensible que pour les distances très petites, ce viriel sera négligeable. C'est en en tenant compte qu'on expliquerait les divergences entre les gaz réels et les gaz parfaits ; mais, pour le moment, nous ne nous occuperons pas de cette question, et nous supposerons le viriel nul.

Alors la force vive de translation des molécules est proportionnelle au produit du volume par la pression.

Mais les lois de Joule, de Mariotte et de Gay-Lussac nous apprennent, d'autre part, que l'énergie interne du gaz est proportionnelle à la température absolue et, par conséquent, au produit du volume par la pression.

L'énergie interne est donc proportionnelle à la force vive de translation.

Si le coefficient de proportionnalité était égal à 1, il y aurait égalité entre cette énergie interne et cette force vive de translation. Toute la chaleur interne du gaz se trouverait sous la forme de mouvement de translation des molécules.

La théorie cinétique des gaz se présenterait alors avec un caractère de simplicité tout à fait séduisant.

Jusqu'à Clausius, on a pu l'espérer; mais le théorème du *viriel* nous fait connaître le rapport de la force vive de translatiou au produit du volume par la pression; les expériences faites sur les gaz, et la thermodynamique nous font connaître, d'autre part, le rapport de l'énergie interne à ce même produit, et il faut bien reconnaître alors que ces deux rapports ne sont pas égaux.

Dans les gaz simples, l'énergie totale est à peu près égale aux $\frac{5}{3}$ de la force vive de translation.

De là la nécessité de modifier profondément la théorie. Clausius suppose que chaque molécule est formée de plusieurs atomes, de sorte que l'énergie cinétique totale se composera de la force vive de translation des diverses molécules en supposant la masse de chaque molécule concentrée en son centre de gravité, plus la force vive due au mouvement relatif des atomes qui composent une même molécule; comme ce mouvement relatif est une sorte de vibration, je pourrai l'appeler force vive vibratoire et je la désignerai par V, tandis que je réserverai la lettre T pour la force vive de translation.

Pour avoir l'énergie totale, il faut ajouter encore l'énergie potentielle P due aux attractions mutuelles des atomes d'une même molécule, puisque nous supposons que des atomes appartenant à des molécules différentes n'exercent les uns sur les autres que des actions insensibles, sauf pendant la durée très courte des collisions.

L'énergie totale est $T + V + P$.

Clausius est ainsi amené à supposer que les rapports $\frac{V}{T}$, $\frac{P}{T}$, sont constants; les lois de Mariotte et de Gay-Lussac s'en déduiraient alors très aisément.

Mais il ne suffit pas de le supposer, il faut l'expliquer; il faut montrer que

cette relation est nécessaire; sans quoi, rien n'est fait et toute la théorie s'écroule; il y a là pour elle une question de vie ou de mort.

C'est là qu'a été la tâche de Maxwell; mais il y a un point délicat sur lequel il convient d'insister un peu.

II. Au premier abord, il semble impossible de donner aucune raison pour que la force vive de translation d'une molécule et sa force vive de vibration restent dans un rapport constant. Nous avons supposé que les collisions de molécules se produisent incessamment; pendant ces collisions, deux molécules devenues voisines exercent les unes sur les autres des actions considérables; leur force vive de translation et leur énergie vibratoire subissent de très grandes variations; et cela, sans qu'on puisse supposer que leur rapport ne varie pas.

Heureusement, ce qui nous intéresse, ce n'est pas la force vive de telle ou telle molécule; ce n'est que la valeur moyenne de cette force vive. Le mot peut être entendu de deux manières différentes : l'énergie cinétique d'une molécule variera d'abord avec le temps, mais on peut considérer la moyenne arithmétique des valeurs que prend cette énergie pendant un temps assez long; en second lieu, cette énergie n'est pas la même pour toutes les molécules, et l'on peut prendre la moyenne arithmétique des valeurs correspondant aux diverses molécules du gaz.

Eh bien, ce que j'envisagerai dans ce qui va suivre, c'est la moyenne prise à la fois par rapport au temps et par rapport aux diverses molécules du gaz; c'est la moyenne des moyennes, pour ainsi dire. C'est elle seule, en effet, qui peut être supposée accessible aux observations.

Pourquoi donc y a-t-il un rapport constant entre les valeurs moyennes de T, de P et de V? Pour faire comprendre la pensée de Maxwell, je dois d'abord définir ce qu'on doit entendre par « *degré de liberté* ».

Considérons un système matériel quelconque; on pourra le regarder comme formé par un certain nombre de points matériels; il suffit, pour connaître la position du système, de connaître les coordonnées de ces points, mais cela n'est point toujours nécessaire. Généralement, en effet, ces points ne seront pas indépendants les uns des autres; ils seront « liés » les uns aux autres de diverses façons : par exemple, les deux extrémités d'une tringle rigide devront rester à une distance constante l'une de l'autre, de sorte qu'il suffira de connaître cinq de leurs six coordonnées pour en déduire la sixième.

Les coordonnées de nos points matériels devront donc satisfaire à certaines

équations dites de liaison. On pourra donc les exprimer toutes en fonction de quelques-unes d'entre elles : s'il y a n point matériels, ayant en tout $3n$ coordonnées, et s'il y a m équations de liaison, il suffira de se donner $3n-m$ coordonnées pour calculer les autres et pour définir complètement la position du système ; ou bien encore, il suffira de se donner $3n-m$ fonctions convenablement choisies de nos $3n$ coordonnées, fonctions que j'appellerai *coordonnées du système* et que je désignerai par la lettre q.

Si $3n-m=1$, une seule coordonnée suffit pour définir la position du système : chaque point est assujetti à se mouvoir sur une trajectoire fixe.

On dit alors que le système est à liaisons complètes ou qu'il ne comporte qu'un degré de liberté. Si $3n-m=2$, chaque point est assujetti à se mouvoir sur une surface fixe : il y a alors deux degrés de liberté.

En général, il y aura autant de degrés de liberté que de coordonnées q, c'est-à-dire $3n-m$.

On peut alors imprimer à un système $3n-m$ déplacements infiniment petits indépendants les uns des autres ; on n'en pourra trouver davantage : tout déplacement infiniment petit compatible avec les liaisons ne sera qu'une combinaison de ces $3n-m$ déplacements élémentaires. C'est ce qui justifie l'expression de *degré de liberté*.

Un point matériel libre a trois degrés de liberté ; un corps solide libre en a six ; un corps solide mobile autour d'un point fixe en a trois ; un corps solide, mobile autour d'un axe, n'en a qu'un.

Je dirai que la *situation* du système est définie quand on connaîtra non seulement les coordonnées de ses points, mais encore leurs vitesses ; c'est-à-dire quand on connaîtra non seulement les coordonnées q, mais leurs dérivées par rapport au temps que j'appellerai q'.

Si l'on accepte cette terminologie, la position du système, qui ne dépend que des coordonnées, pourra être entièrement définie sans que la situation le soit.

Dans les problèmes de dynamique rationnelle analogues à celui qui nous occupe ici, les forces ne dépendent que de la position du système : si donc on connaît la situation du système, on connaîtra, non seulement les coordonnées des divers points et leurs vitesses, mais encore leurs accélérations. On pourra en déduire la situation nouvelle du système au bout d'un temps infiniment petit.

On peut donc dire que, si l'on connaît la situation initiale du système, on connaîtra sa situation à un instant ultérieur quelconque.

La force vive totale du système dépend évidemment des q et des q' : par

rapport aux q', c'est un polynome homogène et du second degré. Si nous doublons, en effet, tous les q', toutes les vitesses doubleront, et la force vive quadruplera.

Mais il peut se produire quelquefois une circonstance remarquable.

Supposons que les coordonnées q (et leurs dérivées q') se partagent en deux catégories.

Supposons que la force vive totale soit la somme de deux termes; le premier pourra dépendre de tous les q; mais il ne dépendra que des q' de la première catégorie; de même, le second terme pourra dépendre de tous les q; mais il ne dépendra que des q' de la seconde catégorie.

Nous dirons alors que la force vive se décompose en deux parties indépendantes.

Considérons, par exemple, un corps solide libre; pour définir sa position, il nous faut six paramètres q, à savoir :

1° Les trois coordonnées du centre de gravité; ce seront les q de la première catégorie, et leurs dérivées, c'est-à-dire les composantes de la vitesse du centre de gravité, seront les q' de la première catégorie;

2° Les trois angles qui définissent la direction du corps solide dans l'espace; ce seront les q de la deuxième catégorie, et leurs dérivées seront les q' de la deuxième catégorie.

La force vive totale du corps solide se décomposera en deux parties, dont elle sera la somme :

1° La force vive de translation; c'est-à-dire la force vive du centre de gravité, en y supposant concentrée la masse totale du corps;

2° La force vive du corps dans son mouvement relatif par rapport à son centre de gravité.

Ces deux parties sont indépendantes, puisque la première ne dépend que de la vitesse du centre de gravité, c'est-à-dire des q' de la première catégorie, et la seconde des composantes de la rotation, c'est-à-dire des q' de la seconde catégorie.

S'il y a α quantités q' de la première catégorie et β de la deuxième, nous dirons que, des deux parties indépendantes de la force vive, la première comporte α degrés de liberté et la seconde β.

Dans l'exemple qui précède, chacune des deux parties comporte trois degrés de liberté.

Dans le cas de la théorie cinétique des gaz, la force vive totale se décompose de même en deux parties indépendantes.

En effet, les coordonnées q' se répartiront en deux catégories :

Celles de la première catégorie seront les coordonnées des centres de gravité de chaque molécule :

Celles de la seconde seront celles qui définissent la position relative des divers atomes qui composent une même molécule.

La force vive se compose alors de deux parties :

1° La force vive de translation, c'est-à-dire celle qu'aurait le système si la masse de chaque molécule était concentrée en son centre de gravité : c'est ce que j'ai appelé T. Elle ne dépend que des q' de la première catégorie.

2° La force vive de vibration, c'est-à-dire la force vive du mouvement relatif des divers atomes par rapport au centre de gravité de la molécule. C'est ce que j'ai appelé V. Elle ne dépend que des q' de la seconde catégorie.

III. — Ces préliminaires posés, voyons en quoi consiste l'idée fondamentale de Maxwell.

Dans un problème quelconque de Mécanique, il y a certaines fonctions des coordonnées q et de leurs dérivées qui doivent demeurer constantes pendant toute la durée du mouvement. C'est ce qu'on appelle des *intégrales*. Il y en a toujours au moins une qui est celle des forces vives et qui exprime la constance de l'énergie totale.

Il en résulte qu'un système partant d'une situation initiale donnée, ne peut pas atteindre une situation *quelconque* : les valeurs des intégrales doivent, en effet, être les mêmes pour la situation initiale et pour toutes les situations ultérieures.

Maxwell admet que, quelle que soit la situation initiale du système, il passera toujours une infinité de fois, je ne dis pas par toutes les situations *compatibles avec l'existence des intégrales, mais aussi près qu'on voudra* d'une quelconque de ces situations.

C'est ce qu'on appelle le *postulat de Maxwell*. Nous le discuterons plus loin.

De ce postulat, Maxwell déduit un théorème important, que j'appellerai, dans ce qui va suivre, le *théorème de Maxwell*.

Je ne puis, sans être entraîné à trop de longueurs, ni démontrer ce théorème, ni même l'énoncer correctement. Je me bornerai donc à énoncer ceux des corollaires de ce théorème qui pourront m'être nécessaires.

Mais, je voudrais d'abord donner une idée approchée de ce qu'est ce théorème de Maxwell, en en énonçant un autre dont celui de Maxwell n'est qu'une généralisation :

Soit un vase entièrement rempli par un liquide incompressible. Le mouvement de ce liquide est permanent, de sorte que, quand une molécule repasse très près de sa position initiale, les composantes de sa vitesse reprennent également des valeurs très voisines de leurs valeurs initiales.

Étudions la trajectoire décrite par une molécule depuis l'époque O jusqu'à l'époque Θ et supposons Θ extrêmement grand. En général, pendant ce temps extrêmement long, la molécule aura passé très près de chacun des points du vase : c'est le postulat de Maxwell.

Considérons, à l'intérieur du vase, deux volumes v_1 et v_2. La molécule, entre les époques O et Θ, traversera, en général, plusieurs fois le volume v_1 ; soit t_1 la somme des durées de tous les séjours qu'elle fait dans ce volume v_1 ; soit de même t_2 la durée totale du séjour de la molécule dans le volume v_2. On démontre que si Θ est très grand, t_1 et t_2 sont entre eux comme v_1 et v_2. C'est là, dans ce cas particulier, le théorème de Maxwell.

Le plus important des corollaires du théorème de Maxwell est le suivant :

S'il n'y a pas d'autre intégrale uniforme que celle des forces vives, et si la force vive du système est décomposable en deux parties indépendantes, *les valeurs moyennes de ces deux parties*, pendant un temps très long, *seront entre elles comme le nombre de leurs degrés de liberté*.

Par exemple, dans le cas de la théorie cinétique des gaz, les deux quantités appelées plus haut T et V, et qui sont les deux parties indépendantes de la force vive, seront entre elles comme le nombre de leurs degrés de liberté, c'est-à-dire que leur rapport sera constant.

L'énoncé de notre corollaire doit être modifié s'il y a d'autres intégrales uniformes que celle des forces vives, et, par exemple, pour un système matériel qui serait libre dans l'espace. Pour un pareil système, en effet, il y a, outre l'intégrale des forces vives, celles du mouvement du centre de gravité et celles des aires, ce qui fait en tout neuf intégrales indépendantes du temps. S'il n'y

en a pas d'autres, on peut énoncer une proposition assez simple, analogue au corollaire dont je viens de parler. Mais je ne veux pas m'y arrêter, cela m'entraînerait hors de mon sujet; l'ensemble des molécules gazeuses, dans la théorie cinétique, ne constitue pas un système libre dans l'espace, puisqu'il est enfermé dans un vase et qu'il subit les réactions des parois de ce vase.

IV. Pour appliquer le théorème de Maxwell à la théorie cinétique des gaz, il faut aussi tenir compte de l'énergie potentielle vibratoire que nous avons appelée P.

Si nous envisageons un pendule, par exemple, son énergie cinétique est proportionnelle au carré de sa vitesse, et son énergie potentielle à la hauteur verticale dont il s'est élevé au-dessus de sa position d'équilibre. La somme de ces deux énergies est constante, la première augmentant et la seconde diminuant quand le pendule descend. Mais *leur valeur moyenne sera la même.*

C'est là un fait général. Si l'on envisage des mouvements vibratoires quelconques, c'est-à-dire les petits mouvements d'un système quelconque autour de sa position d'équilibre, l'énergie cinétique et l'énergie potentielle auront même valeur moyenne.

Donc, la valeur moyenne de P est égale à celle de V.

Si, au lieu de mouvements vibratoires, on supposait que la molécule est animée d'une sorte de mouvement de rotation, il n'y aurait plus d'énergie potentielle, puisque la forme de la molécule demeurerait invariable, et P serait nul.

Dans tous les cas les valeurs moyennes des trois parties de l'énergie T, V et P seraient dans un rapport constant.

C'est donc pour cette raison que le rapport de T à l'énergie totale doit rester constant, et c'est précisément là ce qu'il s'agissait d'expliquer.

Mais on rencontre encore une difficulté dont la gravité n'a pas échappé aux fondateurs de la théorie cinétique.

Envisageons une molécule quelconque; nous avons à considérer le mouvement de son centre de gravité et le mouvement relatif de ses atomes par rapport à ce centre de gravité. Le premier de ces mouvements comporte trois degrés de liberté, puisque le centre de gravité est défini par trois coordonnées. Supposons que le mouvement relatif comporte q degrés de liberté.

Alors, les deux parties indépendantes de la force vive, T et V, comporteraient respectivement $3n$ et qn degrés de liberté, n étant le nombre des molécules.

Les valeurs moyennes de T et V seraient donc entre elles comme 3 et q.

Le rapport de T à l'énergie totale $T + V + P$ serait donc celui de 3 à $3 + q$, si P était nul, et plus petit encore dans le cas contraire.

Or, d'après les données expérimentales, ce rapport devrait être égal, à peu près, à $\frac{3}{5}$ pour les gaz simples.

Le nombre q est donc, au plus, égal à 2. Ce résultat est bien invraisemblable. En effet, dans le cas le plus simple, celui du mouvement relatif d'un corps solide par rapport à son centre de gravité, le nombre des degrés de liberté devrait être déjà égal à 3.

Or, il est difficile de ne pas attribuer aux molécules gazeuses une constitution beaucoup plus compliquée. Ce qu'on pourrait imaginer de plus simple, ce serait une molécule formée de deux atomes gravitant l'un autour de l'autre; il faudrait là encore supposer $q = 3$.

D'autre part, chaque raie du spectre d'un gaz doit représenter un mouvement vibratoire propre à la molécule de ce gaz; il devrait donc y avoir au moins autant de degrés de liberté que de raies dans le spectre.

Cette difficulté n'a pas été résolue; mais, comme elle n'est peut-être pas insoluble, nous ne nous y arrêterons pas davantage.

Ce n'est pas là la seule application du théorème de Maxwell à la théorie des gaz.

Les molécules diverses auront des vitesses dont la grandeur et la direction seront différentes; ces vitesses changeront brusquement au moment des collisions; mais on peut supposer que la distribution des vitesses oscillera autour d'une certaine distribution moyenne et se proposer d'étudier cette distribution moyenne.

C'est ce que le théorème de Maxwell permet de faire. Il nous montre que les vitesses seront uniformément distribuées dans toutes les directions.

Il nous fait connaître aussi la loi suivant laquelle les grandeurs des vitesses sont distribuées entre les molécules. C'est cette même loi que Maxwell avait antérieurement cherché à déterminer par d'autres procédés plus ou moins corrects.

V. Ce qui précède montre suffisamment l'importance du théorème de Maxwell; c'est la véritable pierre angulaire de la théorie des gaz qui s'écroulerait sans lui.

D'un autre côté, il ne repose lui-même que sur une base bien fragile; le postulat de Maxwell que nous avons énoncé plus haut, ne peut être accepté que sous bénéfice d'inventaire.

On comprend donc l'importance des discussions auxquelles il a donné lieu et la nécessité de s'y arrêter un peu. D'ailleurs, le nom du principal adversaire des vues de Maxwell suffirait pour attirer sur cette discussion l'attention des savants. Cet adversaire est, en effet, lord Kelvin.

Ses objections ont porté d'abord sur le postulat. Est-il certain qu'un système, partant d'une situation initiale quelconque, ira passer par toutes les situations compatibles avec les intégrales uniformes que comporte le problème?

Tous les problèmes de Mécanique admettent certaines solutions remarquables que j'ai appelées périodiques et asymptotiques et dont j'ai parlé ici-même dans un précédent article ([1]).

Pour ces solutions, le postulat de Maxwell est *certainement faux*.

Ces solutions, il est vrai, sont très particulières, elles ne peuvent se rencontrer que si la situation initiale est tout à fait exceptionnelle.

Il faudrait donc au moins ajouter à l'énoncé du postulat cette restriction, déjà bien propre à provoquer nos doutes : *sauf pour certaines situations initiales exceptionnelles*.

Ce n'est pas tout : si le postulat était vrai, le système solaire serait instable; s'il est stable, en effet, il ne peut passer que par des situations peu différentes de sa situation initiale. C'est là la définition même de la stabilité.

Or, si la stabilité du système solaire n'est pas démontrée, l'instabilité l'est moins encore et est même peu probable.

Il est possible et même vraisemblable que le postulat de Maxwell est vrai pour certains systèmes et faux pour d'autres, sans qu'on ait aucun moyen certain de discerner les uns des autres.

Il est permis de supposer *provisoirement* qu'il s'applique aux gaz tels que la théorie cinétique les conçoit; mais cette théorie ne sera solidement assise que quand on aura justifié cette supposition mieux qu'on ne l'a fait jusqu'ici.

---

(1) *Sur le problème des trois corps* (*Rev. gén. des Sciences*, t. II, 15 janvier 1891, t. 8, p. 529).

Mais, récemment lord Kelvin a formulé une objection plus précise, que je vais reproduire *in extenso* en l'empruntant à la traduction de M. Brillouin [1].

« Supposons que le système soit formé de trois corps A, B, C, tous mobiles suivant une même droite KHL :

« B oscille sous l'action d'un ressort assez dur pour que l'amplitude reste petite, même s'il arrive que toute l'énergie du système s'y accumule.

« A, C ont des masses égales.

« C n'est soumis à aucune force, sauf lorsqu'il choque la paroi fixe L et lorsqu'il choque B ou en est choqué.

« A n'est soumis à aucune force, sauf au moment où il choque B et lorsqu'il se rapproche d'une paroi fixe K ; celle-ci exerce une action répulsive quelconque, constante ou non dans toute l'épaisseur HK, mais qui devient infiniment grande, si A arrive infiniment près de la paroi.

« Supposons tous ces corps animés d'un mouvement de va-et-vient. *Les chocs entre B et les deux corps égaux A, C vont produire et maintenir l'égalité entre la valeur moyenne de l'énergie cinétique de* A, *mesurée soit immédiatement avant le choc, soit aussitôt après le choc et l'énergie cinétique moyenne de* C. Alors, si l'on tient compte du temps passé par A dans la région HK, la valeur moyenne de la *somme de l'énergie potentielle et de l'énergie cinétique* de A est égale à l'énergie cinétique moyenne de C. Mais l'énergie potentielle de A est positive en tous les points de l'espace HK ; car, par suite de notre hypothèse des actions répulsives, la vitesse de A est diminuée tant que le mouvement est dirigé de H vers K et augmentée pendant le mouvement inverse. L'énergie *cinétique* moyenne de A est donc moindre que l'énergie cinétique moyenne de C. »

Cela est contraire au théorème de Maxwell. C'est cette objection que je voudrais, à cause de son importance, discuter en détail ; mais il est nécessaire, d'abord, de définir les notations que nous emploierons. Nous prendrons la droite KHL pour axe des x ; nous désignerons par x_1, x_2, x_3, les abscisses des points A, B, C qui sont variables, et par k, h, l celles des points K, H, L qui sont constantes. On aura toujours :

$$k < x_1 < x_2 < x_3 < l,$$

$$k < h < l.$$

Le point B n'ayant que des oscillations très faibles, l'abscisse x_2 demeurera sensiblement constante et voisine de x_2^0 ; de sorte que

$$x_2^0 + \varepsilon > x_2 > x_2^0 - \varepsilon,$$

ε étant très petit.

---

[1] Conférences scientifiques et Allocutions de sir W. THOMSON, *Constitution de la matière*. (Gauthier-Villars, Paris, 1893, p. 354).

Le point B n'atteignant jamais le point H, on aura d'ailleurs :

$$h > x_2.$$

Lorsque $x_1 < h$, le point A ne sera soumis à aucune force. Lorsque $x_1 > h$, il sera soumis à une force tendant à diminuer la valeur de x_1.

La position étant définie par les trois coordonnées x_1, x_2 et x_3 le système comporte trois degrés de liberté.

VI. Pour examiner l'objection de lord Kelvin, je vais faire des hypothèses plus particulières destinées à fixer les idées :

Je supposerai que la masse du corps B est égale à celle de A et à celle de C, que je prendrai égale à 2.

Je supposerai que le point B est soumis à une force égale à

$$P(x_2^0 - x_2),$$

P étant un nombre très grand. (Il en résulte que ses oscillations autour de sa position moyenne sont isochrones, d'amplitude très petite et de période très courte.)

Je supposerai que le point A est soumis à une force qui est nulle si $x_1 < h$ et égale à $2(h - x_1)$, si x_1 est plus grand que h.

Nous pourrons alors supprimer la paroi K contre laquelle le corps A rebondissait, ou l'éloigner assez pour que ce corps ne puisse l'atteindre. Cela posé, je vais user d'un mode de représentation géométrique qui est assez commode. Je construirai un certain point M représentatif de la situation du système.

Ce point M sera défini par ses coordonnées rectangulaires dans l'espace.

Sa première coordonnée x sera égale à la vitesse $\frac{dx_1}{dt}$ du corps A.

Sa seconde coordonnée y sera égale à la vitesse $\frac{dx_3}{dt}$ du corps C.

Sa troisième coordonnée z sera égale à l'abscisse x_1 du corps A.

La position du point représentatif M ne suffit pas pour déterminer la situation du système; mais elle nous donne sur cette situation les indications les plus essentielles.

Cela posé, voyons quelle va être la trajectoire du point M.

Tant qu'il n'y aura pas de chocs et que x_1 sera plus petit que h, les corps A et C ne sont soumis à aucune force, leurs vitesses sont constantes et le point M décrit une ligne droite parallèle à l'axe des z.

Si, au contraire, x_1 est plus grand que h, la vitesse du point C demeure constante, mais celle du point A varie conformément à la loi pendulaire. Le point M décrit alors une demi-circonférence.

La trajectoire du point M se composera de deux segments de droites parallèles à l'axe des z et symétriques l'un de l'autre par rapport au plan des zy, raccordées par une demi-circonférence. Les points de contact entre ces droites et cette circonférence, où se fait ce raccordement, sont situés dans le plan $z = h$.

Comme pour $x_1 > h$, le point A se meut suivant la loi pendulaire et ses oscillations sont isochrones. Il en résulte que la partie circulaire de la trajectoire de M, quel que soit son rayon, sera toujours parcourue par ce point M *dans le même temps*.

Au contraire, la partie rectiligne de cette trajectoire, bien que sa longueur soit sensiblement constante, puisque z varie, suivant les cas, de $x_2^0 - \varepsilon$ à h ou de $x_2^0 + \varepsilon$ à h, cette partie rectiligne, dis-je, sera parcourue dans un temps très variable, d'autant plus grand que la vitesse du point A sera plus petite.

Cette trajectoire sera brusquement interrompue au moment des chocs de B contre A ou C, ou de C contre la paroi L.

Au moment de ces chocs, le point M quittera sa trajectoire primitive pour en suivre une autre de même forme.

Nous considérerons le mouvement du point M depuis l'instant O jusqu'à l'instant Θ, Θ étant très grand. Dans cet intervalle, le point M parcourra un très grand nombre d'arcs élémentaires qui seront, comme nous venons de le voir, tantôt rectilignes, tantôt circulaires.

L'énergie totale E du système devra rester constante; mais, si l'on ne considère que l'énergie des deux points A et C, celle-ci sera égale à $x^2 + y^2$ pour $z < h$ et à $x^2 + y^2 + (z - h)^2$ pour $z > h$. Le lieu des points M où cette énergie des points A et C a une valeur donnée, se composera donc d'un cylindre de révolution limité au plan $z = h$ et prolongé au delà de ce plan par une demi-sphère avec laquelle il se raccorde.

Il est aisé alors de définir un solide S dont le point M ne peut pas sortir. D'une part, en effet, l'énergie des deux points A et C doit rester inférieure à l'énergie totale du système, qui est constante et égale à E. D'autre part, x_1, c'est-à-dire z, doit être plus grand que x_2 et par conséquent que $x_2^0 - \varepsilon$.

Le solide S sera donc limité : par le plan $z = x_2^0 - \varepsilon$; par le cylindre $x^2 + y^2 = E$;

ou plutôt par la portion de ce cylindre comprise entre les plans

$$z = x_2^0 + \varepsilon \quad \text{et} \quad z = h;$$

et enfin par la demi-sphère

$$x^2 + y^2 + (z - h)^2 = E(z - h).$$

On voit que *le solide S est une figure de révolution.*

Considérons à l'intérieur de S un volume v, petit d'une manière absolue, mais assez grand pourtant pour que le point M le traverse un très grand nombre de fois depuis l'instant O jusqu'à l'instant Θ. Soit maintenant t la somme des durées de tous les séjours que fera le point M dans le volume v entre les instants O et Θ. Je donnerai au rapport $\frac{t}{v}$ le nom de *densité de la trajectoire* à l'intérieur de v.

D'après le théorème de Maxwell, *cette densité doit être constante.* Il y a exception pour la tranche très mince comprise entre les plans

$$z = x_2^0 - \varepsilon \quad \text{et} \quad z = x_2^0 + \varepsilon.$$

Il faut bien s'entendre, je ne veux pas dire que, si je considère deux volumes v très petits et égaux entre eux, le point M les traversera le même nombre de fois; si, en effet, en traversant l'un de ces volumes le point M va moins vite, il pourra le traverser moins souvent et y séjourner aussi longtemps au total.

Qu'on me permette d'appeler *moment d'inertie d'un corps par rapport à un plan* la somme des masses des molécules de ce corps multipliées par le carré de leur distance à ce plan.

Prenons, pour simplifier encore les énoncés, pour unité de volume, le volume du solide S.

Alors la valeur moyenne de la force vive du point A sera, par définition, le moment d'inertie de notre solide S par rapport au plan des yz, la densité étant définie comme nous venons de le faire.

De même, la valeur moyenne de la force vive du point C sera le moment d'inertie de S par rapport au plan des xz.

Or, le solide S étant de révolution, ces deux moments d'inertie sont égaux.

Donc, *les deux forces vives ont même valeur moyenne.*

Elles conserveront même valeur moyenne, si, comme dit lord Kelvin, on compare l'énergie cinétique moyenne de C et l'énergie cinétique moyenne de A *mesurée soit immédiatement avant le choc, soit aussitôt après le choc;* ou.

ce qui revient au même, si l'on ne considère que les instants où le point A est suffisamment voisin du point B, ou si l'on décapite, pour ainsi dire, le solide S en le coupant par un plan parallèle au plan $z = x_2^0 + \varepsilon$ et suffisamment voisin de ce plan.

L'égalité des valeurs moyennes subsiste parce que le solide S reste de révolution.

Il y a donc égalité à la fois entre les énergies cinétiques moyennes *immédiatement avant et après le choc*, et entre les énergies cinétiques moyennes *pendant toute la durée du mouvement*.

Ces deux assertions que lord Kelvin trouvait contradictoires, ne le sont donc pas en réalité. Comment cela se fait-il? C'est qu'il s'établit une sorte de compensation. Les trajectoires pour lesquelles la vitesse initiale de A est petite, pour lesquelles, par conséquent, celle de C a le plus de chances d'être grande, sont précisément celles qui séjournent le plus longtemps dans la région HL, où la vitesse de A n'est pas encore diminuée par l'effet de la force répulsive.

Pour mieux faire comprendre le jeu de cette compensation, je vais considérer une solution particulière, — qui ne pourra, il est vrai, se réaliser que si les circonstances initiales du mouvement sont tout à fait exceptionnelles, — mais qui pourra toujours nous servir d'exemple :

Je suppose que le mouvement des corps A et C soit périodique et que chaque période se subdivise en six phases.

Pendant les trois premières phases, la force vive C demeurera constante, celle de A sera également constante pendant les phases 1 et 3, tandis que, pendant la phase 2, A pénétrant dans la région HK, cette force vive sera diminuée par l'effet de la force répulsive.

Pendant les trois dernières phases, des phénomènes analogues se reproduiront; la force vive de C aura encore une valeur constante, différente, d'ailleurs, de la précédente. Dans la phase 4, A ira de B à H; dans la phase 5, A pénétrera dans la région HK, et enfin, dans la phase 6, A reviendra de H en B. Dans la phase 5, par suite de la force répulsive, la force vive de A sera plus petite que la valeur constante qu'elle conservera dans les phases 4 et 6.

A la fin des trois premières phases, comme à la fin des trois dernières, les vitesses de A et de C seront brusquement modifiées par des chocs.

Si l'on considère la trajectoire du point M, on voit que ce point décrit d'abord une droite (phase 1), puis une demi-circonférence (phase 2), puis une

autre droite (phase 3), puis une autre droite (phase 4), puis une autre demi-circonférence (phase 5), puis enfin encore une droite (phase 6).

Faisons des hypothèses plus particulières encore, résumées dans le tableau suivant où la première colonne donne le numéro de la phase, la seconde la valeur moyenne de la force vive de A, la troisième celle de la force vive de C, la quatrième la durée de la phase :

1	1	$\frac{7}{2}$	1
2	$\frac{1}{2}$	$\frac{7}{2}$	1
3	1	$\frac{7}{2}$	1
4	9	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{3}$
5	$\frac{9}{2}$	$\frac{3}{2}$	1
6	9	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{3}$

On voit que la force vive moyenne de A est égale à celle de C, si l'on se borne à envisager les phases 1, 3, 4 et 6, où le point A n'est pas soumis à la force répulsive, car :

$$1 \times 1 + 9 \times \frac{1}{3} = \frac{7}{2} \times 1 + \frac{3}{2} \times \frac{1}{3}.$$

Elle l'est encore, si l'on considère les phases 2 et 5, où cette force agit, car :

$$\frac{1}{2} \times 1 + \frac{9}{2} \times 1 = \frac{7}{2} \times 1 + \frac{3}{2} \times 1.$$

Je pense que cet exemple suffira pour faire comprendre que la contradiction signalée par lord Kelvin n'est qu'apparente.

VII. Bien que, pour les raisons qui précèdent, l'exemple cité par lord Kelvin ne me semble pas, comme à lui, décisif, c'est plutôt vers son opinion que j'inclinerais en ce qui concerne le fonds de la question.

Je crois que le théorème de Maxwell est bien une conséquence nécessaire de son postulat, du moment qu'on admet l'existence d'un état moyen; mais le postulat lui-même doit comporter de nombreuses exceptions.

Reprenons le système imaginé par lord Kelvin, mais supposons la loi de la

force répulsive différente de celle que nous avons admise dans le paragraphe précédent.

Avec cette loi, le solide S (à l'intérieur duquel se trouvent toutes les positions que l'intégrale des forces vives permet au point M d'atteindre) se composait d'un cylindre surmonté d'une demi-sphère.

Avec une loi différente, le cylindre subsiste, mais la demi-sphère est remplacée par une autre figure de révolution que j'appellerai F : *le solide* S *est donc toujours de révolution.*

Si la force est toujours répulsive, comme le suppose lord Kelvin, cette figure F est tout entière à l'intérieur du cylindre prolongé, et il n'y a rien à changer à ce qui précède. Le postulat de Maxwell et son théorème sont vrais.

Mais il n'en est plus de même si la force qui agit sur A *dans la région* HK *est tantôt répulsive tantôt attractive.*

Dans ce cas, en effet, la figure F peut être en partie extérieure au prolongement du cylindre. Si alors nous menons deux plans tangents au cylindre parallèles au plan des yz, le point M devra rester compris entre ces deux plans. Il ne pourra donc approcher de tous les points du solide S : *c'est-à-dire que le postulat de Maxwell est faux.*

Il restera à l'intérieur d'un solide S' qui est la partie de S comprise entre les deux plans tangents dont je viens de parler.

Mais le solide S' n'est plus de révolution, *le théorème de Maxwell est donc faux dans ce cas.*

ENTROPY

The Electrician (London), t. 50, p. 688-689 (13 février 1903).

The controversy about entropy, in which Messrs. Swinburne, Perry and Sir Oliver Lodge have taken part, has a lively interest for me, and if I intervene it is because it affords a chance of going more deeply into the nature and the methods of thermodynamical reasoning.

1. Take any system, S, whose state is defined by a certain number of variables, or "co-ordinates". It is needless to say I will include among these variables the positions and the speeds of the different parts of the system, so that if the *vis viva* of one of these parts varies, I say that the state of the system has not remained the same.

Let A and B be two states of the system S. What is the condition under which we can pass from the state A to the state B? The first law tells us, first, that if the system S is isolated, we cannot pass from A to B, or, on the other hand, from B to A unless a certain function of the co-ordinates, which is called the energy, has the same value in A as in B.

2. What does the second law tell us? It may be true that we can pass from the state A to the state B *directly*, that is to say, while the system S remains completely isolated; and it may also be true that we can pass from A to B indirectly, that is to say, with the help of the intervention of other auxiliary systems, S', *but in such a way that at the end of the change these auxiliary systems have come back to their original states.*

Then it is generally admitted that when we have two states, A and B, corresponding to the same energy value, and two changes by which the system

goes from A to B, and from B to A, one of these transformations is always possible, either directly or indirectly, while the other impossible, directly or indirectly. Theoretically, we have to consider the limiting case, where the two changes are possible, but infinitely slow; and then we say that the change is reversible. That is the second law.

3. On what foundations does the second law rest? Two states, A and B, being given, can we imagine an auxiliary system, S, which will enable us to pass indirectly, either from A to B, or from B to A? This is a question which must be discussed in each particular case; so far we have always succeeded. If we had a system such that we could not imagine the auxiliary system S′ enabling us to carry out one of the inverse transformations, the ordinary reasoning of thermodynamics would not be applicable to this system, and entropy could not be defined.

Then how are we to show that only one of the two transformations is possible? This is the ordinary way. We conceive an auxiliary system S, so chosen that we can change S from the state A to the state B in *a reversible manner*, and *so that the system* S′ *changes from the state* C *to the state* D. In accordance whith what we have already said, it would be impossible to bring S from A to B *by reversible change without changing the state of* S′.

If, then, S could pass directly or indirectly from B to A, S would pass indirectly from C to D; all that is needed is to make the transformation of which we have just spoken reversible, which would bring S from A to B, and S′ from C to D, then to bring S back from B to A; finally S would have passed from C to D and S would not have changed. *The impossibility of the change* C *to* D *is then a criterion of the impossibility of the change* B *to* A.

If, therefore, we know already (either by experiments numerous enough for us to deduce a general law from them, or by reasoning) that the change C to D is impossible, we must conclude that the change from B to A is also impossible. It is in this way that from Clausius' axiom, which referred only to one particular change, we have been able to deduce the impossibility of a host of other changes, and finally the second law of thermodynamics in all its generality.

We can only reason in this way if we are able to conceive this auxiliary reversible change of which I have just spoken. So far we have always succeeded. Let me take but two examples: I assume that the system S is made up of two bodies, α and β, at different temperatures, and that the change

from A to B consists in passing heat from the hotter α to the colder β. We will take for our system S a body γ at the same temperature as α and a thermodynamic engine, with which we can describe a Carnot cycle, using the bodies α, β and γ as reservoirs. We can then, by means of the engine, pass a certain amount of heat from the hot body to the cold body by *reversible changes*, while the engine at the same time borrows an additional amount of heat from the body γ to transform it into work.

The system S will thus have passed from the state A to B, and the system S′ will have also changed (and passed from the state C to the state D), since the body γ has lost heat, and the work or kinetic energie of the system is increased. These two changes taken together are reversible. It is in this way that from the impossibility of making an engine work with only one source we can prove the impossibility of a cold body giving heat to a hot one.

Another example. The system S is made up of two gases; in the state A these two gases are separate; in the state B they are mixed. I will take it that the two gases are nitrogen and carbonic anhydride; and I will add an auxiliary system S′, consisting of lime and various sources of heat. To pass from A to B by a reversible path, I absorb the carbonic anhydride by the lime, *at the pressure of dissociation*, giving up the heat so produced (without fall of temperature) to the reservoirs of the system S′; I put the calcium carbonate into the vessel containing nitrogen, then I dissociate the carbonate by taking the necessary heat from the reservoirs of S; finally, we get the two gases mixed, and S passed from A to B; at the same time there has been an exchange of heat from the reservoirs of S′, so that S′ has changed from the state C to the state D. The impossibility of separating two gases once they are mixed in such a way that the auxiliary system comes back to its original state, can thus be demonstrated.

4. I trust I may be forgiven for the length of this explanation, as it seems a little far from the point of the controversy; but perhaps it will not be useless, and it leads up to the point I will make directly.

I now come to the main point of the discussion : the definition of entropy. If we admit the second law as I have given it, it is that there is a function of the co-ordinates which is greater in B than in A, if we can pass either directly or indirectly from A to B, but not from B to A. This function is, by definition, the entropy; but this definition of entropy is still incomplete, for two reasons :

In the first place, it only allows us to compare the entropy of the system S in the two states A and B if the two states correspond to the same value of the energy, as, *if it is isolated*, it is in that case alone that the system S can pass from one state to the other. In the second place, the entropy so defined is not a measurable quantity, for, though we can easily see that it is greater in B than in A, we cannot see whether it is two or three time as great. If, then, φ is a function which answers the definition, any function of φ which increases would do as well.

5. But we can get out of this double difficulty. Take a system, S, made up of three partial systems, S_1, S_2 and S_3, and suppose we can separate these three systems sufficiently for them to have no action on one another. Then let x_1, x_2, ..., x_n be the variables which define the state of the system S_1, y_i, ... those which define the state of the system S_2, z_i, ... those which define the state of the système S_3. Let φ be the entropy of the whole system, and let us write

$$d\varphi = \Sigma A_i\, dx_i + \Sigma B_i\, dy_i + \Sigma C_i\, dz_i.$$

We will take for φ any one of the functions which satisfy the preceding definition. Then we can imagine a reversible change produced as follows : The systems S_1 and S_2 are brought together, and they act on each other, then they are separated. In these conditions the x's and the y's have varied, but not the z's. Moreover, the entropy is constant, so that we have :

$$\Sigma A_i\, dx_i + \Sigma B_i\, dy_i = 0.$$

but the system S having been kept out of the way during the change, has not been acted upon, and the transformation is independent of the z's. Whence it follows that the relations of the partial differential coefficients A and B cannot depend on the z's; similarly, the relations between the B and C terms cannot depend on the x's, and those between the A and C terms cannot depend on the y's.

Collecting these three results, we find easily

$$d\varphi = W(d\varphi_1 + d\varphi_2 + d\varphi_3),$$

W being a function of the x's, the y's and the z's, φ_1 a function of the x's alone, φ_2 a fonction of the y's alone, and φ_3 a function of the z's alone. On the other hand, we see that φ and W can only be functions of $(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3)$.

We can take advantage of the indeterminateness of φ to put

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3$$

and to say that *the entropy of the whole system is the sum of the entropies of the partial systems.* This new convention gets rid of the double ambiguity which I have already mentioned. It is clear, too, that we can have any number of partial systems.

6. Suppose now that among the partial systems there are "sources", by which I mean systems, whose mass is so large that on that account they experience only very small changes, and further, that the state of each of the sources or reservoirs is defined by a single independent variable.

Under these conditions, if S_1 is one of the reservoirs, φ_1 its entropy, and U_1 its energy, U_1 will be a function of φ_1, and as these two functions suffer only infinitesimal changes, the radio $\frac{dU_1}{d\varphi_1}$ will be constant. This constant can be regarded as the temperature of the reservoir. To entitle me to say this, it is enough for me to show that if we compare the different reservoirs this ratio varies in the same direction as the temperature. In fact, if it were otherwise, in passing heat from a cold to a hot body we should increase the entropy, and the change would be possible.

We may then put

$$\frac{dU_1}{d\varphi_1} = \theta_1.$$

Let there be a complete system containing a partial system S whose entropy is φ, and several reservoirs S_i at temperatures θ_i and with energies U_i and entropies φ_i. For a change to be possible we must have

$$d\varphi + \Sigma d\varphi_i > 0$$

or

$$d\varphi > -\sum \frac{dU_i}{\theta_i}.$$

For a reversible change we have

$$d\varphi = -\sum \frac{dU_i}{\theta_i}.$$

7. We now came to the equations of Clausius. Suppose that each part of the system S borrows its heat from a source at the same temperature as its own:

or, in other words, that the properties of the system S are the same, whatever the *exterior* reservoirs may be from which the different parts of the system receive their heat. This is a hypothesis which it is difficult not to admit when the transmission of the heat is by conduction, but which can be certain no longer with radiated heat. Admitting this, take an infinitely little element of the system S, and suppose that its temperature is θ and that it receives *from outside* a quantity of heat, dH; the corresponding reservoir, according to our hypothesis, will also be at the temperature θ, and its energy will increase by $dU = - dH$. We have, then,

$$-\sum \frac{dU}{\theta} = \int \frac{dH}{\theta},$$

and, consequently,

$$d\varphi > \int \frac{dH}{\theta},$$

and for the reversible change,

$$d\varphi = \int \frac{dH}{\theta}.$$

In the preceding integrals we have taken heat in only *from the outside*, but the same inequalities hold *a fortiori* if we only allow the quantities of heat dH which are exchanged between the different parts of the system S to figure in the integral $\int \frac{dH}{\theta}$.

8. *Conclusions.*

A. The entropy is a function of the co-ordinates.

B. Is not defined by the equation

$$d\varphi = \int \frac{dH}{\theta}.$$

This equation, arising from *another* definition of entropy, can be demonstrated for reversible changes.

C. It is wrong for *all* irreversible changes, and not only for those where there is exchange of heat in the narrow sense of the word.

D. In an irreversible change in which there is no exchange of heat the entropy increases.

E. It increases, for instance, in the case of a mixture of gases, and the increase can be calculated by the artifice I have discussed at the end of section 3.

F. If the universe is regarded as an isolated system, it can never come back to its original state; for its entropy is always growing, and this entropy being a function of the co-ordinates, would come back to its original value if the universe came back to its original state.

9. In what I have said I have been careful to state explicitly the hypotheses I have made. To what extent the reasoning is on an artificial basis is evident; and if this article were not already rather long, I would further insist on that point : it is clear that the reasoning must be continually controlled by experiment. There has been no want of such control so far; and there is really no doubt left as to the validity of the second law. But it is well, all the same, to remember what the mathematical basis is, and how far this basis is not quite satisfactory.

SUR

L'EXPÉRIENCE DE M. WIENER

Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. 112, p. 325-329 (9 février 1891).

L'admirable expérience de M. Wiener, que M. Cornu a récemment communiquée à l'Académie, est éminemment propre à nous faire connaître la véritable nature des vibrations lumineuses.

Son importance m'a déterminé à rechercher quelles sont les diverses interprétations dont elle est susceptible, non que je préfère aucune de celles que je vais proposer à l'interprétation qu'a donnée M. Cornu ([1]) et qui se présente naturellement à l'esprit, mais parce qu'on risquerait de méconnaître la véritable signification de cette expérience si l'on croyait qu'elle n'en comporte pas d'autres.

([1]) *Sur une expérience récente, déterminant la direction de la vibration dans la lumière polarisée.* Note de M. A. Cornu. — Le problème de la direction des vibrations de la lumière polarisée manquait, jusqu'à ces derniers temps, d'une solution expérimentale directe. Fresnel, il est vrai, avait apporté tant de considérations décisives tirées des lois de la réflexion ou de la double réfraction de la lumière en faveur de la normalité de la vibration au plan de polarisation, qu'aucun doute à ce sujet ne subsistait dans l'esprit de la plupart des physiciens. Toutefois l'obtention d'une preuve expérimentale directe était désirable : l'Académie l'avait mise plusieurs fois au concours, mais aucune réponse n'avait apporté la solution définitive de la question.

L'Académie apprendra sans doute avec intérêt que cette démonstration vient d'être faite et qu'elle a été obtenue précisément dans la voie que la Commission du prix Bordin pour 1867 avait honorée d'une récompense presque égale à la valeur du prix. L'Auteur du Mémoire couronné, M. W. Zenker, de Berlin (*), avait proposé une méthode que le rapporteur de la Commission, M. Fizeau, résumait ainsi :

« .... Si l'on suppose que l'on fasse interférer deux rayons qui se rencontrent sous un angle de 90° en les polarisant l'un et l'autre de la même manière, soit parallèlement au plan formé par les deux rayons qui se croisent, soit normalement à ce plan, on peut prévoir que les effets

---

(*) *Comptes rendus*, t. LXVI, p. 932 et 1255; t. LXVII, p. 115.

Je reconnais très volontiers que les résultats de M. Wiener, joints à ceux de M. Carvallo et aux phénomènes de l'aberration, constituent en faveur de la théorie de Fresnel un faisceau de preuves qui lui donnent un très haut degré de probabilité; mais aucune de ces preuves, pas même celle de M. Wiener, ne donne à cet égard la certitude absolue.

Qu'est-ce en effet que la quantité physiquement mesurable que nous appelons *intensité lumineuse*? On peut faire à ce sujet plusieurs hypothèses; on peut supposer que c'est la force vive ou énergie cinétique moyenne de l'éther (c'est ce qu'on fait d'ordinaire et c'est ce qu'a fait M. Cornu), mais on peut supposer également que c'est l'énergie potentielle moyenne, ou bien encore l'énergie totale moyenne. Ces trois définitions reviennent l'une à l'autre dans le cas

---

d'interférence seront influencés d'une manière décisive par la direction réelle des vibrations dans les rayons polarisés.

» .... Vos Commissaires ont été unanimes à reconnaître le mérite distingué du Mémoire n° 1, ...; ils n'auraient pas hésité à donner le prix à ce travail, s'il n'était résulté de la discussion à laquelle ils se sont livrés qu'il subsiste encore quelque incertitude sur l'efficacité des moyens très habilement combinés par l'auteur pour assurer le succès de son expérience. »

Il manquait en effet un moyen expérimental efficace pour mettre en évidence l'influence mutuelle des rayons polarisés se coupant à angle droit, les franges d'interférence devant être fort difficiles à séparer à cause de leur extrême finesse. Parmi les moyens suggérés par l'auteur figurait l'emploi de la Photographie; mais aucune suite ne fut donnée à ce projet d'expérience qui, finalement, paraît être tombé dans l'oubli.

Le problème expérimental semblait donc insoluble dans cette voie, lorsque récemment (*) M. O. Wiener, à Strasbourg, sans avoir connaissance des recherches de M. Zenker, le reprit sous une forme légèrement modifiée qui lui permit d'en obtenir la solution. Une comparaison avec les phénomènes acoustiques permettra de montrer le point essentiel de la nouvelle méthode.

On sait que les mouvements vibratoires d'une onde permanente, réfléchis normalement (sur le fond d'un tuyau sonore, par exemple), se composent avec ceux de l'onde directe, en donnant naissance aux ***nœuds*** où les déplacements s'annulent et aux ***ventres*** où ils se doublent.

On montre dans les cours cette composition des déplacements à l'aide d'une membrane exploratrice, tendue sur un petit cadre, qu'on introduit avec un fil dans le tuyau sonore. La membrane signale l'état vibratoire de la tranche mobile où elle se trouve par un grincement caractéristique, maximum aux ventres, nul aux nœuds.

M. Wiener reproduit d'abord cette expérience avec les ondes lumineuses photogéniques, en remplaçant la membrane par une pellicule photographique extrêmement mince, assez transparente pour laisser un libre passage aux deux ondes se croisant à sa surface et néanmoins assez sensible pour être impressionnée par les vibrations d'amplitudes maximum. Avec la lumière, les plans des nœuds et des ventres successifs sont séparés par un intervalle extrêmement petit (un quart de longueur d'onde, soit environ 1/10000e de millimètre); mais, en réglant l'inclinaison de la pellicule exploratrice, on arrive à couper très obliquement ces plans, de manière à écarter beaucoup la distance de leurs traces; les vibrations lumineuses photogéniques donnent une impression sur les lignes où leurs amplitudes s'ajoutent et n'altèrent pas la couche sensible sur les lignes nodales où les amplitudes s'annulent : de là l'apparition de véritables franges lorsqu'on développe la pellicule comme un cliché photographique.

M. Wiener applique alors cette pellicule exploratrice à l'étude des mouvements vibratoires

---

(*) OTTO WIENER, *Stehende Litchwellen und die Schwingungsrichtung polarisirten Lichtes* (*Wiedemann's Annalen*, Band XL, p. 203; 1890).

d'une onde plane unique, ou dans le cas de deux ondes planes se coupant sous un angle très aigu; mais il n'en est plus de même dans le cas de deux ondes planes se coupant à angle droit.

A un autre point de vue, on peut encore faire plusieurs hypothèses; c'est au sujet de l'expression de l'énergie potentielle moyenne. Soient x, y, z les coordonnées d'une molécule d'éther dans sa position d'équilibre; soient $x+\xi$, $y+\eta$, $z+\zeta$ les coordonnées de cette même molécule, écartée de sa position d'équilibre.

Posons

$$H = \left(\frac{d\xi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\xi}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\xi}{dz}\right)^2 + \left(\frac{d\eta}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\eta}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\eta}{dz}\right)^2 + \left(\frac{d\zeta}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\zeta}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\zeta}{dz}\right)^2,$$

$$T = \left(\frac{d\zeta}{dy} - \frac{d\eta}{dz}\right)^2 + \left(\frac{d\xi}{dz} - \frac{d\zeta}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\eta}{dx} - \frac{d\xi}{dy}\right)^2,$$

$$\Theta = \frac{d\xi}{dx} + \frac{d\eta}{dy} + \frac{d\zeta}{dz}.$$

---

résultants, existant au voisinage d'une surface sur laquelle un large faisceau polarisé se réfléchit sous l'incidence de 45°. Les ondes incidente et réfléchie se coupent sous un angle droit comme dans le projet de M. Zenker; les vibrations ne peuvent donc ajouter ou retrancher leurs amplitudes que si leurs directions sont parallèles, ce qui n'aura lieu que dans le cas où les vibrations sont normales au plan d'incidence.

L'expérience est très concluante parce qu'elle offre simultanément et dans des conditions identiques les deux cas entre lesquels il faut trancher : le faisceau incident traverse un rhomboïde de spath d'Islande qui donne côte à côte deux faisceaux, l'un polarisé dans le plan d'incidence, l'autre dans le plan perpendiculaire : la pellicule offre alors deux plages contiguës, l'une impressionnée d'une manière uniforme, c'est-à-dire sans trace d'action mutuelle, l'autre sillonnée de franges; c'est celle qui correspond à la polarisation dans le plan d'incidence : les vibrations y sont donc normales à ce plan.

Les vibrations de la lumière polarisée sont donc normales au plan de polarisation.

Cette belle expérience, complément longtemps désiré de celle de Fresnel et Arago, mérite de faire époque dans l'histoire de l'Optique : elle renverse définitivement les théories qui placent la vibration dans le plan de polarisation de la lumière, comme celle de Mac Cullagh et Neumann; par contre, elle confirme d'une manière éclatante les idées de Fresnel et de ses disciples, notamment dans toutes les conséquences relatives à la double réfraction, à l'aberration, à la constitution de l'éther dans les milieux isotropes ou cristallisés.

Elle précise par un fait palpable le caractère dynamique de la vibration lumineuse, qui commençait à passer, dans l'esprit de certains géomètres, pour une conception abstraite, pour une entité symbolique indifféremment réductible à des équivalences cinématiques très diverses.

En présence de ce fait, où l'expérimentateur dirige à son gré l'action mécanique de la vibration lumineuse comme celle de la vibration sonore, on ne peut plus affirmer que la vibration optique soit une simple abstraction géométrique et que nos connaissances sur sa nature se réduisent à dire que c'est un *vecteur*.

On conçoit qu'il puisse rester d'autres interprétations de l'oscillation lumineuse, mais le champ des équivalences acceptables se trouve maintenant singulièrement réduit.

J'ai pensé que l'Académie verrait avec satisfaction la solution définitive d'un problème sur lequel elle a, à diverses reprises, appelé l'attention des expérimentateurs, et qui complète d'une manière si heureuse le cycles des expériences fondamentales de l'Optique moderne.

La théorie de l'élasticité nous donne pour l'expression de l'énergie potentielle « localisée » dans un élément de volume

$$\alpha H + \beta T + \gamma \Theta^2,$$

α, β et γ étant des constantes. Cette expression se réduit à

$$\alpha H + \beta T,$$

puisque la vibration est transversale et que Θ est nul.

Examinons successivement ces diverses hypothèses.

Si l'on suppose que l'intensité représente l'énergie cinétique, l'expérience de M. Wiener donne raison à Fresnel contre Neumann ;

Si l'on admet que l'intensité représente l'énergie potentielle, l'expérience de M. Wiener donne, au contraire, raison à Neumann ; elle oblige de plus à supposer que le coefficient β n'est pas nul.

Si l'on admet que l'intensité représente l'énergie totale, l'expérience de M. Wiener donne encore raison à Fresnel ; elle oblige de plus à supposer que le coefficient β est nul ; ce qui, du reste, n'a d'autre inconvénient que de ne pas s'accorder avec la théorie électromagnétique de la lumière.

Après avoir lu cette discussion, on penchera certainement vers les idées de Fresnel ; mais en se plaçant à un autre point de vue, qui peut sembler également légitime, on pourrait être amené à des conclusions différentes.

L'intensité que l'on mesure dans les expériences de M. Wiener, c'est le pouvoir photochimique des radiations, c'est-à-dire la force qui tend à séparer les atomes matériels. Si deux atomes sont entraînés dans un mouvement de translation commun, de façon que leurs vitesses soient les mêmes en grandeur et en direction, on ne voit pas bien comment un pareil mouvement tendrait à les séparer l'un de l'autre. Il paraît plus naturel de supposer que la tendance à la séparation dépend des variations périodiques que subit la distance de ces deux atomes ; or il est aisé de se rendre compte de la grandeur de ces variations.

Soient S la distance de ces deux atomes dans l'état d'équilibre ; α, β, γ les cosinus directeurs de la droite qui les joint ; la distance pendant les vibrations devient

$$S(1 + 2W),$$

où

$$W = \alpha^2 \frac{d\xi}{dx} + \beta^2 \frac{d\eta}{dy} + \gamma^2 \frac{d\zeta}{dz} + \beta\gamma\left(\frac{d\eta}{dz} + \frac{d\zeta}{dy}\right) + \alpha\gamma\left(\frac{d\zeta}{dx} + \frac{d\xi}{dz}\right) + \alpha\beta\left(\frac{d\xi}{dy} + \frac{d\eta}{dx}\right).$$

A vrai dire, ce raisonnement supposerait que l'amplitude des vibrations des molécules matérielles est la même que celle des molécules d'éther, ce qui n'est rien moins que certain. Mais ces deux amplitudes doivent être, en tous cas, proportionnelles l'une à l'autre; de sorte qu'il est naturel de supposer que l'intensité mesurée photographiquement dépend seulement de l'expression W.

Considérons un système S_1 formé par l'interférence de deux ondes dont les plans sont rectangulaires.

Prenons le plan des xz parallèle à l'une des ondes et le plan des xy parallèle à l'autre onde; si la direction de la vibration est la même pour les deux ondes, ce sera celle de l'axe des x.

On aura donc, pour l'un des rayons,

$$\xi = \sin\alpha(y - Vt), \qquad \eta = \zeta = 0,$$

et, pour l'autre,

$$\xi = \sin\alpha(z - Vt), \qquad \eta = \zeta = 0,$$

d'où, pour la vibration résultante,

$$\xi = \sin\alpha(y - Vt) + \sin\alpha(z - Vt), \qquad \eta = \zeta = 0.$$

La différence de marche entre les deux rayons est

$$\varepsilon = z - y.$$

On peut supposer que l'origine ait été choisie de telle sorte que, au point où l'on veut mesurer l'intensité, on ait

$$y = 0, \qquad \text{d'où} \qquad z = \varepsilon.$$

Il viendra alors

$$W = \alpha x_\beta \cos\alpha Vt + \alpha x_\gamma \cos\alpha(\varepsilon - Vt).$$

Considérons maintenant un système S_2 produit par l'interférence de deux ondes dont les plans se coupent à angle droit et dont les vibrations sont rectangulaires l'une sur l'autre; on aura alors

$$\xi = 0, \qquad \eta = \sin\alpha(z - Vt), \qquad \zeta = \sin\alpha(y - Vt),$$

d'où (en supposant, comme plus haut, $y = 0$, $z = \varepsilon$, au point où l'on veut mesurer l'intensité)

$$W = -\alpha\beta_\gamma[\cos\alpha Vt + \cos\alpha(\varepsilon - Vt)].$$

Comparons ces expressions avec celles que l'on obtiendrait dans le cas de l'interférence de deux ondes planes se coupant sous un angle très petit ou nul.

Supposons d'abord que ces ondes soient polarisées dans le même plan;

prenons le plan de l'onde pour plan des xy et soit encore ε la différence de marche des deux rayons. On aura

$$\xi = 0, \qquad \eta = \sin a(z - \mathrm{V}t) + \sin a(z - \varepsilon - \mathrm{V}t), \qquad \zeta = 0.$$

d'où en supposant que le point où l'on veut mesurer l'intensité ait été pris pour origine,

$$\mathrm{W} = a\beta\gamma[\cos a\mathrm{V}t + \cos a(\varepsilon - \mathrm{V}t)],$$

ce qui est la même expression que dans le cas du système S_2.

Supposons maintenant que les deux ondes soient polarisées à angle droit; prenons le plan de l'onde pour plan des yz, il viendra

$$\xi = 0, \qquad \eta = \sin a(x - \mathrm{V}t), \qquad \zeta = \sin a(x - \varepsilon - \mathrm{V}t),$$

d'où, si le point où l'on veut mesurer l'intensité est pris pour origine,

$$\mathrm{W} = a\alpha\beta\cos a\mathrm{V}t + a\alpha\gamma\cos a(\varepsilon - \mathrm{V}t),$$

ce qui est la même expression que dans le cas du système S_1.

On conclurait, si l'on adoptait cette manière de voir, que c'est le système S_2 et non le système S_1 qui doit interférer, ce qui donnerait raison à Neumann.

Je n'aurai garde de tirer cette conclusion; dans l'ignorance absolue où nous sommes du mécanisme de l'action photographique [1], il convient de s'abstenir.

---

[1] *Note de M.* Berthelot, *à propos de la Communication de M. Poincaré.* — Sans vouloir entrer dans le fonds même de la discussion intéressante soulevée par notre Confrère, M. Poincaré, il me semble utile de présenter quelques remarques sur le pouvoir photochimique des radiations, envisagé comme une force qui tendrait à séparer les atomes matériels. En fait, le mécanisme des phénomènes chimiques provoqués par la lumière est d'un ordre plus compliqué, et la plupart, sinon tous, sont des réactions exothermiques; c'est-à-dire dans lesquelles la lumière joue le rôle d'un simple excitateur, sans fournir elle-même l'énergie mise en jeu. C'est ce qui arrive notamment pour la production des images photographiques au moyen des sels d'argent, d'or, de platine etc. Le métal qui constitue l'image n'est pas séparé de sa combinaison par l'action directe de la lumière, et avec absorption de chaleur; mais, en général, il est réduit aux dépens d'une matière organique, qui s'oxyde soit aux dépens du sel lui-même, soit aux dépens de l'eau décomposée par les éléments du sel, et l'ensemble des deux réactions chimiques dégage de la chaleur.

Le cas du chlorure d'argent semblerait, à première vue, d'une autre nature; et il en serait ainsi, en effet, si ce composé était réellement séparé en chlore et en argent par l'influence des radiations lumineuses, séparation qui absorberait $-29^{\mathrm{cal}},2$. Mais, en fait, il paraît se former d'abord un sous-chlorure d'argent, ainsi que M. E. Becquerel l'a rappelé : même sans invoquer d'autre réaction, il suffirait que la chaleur dégagée dans la formation des deux chlorures fût la même, avec un poids donné d'argent, pour que le dédoublement du chlorure ordinaire se fasse sans dégagement ni absorption de chaleur. Or, on connaît plusieurs cas de cet ordre : par exemple, un même poids d'oxygène dégage sensiblement la même quantité de chaleur ($+34^{\mathrm{cal}}$) en s'unissant à l'étain, soit dans le protoxyde, soit dans le bioxyde; la séparation du protoxyde

Mon seul but a été de montrer que le doute reste permis, même après l'expérience de M. Wiener.

---

en bioxyde et étain métallique : $2 SnO = SnO_2 + Sn$, répond donc à un phénomène thermique à peu près nul et dès lors susceptible d'être provoqué par la moindre énergie complémentaire, telle que celle mise en jeu dans l'union du bioxyde avec un alcali : la précipitation, si étrange en apparence de l'étain métallique dans ces conditions, s'explique donc par la Thermochimie, De même pour certaines régénérations d'argent aux dépens de son oxyde. En effet, l'oxygène. sous un poids donné, dégage aussi, d'après mes recherches, la même quantité de chaleur ($+3^{cal},5$ pour 8^{g}) en s'unissant à l'argent pour former soit l'oxyde ordinaire, AgO, soit le sesquioxyde, Ag_2O_3; aussi conçoit-on que l'oxyde ordinaire puisse se décomposer en sesquioxyde et argent métallique : $3 AgO = Ag_2O_3 + Ag$, sous l'influence d'une énergie auxiliaire, telle que celle qui résulte de l'intervention de l'eau oxygénée, laquelle s'unit au peroxyde et forme une combinaison instable, qui se décompose aussitôt avec mise en liberté d'oxygène et dégagement de chaleur (*). Il suffirait, dès lors et semblablement, que dans le dédoublement du chlorure d'argent en sous-chlorure, le chlore excédant s'unisse avec l'hydrogène d'un composé organique, de façon à donner lieu à une réaction exothermique complémentaire bien caractérisée; dans le développement simultané de celle-ci, la lumière ne fournirait d'autre énergie que la dose infinitésimale réclamée par son rôle d'agent excitateur.

En fait et dans l'état présent de la Science, il n'existe à ma connaissance aucune réaction purement chimique où la lumière fournisse l'apport nécessaire et qui puisse fournir une mesure proprement dite des énergies lumineuses : j'ai soulevé cette question en 1865 (**), et les progrès ultérieurs de la Science n'ont fait que donner plus de force à mes observations. La combinaison du chlore avec l'hydrogène, l'oxydation des sels de protoxyde de fer, celle de l'acide oxalique, etc., toutes réactions provocables par la lumière, sont toutes aussi des réactions exothermiques. J'ai montré récemment, par des expériences et des mesures (***), qu'il en est de même de la décomposition de l'eau par le brome, décomposition invoquée autrefois comme un exemple de réaction photochimique endothermique. Le seul fait qui subsisterait encore dans cet ordre serait la décomposition de l'acide carbonique, avec mise à nu d'oxygène, par la matière verte des végétaux; mais il n'a jamais été prouvé qu'il ne se produise pas en même temps dans l'organisme végétal des réactions complémentaires et simultanées, capables de fournir l'énergie indispensable. Quoi qu'il en soit, il n'est pas nécessaire d'attribuer aux radiations lumineuses aucune dépense sensible d'énergie dans l'accomplissement des phénomènes chimiques de la photographie.

(*) *Annales de Chimie et de Physique*, 5e série, t. XXI, p. 164.
(**) Voir *Annales de Chimie et de Physique*, 4e série, t. XVIII, p. 83.
(***) *Annales de Chimie et de Physique*, 6e série, t. XIX, p. 524.

SUR

LA RÉFLEXION MÉTALLIQUE

(Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. 112, p. 456-457, 2 mars 1891).

Je crois devoir expliquer en quelques mots pour quelles raisons, malgré les Notes récentes de M. Cornu [1] et de M. Potier [2], je persiste dans mon scepticisme sur le caractère décisif de la remarquable expérience de M. Wiener. La question est maintenant circonscrite de la façon suivante : est-il certain que, sous l'incidence normale, tout plan réfléchissant soit un plan nodal ? Dans le cas de la réflexion vitreuse, il est aisé de voir que, sur la surface réfléchissante, on a un nœud avec la théorie de Fresnel et un ventre avec celle de Neumann ; mais M. Potier croit pouvoir démontrer que, dans le cas de la réflexion métallique, et particulièrement dans le cas des métaux dont le pouvoir réflecteur est très

---

(1) *Sur les objections faites à l'interprétation des expériences de M. Wiener.* Note de M. A. Cornu. (*Comptes rendus*, t. 112, p. 365-370.) — Dans l'exposé succinct du Mémoire de M. Wiener (p. 186), je regrette d'avoir, pour abréger, omis une expérience, en apparence secondaire, qui répond précisément aux objections que notre Confrère, M. Poincaré a exprimées dans la dernière séance (p. 325) sur la rigueur des conclusions qu'on doit tirer des résultats expérimentaux de M. Wiener. L'importance de cette expérience ressort d'une Note que M. Potier m'a prié de présenter à l'Académie et qu'on lira plus loin.

Comme introduction à cette Note et aux considérations mathématiques qu'elle renferme, il paraît utile de bien préciser le caractère général des objections qu'on peut opposer à l'interprétation de l'expérience principale de M. Wiener, en les dégageant de la forme purement analytique sous laquelle notre savant Confrère les a présentées. Je demande donc à l'Académie la permission de développer brièvement dans le langage des physiciens les arguments implicitement contenus dans l'Analyse de M. Poincaré : j'espère que la présente Note et celle de M. Potier feront évanouir dans l'esprit de notre Confrère les doutes qui pouvaient encore subsister sur la direction des vibrations dans la lumière polarisée.

Dans l'étude des équations différentielles qui régissent la propagation d'une onde plane à vibration transversale, dans un milieu indéfini, on trouve deux grandeurs, également assimilables à la vibration lumineuse des physiciens : l'une est le *déplacement rectiligne* ou *vibration* d'un

considérable, les deux théories seraient d'accord pour exiger la présence d'un nœud à la surface réfléchissante.

L'expérience montre que, sous l'incidence normale, le pouvoir réflecteur de l'argent est très voisin de 1 ; nous ne nous écarterons donc pas beaucoup de la réalité, dit M. Potier, en lui attribuant un pouvoir réflecteur rigoureusement égal à 1. Cette sorte de passage à la limite serait légitime dans tout raisonnement

---

point du milieu; l'autre est *la ligne représentative du glissement relatif* de deux ondes infiniment voisines (*) : toutes deux sont dans le plan de l'onde et sont perpendiculaires entre elles.

Ces deux *grandeurs dirigées* (vecteurs) varient périodiquement avec le temps, mais non d'une manière concomitante, quoique leurs amplitudes soient proportionnelles; l'une est maximum quand l'autre est nulle, et réciproquement. Il existe donc entre elles une relation analogue à celle qui lie le déplacement d'une tranche à sa compression dans la propagation d'un ébranlement le long d'un tuyau indéfini.

L'intensité lumineuse ou l'énergie transmise par unité de surface est représentée par le carré de l'amplitude de l'une aussi bien que de l'autre.

Dans les ondes à vibrations longitudinales et *stationnaires*(c'est-à-dire formées par la superposition de deux ondes identiques se propageant en sens inverse),on sait que les déplacements vibratoires s'annulent périodiquement dans l'espace, suivant des plans parallèles (nœuds) et sont maxima aux plans intermédiaires (ventres). Au contraire, l'amplitude des compressions s'annule aux ventres et est maximum aux nœuds.

Dans les ondes stationnaires à vibrations transversales les deux éléments analogues, déplacement vibratoire et glissement relatif, se retrouvent : aux nœuds, ou points de déplacement nul

---

(*) Les trois équations différentielles se ramènent à la forme (voir la *Théorie mathématique de la lumière*, Leçons professées par M. Poincaré, p. 56, 336 et 339)

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = \frac{d^2\xi}{dx^2} + \frac{d^2\xi}{dy^2} + \frac{d^2\xi}{dz^2} - \frac{d}{dx}\left(\frac{d\xi}{dx} + \frac{d\eta}{dy} + \frac{d\zeta}{dz}\right),$$

dans lesquelles ξ, η, ζ sont les trois composantes du déplacement vibratoire U situé dans le plan de l'onde dont la normale a pour cosinus directeurs α, β, γ,

$$U^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2, \qquad \alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta = 0;$$

ce déplacement reste le même en grandeur et en direction sur le plan d'onde mobile

$$\alpha x + \beta y + \gamma z - p - Vt = 0;$$

d'où

$$\xi = \varphi_1(\alpha x + \beta y + \gamma z - p - Vt), \qquad \eta = \varphi_2(\ldots), \qquad \zeta = \varphi_3(\ldots)$$

φ_1, φ_2, φ_3 étant trois fonctions qu'on laisse ici arbitraires, mais qui se réduisent, en Optique, à des sinus ou cosinus.

U constitue le premier vecteur; le second vecteur G a pour composantes parallèles aux axes

$$\left(\frac{d\zeta}{dy} - \frac{d\eta}{dz}\right), \quad \left(\frac{d\xi}{dz} - \frac{d\zeta}{dx}\right), \quad \left(\frac{d\eta}{dz} - \frac{d\xi}{dy}\right);$$

il est dirigé dans le plan de l'onde normalement au déplacement, de sorte qu'en appelant α', β', γ' ses cosinus directeurs on a

$$\alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma' = 0, \qquad \alpha'\xi + \beta'\eta + \gamma'\zeta = 0.$$

Ce vecteur qui, en général, représente en grandeur et en direction l'axe de rotation de l'éléments *dx dy dz* pendant son déplacement, mesure *dans le cas particulier de l'onde plane* en régime permanent, le glissement relatif de deux plans d'onde infiniment voisins, qui, à une époque donnée (t = const.), sont distants de l'origine de p et $p + dp$. C'est ce

où l'on n'appliquerait pas le principe de continuité, fondement commun des théories de Fresnel et de Neumann ; mais il cesse de l'être dès que ce principe joue un rôle, parce que la limite d'une fonction continue peut très bien être une fonction discontinue ; il en résulte que telle loi de réflexion, compatible avec le principe de continuité quand le pouvoir réflecteur est extrêmement voisin de 1, cesse de l'être quand ce pouvoir devient rigoureusement égal à 1.

Il est donc nécessaire de faire le calcul complètement, et ce calcul complet m'a conduit à des résultats opposés à ceux de M. Potier. On ne s'en étonnera

---

l'amplitude du glissement atteint son maximum et inversement, aux ventres, où l'amplitude du déplacement est maximum, le glissement est constamment nul.

Ainsi, au point de vue analytique, la *symétrie alternée* de ces deux grandeurs, dirigées rectangulairement dans le plan d'onde, est complète.

Aux point de vue physique, le rayon lumineux polarisé a été assimilé par Fresnel à une onde plane à vibration transversale ; l'identification des deux points de vue comporte donc une indétermination : c'est celle qui est signalée dans la dernière Note de M. Poincaré comme dans ses Leçons de Physique mathématique.

La question est donc de savoir si c'est le déplacement qui est perpendiculaire au plan de polarisation ou si c'est l'axe de glissement.

La mémorable expérience de Fresnel et Arago laisse la question indécise : en effet, lorsque

---

qu'on vérifie aisément en calculant $\frac{dU}{dp}$ qui est évidemment l'expression de ce glissement ; il suffit pour cela de différentier U par rapport à p.

$$\frac{\partial U}{\partial p} = \frac{\xi}{U}\frac{\partial \xi}{\partial p} + \frac{\eta}{U}\frac{\partial \eta}{\partial p} + \frac{\zeta}{U}\frac{\partial \zeta}{\partial p},$$

et de remplacer les termes du second membre par leurs expressions en fonction des dérivées de ξ, η, ζ par rapport aux coordonnées ; ξ, η, ζ et U sont donnés par

$$\frac{\xi}{\beta\gamma' - \gamma\beta'} = \frac{\eta}{\gamma\alpha' - \alpha\gamma'} = \frac{\zeta}{\zeta\beta' - \beta\zeta'} = \frac{U}{1}.$$

En différentiant les valeurs $\xi = \varphi_1, \ldots$, on a les équations symétriques de la forme

$$-\frac{d\xi}{dp} = \frac{1}{\alpha}\frac{d\xi}{dx} = \frac{1}{\beta}\frac{d\xi}{dy} = \frac{1}{\gamma}\frac{d\xi}{dz},$$

où l'on trouve les valeurs des dérivées qui permettent d'éliminer en même temps α, β, γ.

Il reste finalement pour la valeur du glissement relatif

$$\frac{dU}{dp} = \alpha'\left(\frac{d\zeta}{dy} - \frac{d\eta}{dz}\right) + \beta'\left(\frac{d\xi}{dz} - \frac{d\zeta}{dx}\right) + \gamma'\left(\frac{d\eta}{dx} - \frac{d\xi}{dy}\right).$$

C'est bien, comme on le voit, la somme des trois projections du vecteur G sur la direction α', β', γ' ; par conséquent le vecteur G défini plus haut est bien la mesure du glissement relatif. Ce glissement étant, comme on le voit aisément, un cas particulier d'un mouvement de rotation, on s'explique pourquoi sa ligne représentative est à angle droit du déplacement qui l'occasionne.

Nota. — Il ne faut pas confondre ce glissement relatif avec la variation angulaire de l'angle droit des faces de l'élément $dx\,dy\,dz$ qui est représentée pour chaque face par la somme des dérivées et non par leur différence, variation nommée aussi *glissement* par de Saint-Venant dans la théorie de l'élasticité.

pas; car il serait singulier que la réflexion métallique, phénomène complexe et mal connu, nous permît de conclure là où la réflexion vitreuse, que nous connaissons beaucoup mieux, nous aurait laissés dans le doute.

Bornons-nous au cas de l'incidence normale. L'équation du mouvement, réduite à ses termes principaux, s'écrit, dans la théorie de Fresnel,

$$(1) \qquad a\frac{d^2\xi}{dt^2} + b\frac{d\xi}{dt} = \frac{d^2\xi}{dz^2}$$

et, dans celle de Neumann,

$$(2) \qquad \frac{d^2\xi}{dt^2} = \frac{d}{dz}\left(\alpha\frac{d\xi}{dz} + \beta\frac{d^2\xi}{dz\,dt}\right).$$

a, b, α et β sont des fonctions de z constantes dans chacun des deux milieux, air et métal, et variant très rapidement dans la couche de passage qui les sépare.

---

deux ondes se coupent sous un angle très aigu, les deux déplacements comme les deux axes de glissement sont affectés de la même manière par la différence de phase; on peut dire ***qu'ils interfèrent tous deux en même temps*** si les directions de même nom sont parallèles, ou que tous deux ***sont sans action mutuelle apparente*** si elles sont perpendiculaires; l'intensité lumineuse, quelle que soit la définition théorique que l'on adopte (énergie potentielle, cinétique ou totale), offre les même variations.

Mais lorsque les ondes se coupent à angle droit, les choses se passent différemment pour les déplacements d'une part et pour les axes de glissement de l'autre. Si les deux déplacements vibratoires sont parallèles, les axes de glissement sont perpendiculaires et inversement. Donc, si les vibrations ***interfèrent***, les glissements relatifs conservent une valeur moyenne constante au même point de l'espace; inversement si les axes de glissement sont parallèles, les vibrations sont perpendiculaires entre elles; il n'y a donc pas interférence pour les déplacements, mais les glissements ont une amplitude variable avec la différence de phase; il y a donc pour eux interférence.

Telle est la traduction en langage ordinaire de l'Analyse de M. Poincaré; jusqu'ici nous sommes complètement d'accord. Voici maintenant où les doutes de l'analyste se manifestent :

Existe-t-il un moyen de distinguer dans le phénomène optique celle des deux grandeurs, déplacement ou glissement qui conserve une intensité constante, de celle dont l'amplitude est variable ?

Cela est douteux, répond M. Poincaré, car c'est l'action photochimique qui sert à explorer l'espace où se croisent les ondes et l'on ne sait pas ***a priori*** quelle est la cause déterminant la décomposition chimique : si c'est le déplacement vibratoire (énergie cinétique) qui la produit, comme le pensent les physiciens, l'expérience est en faveur de Fresnel; mais si, au contraire, ce sont les forces de glissement (énergie potentielle), la question sera tranchée en faveur de Mac Cullagh et Neumann.

Eh bien, le doute n'existe pas : sans recourir à des spéculations sur le mécanisme encore si obscur de l'action photographique et en se bornant à des considérations mécaniques familières à tous les physiciens, on peut dans l'analyse des expériences de M. Wiener trouver la solution du problème.

Il existe, en effet, un phénomène où l'on connaît ***a priori*** la grandeur relative du déplacenent vibratoire; il correspond à un cas sur lequel les principes de Fresnel et de Neumann conduisent à des conséquences identiques : c'est celui d'un corps doué d'un pouvoir réfléchissant égal à 1, corps idéal, il est vrai, mais que l'argent poli représente d'une façon très approchée; dans ce cas particulier, sous l'incidence normale le mouvement transmis au métal étant rigoureusement

Nous pourrons écrire

$$\xi = \text{partie réelle de } \xi_0 e^{ipt},$$

p étant un nombre dépendant de la période et égal à $\frac{2\pi}{\tau}$ et ξ_0 une fonction imaginaire de z. Dans l'air, où l'on a $b = 0$ (ou $\beta = 0$ dans la théorie de Neumann), nous poserons

$$\lambda = p\sqrt{a} \qquad \left(\text{ou } \lambda = \frac{p}{\sqrt{\alpha}}\right).$$

Dans le métal, nous poserons

$$\mu = \sqrt{-ap^2 + bip} \qquad \left(\text{ou } \mu = \sqrt{\frac{-p^2}{\alpha + \beta ip}}\right)$$

en choisissant le signe du radical de façon que la partie réelle de μ soit négative.

---

nul, la vibration réfléchie est égale et de signe contraire à la vibration incidente : c'est l'analogie complète avec le fond du tuyau fermé (*voir* la Note de M. Potier).

L'onde stationnaire, formée par la superposition de l'onde incidente et de l'onde réfléchie, doit donc présenter un plan nodal sur la surface réfléchissante, plan qui est l'origine de la série des plans nodaux se succédant à une demi-longueur d'onde d'intervalle au-dessus de la surface. Quant aux glissements, ils s'ajoutent, comme les compressions au fond d'un tuyau fermé, et leur amplitude est maximum au plan nodal.

Or M. Wiener a effectué cette expérience (*) : adoptant le dispositif ordinaire des anneaux colorés sous l'incidence normale, il s'assure que les surfaces réfléchissantes sont bien en contact par la loi de succession des diamètres des anneaux ; comme la surface plane qui livre passage à l'onde incidente en même temps qu'à l'onde réfléchie est enduite de la pellicule photographique, l'action de la lumière détermine, sous forme d'anneaux concentriques, la trace d'une série de plans distants d'une demi-longueur d'onde. L'observation montre qu'au centre l'impression photographique est nulle : il n'y a donc aucune action photographique au point où les deux théories s'accordent pour affirmer l'existence d'un nœud.

Il en résulte que la plaque photographique est affectée exclusivement par les déplacements vibratoires, c'est-à-dire par l'énergie cinétique du milieu vibrant, et non par les forces correspondant aux glissements relatifs ou par l'énergie potentielle de ce milieu.

L'interprétation des expériences de M. Wiener ne comporte donc aucune ambiguïté, et la vibration est bien, comme l'indique la théorie de Fresnel, perpendiculaire au plan de polarisation.

Quant à l'indétermination essentielle existant entre les deux vecteurs considérés dans un même milieu, on verra par la Note de M. Potier qu'elle disparaît lorsqu'on connaît les conditions réelles relatives au changement de milieu.

(¹) *Remarques à l'occasion de la Note de M. Poincaré sur l'expérience de M. O. Wiener.* Note de M. A. Potier, présentée par M. A. Cornu. (*Comptes rendus*, t. 112, p. 383-386). — On possède en Acoustique deux moyens d'étudier les ondes dites *stationnaires*, résultat de la superposition des ondes directes et réfléchies : la membrane Savart, qui reste immobile aux nœuds, et la capsule manométrique de Kœnig dont la flamme reste invariable aux ventres. En Optique, on ignore *a priori* auquel des deux appareils on peut assimiler la rétine, ou une plaque sensible ; la méthode expérimentale de M. Wiener donne à ce sujet une indication. Toutes les théories

---

(*) C'est, il est vrai, avec une surface de verre et non une surface d'argent que l'expérience a été faite ; mais on sait, depuis Arago, que le caractère de la réflexion est le même dans les deux cas (anneau central obscur).

On aura, dans l'air,

$$(3) \qquad \xi_0 = e^{-i\lambda z} + Be^{+i\lambda z}$$

et, dans le métal,

$$\xi_0 = Ce^{\mu z}.$$

Le premier terme du second membre de (3) correspond au rayon incident et le second au rayon réfléchi. Le nombre B est un nombre imaginaire dont le carré du module représente le pouvoir réflecteur et dont l'argument représente la différence de phase due à la réflexion.

---

de la réflexion sont en effet d'accord sur ce point : sous l'incidence normale, il y a continuité entre les vibrations incidente, réfléchie et réfractée ; la dernière est la somme des deux premières. Si une substance réfléchissante, opaque, a un pouvoir réflecteur égal à l'unité, l'énergie absorbée par elle est nulle ; il semble permis d'en conclure que le mouvement réfracté est nul aussi : les vibrations incidente et réfractée sont donc égales et de signe contraire, et rigoureusement discordantes sur la surface réfléchissante. Un milieu doué de ce pouvoir réflecteur n'existe pas, mais il paraît légitime d'admettre que les métaux, et l'argent en particulier, doivent présenter des propriétés de plus en plus voisines de celles de ce milieu idéal, à mesure que leur pouvoir réflecteur croît. Pour l'argent, la surface réfléchissante elle-même et tous les plans situés à une distance $\frac{\lambda}{2}$ de celle-ci sont donc à très peu près des plans nodaux. M. Wiener a trouvé que la mince pellicule de collodion, qu'il emploie d'une manière si ingénieuse pour explorer le voisinage de la surface réfléchissante, n'est pas altérée, précisément sur les lignes où elle est rencontrée par ces plans nodaux ; on peut donc conclure que la plaque sensible ne subit d'action qu'aux points où la vibration stationnaire a une amplitude notable ; l'expérience devrait donner un résultat contraire si ce que M. Poincaré nomme *l'énergie potentielle localisée* (dans le cas actuel, une quantité proportionnelle au carré de la dérivée de l'amplitude suivant la normale à la surface réfléchissante) déterminait l'action photographique.

Ce point est capital, car si on refusait de l'admettre, pour supposer que la plaque sensible subit l'impression maximum aux nœuds, les expériences de M. Wiener sous l'incidence de 45° amènerait à la conclusion, contraire à celle de Fresnel, que la vibration est dans le plan de polarisation ; l'expérience sous l'incidence normale prouverait que la surface réfléchissante du verre est un ventre, comme l'exige la théorie de Neumann ; on pourrait en effet résumer ces remarquables expériences en disant que la vibration doit être perpendiculaire ou parallèle au plan de polarisation, suivant que cette surface est un nœud ou un ventre et, à ce titre comme M. Poincaré l'a fait remarquer, elles pourraient être considérées comme confirmant l'une ou l'autre théorie.

Dans son Traité sur la *Théorie mathématique de la lumière*, M. Poincaré (*) a insisté déjà sur la difficulté et même l'impossibilité de choisir entre les deux hypothèses de Fresnel et de Neumann sur la direction de la vibration de la lumière polarisée ; d'après ce savant, les équations différentielles qui traduisent les propriétés attribuées à l'éther étant linéaires et à coefficients constants sont satisfaites aussi bien par les valeurs ξ, η, ζ, attribuées aux déplacements, que par les binomes $\xi'_y - \eta'_x$, ..., qu'on en déduit par différentiation, et aucun phénomène ne devrait permettre de distinguer si l'on a affaire à la vibration même ou à la quantité dirigée dont ces binomes sont les composantes. Ce raisonnement, inattaquable quand on étudie un milieu indéfini, cesse de l'être quand on étudie un milieu limité, ce qui oblige à introduire des conditions à la surface, comme dans les théories de la réflexion ou de la réfraction; suivant les

---

(*) POINCARÉ, *Théorie mathématique de la lumière. Conclusions*, p. 398.

Le calcul montre que, dans la theorie de Fresnel,

$$\xi_0 \quad \text{et} \quad \frac{d\xi_0}{dz}$$

et, dans celle de Neumann,

$$\xi_0 \quad \text{et} \quad (\alpha + \beta ip)\frac{d\xi_0}{dz}$$

doivent être continus.

On en deduit

$$B = \pm \frac{\mu + i\lambda}{i\lambda - \mu};$$

le signe + correspond à la théorie de Fresnel et le signe — à celle de Neumann.

Les coefficients a, b, α, β étant positifs, le point B sera dans l'un et l'autre cas, contenu à l'intérieur d'un segment limité par une droite et par un arc de cercle ayant pour extrémités communes les points ± 1 et se coupant à 45°.

Pour que le pouvoir réflecteur devienne égal à 1, il faut que $|B| = 1$ et, par

---

conditions choisies, on est amené à placer ou le déplacement lui-même ou la quantité dirigée définie ci-dessus dans le plan de polarisation, pour satisfaire à l'expérience. Mais ces conditions ne peuvent être absolument arbitraires quand on veut constituer une théorie mécanique de la réflexion, en particulier pour une surface douée d'un pouvoir réflecteur très voisin de l'unité, cas que je vais examiner spécialement.

La vibration incidente, d'amplitude égale à l'unité, tombant sur la surface métallique $z = 0$, y produit un mouvement dont l'amplitude décroit avec la profondeur, et représenté par une formule

$$A e^{kz} \sin 2\pi\left(\frac{t}{\tau} - \varphi_1\right),$$

tandis que le mouvement incident est représenté par $\sin 2\pi\frac{t}{\tau}$ et le mouvement réfléchi par $\sin 2\pi\left(\frac{t}{\tau} - \varphi_2\right)$; l'absence de z, sous le signe sin dans le mouvement réfracté, est nécessaire pour qu'il n'y ait pas d'énergie *transmise* dans le métal et que l'intensité réfléchie soit égale à l'intensité incidente. La continuité des deux côtés de la surface, qui est la condition commune à toutes les théories, donne $\varphi_2 = 2\varphi_1$ et $A = \cos\pi\varphi_1$; mais, si A existe, on ne pourrait s'expliquer comment il n'y aurait pas d'énergie *absorbée* par le métal, qu'on considère comme un frein agissant sur le mouvement de l'éther; il faut donc que A soit nul, $\varphi_1 = \frac{1}{4}$ et $\varphi_2 = \frac{1}{2}$, ce que j'ai admis.

On arrive au même résultat, si l'on veut exprimer, comme Cauchy, que la dérivée des déplacements par rapport à z est continue; on tire en effet de cette considération la condition $\frac{\lambda k}{2\pi} = \operatorname{tg}\pi\varphi_1$; or, pour les métaux doués d'un grand pouvoir réflecteur, tels que l'argent, on sait que l'absorption exercée par une couche dont l'épaisseur n'est qu'une fraction de longueur d'onde est considérable, c'est-à-dire que φ_1, pour ces métaux réels, est très voisin de $\frac{1}{4}$.

Il ne semble donc pas exister d'explication mécanique satisfaisante du grand pouvoir réflecteur de l'argent en dehors des deux hypothèses de A très petit, et d'une différence de phase voisine de 180°, conditions que j'ai supposées remplies au début de cette Note.

conséquent, que

$$B = \pm 1.$$

On obtiendra ces deux points en faisant $\mu = 0$ ou $\mu = -\infty$; la première de ces deux hypothèses devant évidemment être rejetée, nous ferons $\mu = -\infty$. En effet, le cas $\mu = 0$ serait celui d'un milieu transparent dont l'indice de réfraction serait nul ; le cas $\mu = -\infty$ serait celui d'un milieu absolument opaque.

Or, si l'on fait $\mu = -\infty$, on trouve $B = -1$ dans la théorie de Fresnel (ce qui est conforme au résultat de M. Potier) et $B = 1$ dans celle de Neumann (ce qui donnerait une différence de phase égale à 0, c'est-à-dire un ventre).

Dans la théorie de Neumann on a, dans l'air,

$$\xi_0 = e^{i\lambda z} + \frac{\mu + i\lambda}{\mu - i\lambda} e^{-i\lambda z}$$

et, dans le métal,

$$\xi_0 = \left(1 + \frac{\mu + i\lambda}{\mu - i\lambda}\right) e^{\mu z}.$$

La fonction ξ_0 est donc continue, quelque grand que soit $-\mu$; mais si l'on fait $\mu = -\infty$, il vient dans l'air,

$$\lim \xi_0 = 2 \cos \lambda z$$

et, dans le métal,

$$\lim \xi_0 = 0,$$

et la fonction $\lim \xi_0$ est discontinue ; ce qui met en évidence le point faible du raisonnement de M. Potier.

Quelle est maintenant la signification physique des équations (1) et (2)?

L'équation (1) correspond aux hypothèses suivantes :

1° La vibration est perpendiculaire au plan de polarisation ;

2° L'élasticité de l'éther est constante ;

3° L'absorption de la lumière par le métal est due à une résistance proportionnelle à la vitesse des molécules d'éther.

L'équation (2) correspond aux hypothèses suivantes :

1° La vibration est parallèle au plan de polarisation ;

2° La densité de l'éther est constante ;

3° L'absorption de la lumière serait due à une résistance qui suivrait les mêmes lois que le frottement intérieur des liquides et qui dépendrait, par conséquent, non de la vitesse absolue des molécules d'éther (ou de leur vitesse

relative par rapport aux molécules matérielles supposées sensiblement fixes), mais de la vitesse relative des molécules d'éther les unes par rapport aux autres.

Cette hypothèse est plus compliquée que la précédente, et c'est là un argument des plus sérieux en faveur de la théorie de Fresnel, argument complètement indépendant d'ailleurs de l'expérience de M. Wiener. Mais il perd une partie de sa valeur si l'on réfléchit à ce qui suit :

Les deux systèmes d'hypothèses que je viens d'énoncer rendent également compte des phénomènes de la réflexion métallique, même sous incidence oblique, *mais seulement pour une lumière homogène*. Si l'on veut expliquer la manière dont les constantes dépendent de la longueur d'onde, il faut recourir à des hypothèses beaucoup compliquées encore et l'on est moins frappé alors de la simplicité du système de Fresnel.

Je termine en rappelant que mon scepticisme est tout relatif, ainsi que je l'ai expliqué dans ma première Note. Si je ne crois pas que la question puisse être tranchée avec la même netteté, par exemple, que celle de la transversalité des vibrations, si je considère comme trompeuses les espérances que l'expérience de M. Wiener avait pu faire concevoir à cet égard, j'estime qu'il peut y avoir des raisons qui tendent à faire pencher la balance dans un sens ou dans l'autre ; il est remarquable que toutes ces raisons concourent à faire adopter les vues de Fresnel.

Je viens de donner moi-même, quelques lignes plus haut, un argument nouveau en faveur de la théorie de Fresnel ; la Note de M. Carvallo, que j'ai eu l'honneur de présenter lundi dernier à l'Académie, en contenait un autre. Mais le plus sérieux de tous reste celui qui est tiré du phénomène de l'aberration et de l'expérience célèbre de M. Fizeau.

SUR

LE SPECTRE CANNELÉ

Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. 120, p. 757-762 (8 avril 1895).

Il y aura bientôt cinquante ans que M. Fizeau, par une expérience célèbre, a cherché à mettre en évidence la permanence du mouvement lumineux pendant un très grand nombre d'oscillations.

Si l'on fait interférer deux rayons de lumière blanche, dont la différence de marche est de plusieurs milliers de longueurs d'onde, on n'aperçoit pas de franges mais si l'on fait tomber le faisceau sur un spectroscope, on voit que le spectre est sillonné de bandes obscures qui correspondent aux radiations simples qui sont éteintes par l'interférence.

La signification de cette expérience a été contestée en vertu des considérations suivantes :

Soit

$$\xi = F(t)$$

l'équation du mouvement lumineux en un point donné, ξ étant le déplacement de l'éther.

Une fonction quelconque pouvant être exprimée par l'intégrale de Fourier, nous pouvons écrire

$$(1) \qquad F(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(q) e^{iqt}\, dq$$

ou

$$(2) \qquad f(q) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(t) e^{-iqt}\, dt.$$

Quelque compliqué que soit le mouvement lumineux, on pourra donc le

considérer comme dû à la superposition d'une infinité d'ondes simples dont la période sera $\frac{2\pi}{q}$, dont l'amplitude sera $|f(q)|\,dq$ et la phase l'argument de $f(q)$.

L'effet du spectroscope serait alors d'isoler ces ondes simples les unes des autres.

Si l'on fait interférer deux rayons émanés d'une même source et dont la différence de marche est égale à h, l'équation du mouvement lumineux deviendra

$$\begin{aligned} \xi &= F(t) + F(t+h) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(q)[e^{iqt} + e^{iq(t+h)}]\,dq \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(q)e^{iqt}(1+e^{iqh})\,dq. \end{aligned}$$

L'effet du spectroscope sera alors d'isoler la radiation dont la période est $\frac{2\pi}{q}$ et dont l'amplitude sera devenue

$$dq\,|f(q)|\,.\,|1+e^{iqh}|$$

et sera multipliée par conséquent par le facteur $|1+e^{iqh}|$ de telle façon que pour une différence de marche convenable la radiation devra s'éteindre.

On pourrait dire aussi que l'amplitude de cette radiation est égale au module de

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{dq}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} [F(t) + F(t+h)]e^{-iqt}\,dt \\ &\quad = \frac{dq}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(t)e^{-iqt}(1+e^{iqh})\,dt, \end{aligned}\right.$$

car

$$(4)\qquad \int_{-\infty}^{+\infty} F(t+h)e^{-iqt}\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} F(t)e^{-iq(t-h)}\,dt.$$

A ce compte, l'expérience de MM. Fizeau et Foucault ne nous apprendrait rien sur la constitution de la lumière, puisque le résultat devrait être le même, quelle que soit la fonction $F(t)$.

Mais une simple réflexion nous mettra en défiance contre cette manière de raisonner.

Supposons que la fonction $F(t)$ soit nulle pour t négatif, qu'elle varie d'une façon quelconque depuis $t = 0$ jusqu'à $t = t_0$; et qu'elle redevienne nulle pour $t > t_0$. L'intensité d'une radiation simple isolée par le spectroscope devrait encore être calculée à l'aide la formule (2); elle serait donc constante.

Qu'est-ce à dire? Supposons qu'on braque un spectroscope sur une bougie et qu'on allume cette bougie pendant un certain temps ; la formule voudrait dire qu'on devrait voir quelque chose dans le spectroscope après que la bougie serait éteinte et même avant qu'elle soit allumée.

La formule est donc fausse ; comment convient-il de la modifier. Pour nous en rendre compte, supposons d'abord que l'appareil dispersif soit un réseau.

Pour calculer l'amplitude de la radiation envoyée par le réseau à un point M très éloigné dans une direction donnée, il suffit d'appliquer le principe de Huygens.

Soit θ le temps que la lumière met pour aller d'un point P du réseau au point M. Soit $d\omega$ un élément de surface du réseau dont le centre sera P. Soit ψ une fonction qui sera égale à 1 ou à 0, suivant que l'élément $d\omega$ appartiendra ou non à une fente du réseau ; on aura

$$\xi = \int F(t - \theta)\psi\, d\omega,$$

l'intégration devant être étendue à toute la surface du réseau.

Mais on aura

$$d\omega = K\, d\theta,$$

K étant un coefficient constant qui dépend de la longueur du réseau et de la *déviation*, c'est-à-dire de l'angle que fait la normale au réseau avec la direction PM ; direction sensiblement constante pour tous les points du réseau, puisque le point M est très éloigné. D'autre part, ψ pourra être considéré comme une fonction de θ. On aura donc

$$\xi = K \int_{\theta_0}^{\theta_1} F(t - \theta)\psi(\theta)\, d\theta.$$

Les limites θ_0 et θ_1 sont les temps que met la lumière pour aller des extrémités du réseau au point M.

La fonction ψ qui est égale tantôt à 1, tantôt à 0, est une fonction périodique de θ et la période que j'appelle $\frac{2\pi}{q}$ dépend de la déviation et de l'équidistance des traits du réseau.

Je puis donc développer en série de Fourier et écrire

$$K\psi = \Sigma A_n e^{niq\theta},$$

n étant un entier qui varie de $-\infty$ à $+\infty$.

On a donc

$$\xi = \Sigma A_n e^{nqit} \int_{\theta_0}^{\theta_1} F(t-\theta) e^{-nqi(t-\theta)} d\theta.$$

Tout se passe donc comme si nous avions une série de radiations dont la période serait $\frac{2\pi}{nq}$, mais dont l'amplitude et la phase, au lieu d'être rigoureusement constantes varieraient avec une lenteur relative. Cette amplitude et cette phase ne seraient autre chose que le module et l'argument de l'intégrale

$$A_n \int_{\theta_0}^{\theta_1} F(t-\theta) e^{-nqi(t-\theta)} d\theta.$$

Parmi ces radiations, celles qui correspondent à $n = \pm 1$ agiront seules sur la rétine.

Pour retrouver le résultat que nous avait donné l'intégrale de Fourier, il faudrait faire $\theta_0 = -\infty$, $\theta_1 = +\infty$; l'amplitude de la vibration (pour $n = 1$ par exemple) serait alors constante et proportionnelle au module de l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(t-\theta) e^{-iq(t-\theta)} d\theta = \int_{-\infty}^{+\infty} F(t) e^{-iqt} dt.$$

Mais la différence des limites $\theta_1 - \theta_0$, au lieu d'être infinie, est égale à autant de périodes qu'il y a de traits utilisés dans le réseau ; elle est donc égale à un temps fort court.

Supposons maintenant qu'on fasse tomber sur le réseau un faisceau formé de deux rayons interférents ; l'amplitude sera alors proportionnelle au module de l'intégrale

$$\int_{\theta_0}^{\theta_1} [F(t-\theta) + F(t-\theta+h)] e^{-iq(t-\theta)} d\theta.$$

L'expérience de M. Fizeau nous apprend que cette amplitude est proportionnelle à $(1 + e^{iqh})$; on doit donc avoir

$$(4\ bis) \qquad \int_{t-\theta_1+h}^{t-\theta_0+h} F(t) e^{-iqt} dt = \int_{t-\theta_1}^{t-\theta_0} F(t) e^{-iqt} dt.$$

Cette formule, analogue à la formule (4), n'est qu'une simple tautologie si l'on suppose comme dans la théorie incomplète $\theta_0 = -\infty$, $\theta_1 = +\infty$; il en sera de même si $\theta_1 - \theta_0$ est très grand par rapport à h, c'est-à-dire si le nombre des traits utilisés du réseau est très grand par rapport au nombre de périodes représenté par la différence de marche.

Mais il n'en est plus de même dans le cas contraire. *L'expérience de Fizeau et Foucault nous enseigne alors que le mouvement lumineux présente une certaine espèce de permanence exprimée par l'équation* (4 *bis*).

Si, par exemple, la différence de marche est de 10 000 périodes et si l'on utilise 1 000 traits du réseau, cette expérience nous apprend que le mouvement lumineux, pendant les périodes 0 à 1 000, ne diffère pas du mouvement lumineux pendant les périodes 10 000 à 11 000, comme différeraient par exemple deux mouvements lumineux émanés de deux sources différentes.

Ainsi une analyse complète conduit précisément aux mêmes conséquences que la clairvoyance de M. Fizeau avait devinées d'avance.

Les résultats seraient analogues avec un prisme ; sans entrer dans le détail du calcul, on voit que la séparation des couleurs par la réfraction est encore, en dernière analyse, un phénomène d'interférence qui peut se calculer à l'aide du principe de Huygens ; il est donc clair que dans la formule finale n'interviendront que les valeurs de $F(t)$ pour des valeurs de t comprises entre $t-\theta_0$ et $t-\theta_1$, θ_0 et θ_1 étant la plus petite et la plus grande distances (exprimées en temps) du point M à la première surface réfringente.

SUR LA LOI ÉLECTRODYNAMIQUE DE WEBER

Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. 110, p. 825-829 (21 avril 1890).

A la fin de son immortel Ouvrage (2ᵉ éd., t. II, chap. XXIII, art. 858), Maxwell étudie la loi électrodynamique de Weber et cherche à en tirer les lois connues de l'induction. Son analyse contient une suite de graves erreurs qu'il importe de rectifier, bien que le résultat final soit exact *en ce qui concerne les courants fermés*.

Le résultat est, au contraire, inexact en ce qui concerne les courants non fermés, et l'on me permettra de terminer par quelques réflexions au sujet de l'application de la loi de Weber à ce cas à peu près inaccessible à l'expérience.

Maxwell calcule la dérivée seconde $\frac{\partial^2 r}{\partial t^2}$ qui entre dans la formule de Weber, et il arrive au résultat suivant qui est l'équation qu'il appelle (27) :

$$(27) \qquad \frac{\partial^2 r}{\partial t^2} = v^2 \frac{d^2 r}{ds^2} + 2vv' \frac{d^2 r}{ds\,ds'} + v'^2 \frac{d^2 r}{ds'^2} + \frac{dv}{dt}\frac{dr}{ds} + \frac{dv'}{dt}\frac{dr}{ds'} + v\frac{dv}{ds}\frac{dr}{ds} + v'\frac{dv'}{ds'}\frac{dr}{ds'} + \frac{d^2 r}{dt^2}.$$

Cette équation est inexacte ; il faudrait, pour la rectifier, ajouter au second membre les deux termes suivants :

$$2v \frac{d^2 r}{ds\,dt} + 2v' \frac{d^2 r}{ds'\,dt}.$$

Lorsqu'on tient compte des actions des deux électricités de nom contraire, tous les termes se détruisent, sauf ceux en v et en $\frac{dv}{dt}$; les seuls termes de $\frac{\partial^2 r}{\partial t^2}$

dont nous ayons à tenir compte sont les deux suivants :

$$\frac{dv}{dt}\frac{dr}{ds} + 2v\frac{d^2 r}{ds\,dt}.$$

Maxwell ne tient compte que du premier de ces deux termes. Il trouve alors pour l'expression de la force électromotrice due à l'induction de l'élément ds sur l'élément ds'

$$\frac{dr}{ds}\frac{dr}{ds'}\frac{d}{dt}\left(\frac{i}{r}\right)ds\,ds'\,; \tag{30}$$

il devrait trouver

$$\frac{dr}{ds}\frac{dr}{ds'}\frac{d}{dt}\left(\frac{i}{r}\right)ds\,ds' + 2\frac{i}{r}\frac{d^2 r}{ds\,dt}\frac{dr}{ds'}ds\,ds'.$$

Il commet ensuite une seconde erreur qui, dans le cas des courants fermés, a pour effet de compenser la première.

Intégrant, dit-il, cette expression par rapport à s et à s', on obtient pour la force électromotrice dans le second circuit

$$\iint \frac{dr}{ds}\frac{dr}{ds'}\frac{d}{dt}\left(\frac{i}{r}\right)ds\,ds' = \frac{d}{dt}i\iint\frac{dr}{ds}\frac{dr}{ds'}\frac{1}{r}ds\,ds' = -\frac{d(\mathrm{M}i)}{dt}. \tag{31}$$

Cette égalité ne serait juste que si $\frac{dr}{ds}$ et $\frac{dr}{ds'}$ étaient indépendants du temps, ce qui n'a pas lieu.

Maxwell aurait dû trouver pour la force électromotrice totale

$$\iint\left[\frac{dr}{ds}\frac{dr}{ds'}\frac{d}{dt}\left(\frac{i}{r}\right) + \frac{2i}{r}\frac{d^2 r}{ds\,dt}\frac{dr}{ds'}\right]ds\,ds' = -\frac{d(\mathrm{M}i)}{dt} + \mathrm{J}i,$$

en posant, pour abréger,

$$\mathrm{J} = \iint\left(\frac{1}{r}\frac{d^2 r}{ds\,dt}\frac{dr}{ds'} - \frac{1}{r}\frac{d^2 r}{ds'\,dt}\frac{dr}{ds}\right)ds\,ds'.$$

Dans le cas des courants fermés, l'intégration par parties donne

$$\iint\frac{1}{r}\frac{d^2 r}{ds\,dt}\frac{dr}{ds'}ds\,ds' = -\iint\log r\frac{d^3 r}{dt\,ds\,ds'}ds\,ds'$$

et de même

$$\iint\frac{1}{r}\frac{d^2 r}{ds'\,dt}\frac{dr}{ds}ds\,ds' = -\iint\log r\frac{d^3 r}{dt\,ds\,ds'}ds\,ds'.$$

On a donc $\mathrm{J} = 0$, et la force électromotrice est bien égale, comme l'indique Maxwell, à $-\frac{d(\mathrm{M}i)}{dt}$.

Voyons ce qui se passe dans le cas des courants non fermés. Posons encore

$$M = -\iint \frac{dr}{ds}\frac{dr}{ds'}\frac{1}{r}\,ds\,ds';$$

le travail de l'action électrodynamique mutuelle des deux circuits est égal à $ii'\,dM$, c'est-à-dire à l'accroissement du *potentiel* électrodynamique Mii', accroissement calculé comme si les intensités étaient constantes.

On peut s'étonner de voir que le travail de l'attraction électrodynamique de deux courants *non fermés* soit égal à l'accroissement d'un certain potentiel. On sait, en effet, qu'il n'en est pas ainsi avec la loi d'Ampère, et la loi de Weber conduit précisément, pour l'attraction de deux éléments de courants, à la formule même d'Ampère.

La contradiction n'est qu'apparente : la loi de Weber ne conduit à la formule d'Ampère qu'à la condition de supposer uniformes les vitesses de l'électricité à travers les conducteurs. Dans un courant non fermé, il ne peut pas en être ainsi, Considérons, en effet, une molécule électrique parcourant un fil non fermé AMB; elle part du point A où elle est au repos, acquiert une certaine vitesse et arrive à l'autre extrémité B, où elle s'arrête, sa vitesse ayant décru jusqu'à zéro. Dans le voisinage des points A et B, cette molécule possède donc une accélération dont il faut tenir compte, puisque cette accélération entre dans la formule de Weber. Il résulte de là que les éléments du courant voisins des extrémités A et B n'obéiront pas à la loi d'Ampère. C'est ce qui explique pourquoi, dans la théorie de Weber, il ne suffit pas, pour obtenir l'action de courants non fermés, de composer entre elles les actions élémentaires calculées par la formule d'Ampère.

Revenons à l'induction; d'après les idées habituellement reçues, la force électromotrice d'induction du premier circuit sur le second devrait être égale à $-\frac{d(Mi)}{dt}$. C'est à cette valeur que le calcul erroné dont j'ai parlé plus haut conduit Maxwell, et cette valeur est d'ailleurs conforme au principe de la conservation de l'énergie.

Mais, en rectifiant ce calcul comme je l'ai fait plus haut, on trouve une valeur différente qui est

$$-\frac{d(Mi)}{dt} + Ji.$$

Dans le cas des courants non fermés, le terme correctif J *n'est pas nul.*

Et cependant Maxwell dit quelques lignes plus haut (art. 856) :

« Weber's law is also consistent with the principle of conservation of energy in so far that a potential exists, and this is all that is required for application of the principle by Helmholtz and Thomson. Hence we may assert, even before making any calculations on the subject, that Weber's law will explain the induction of electric currents. »

Ainsi avant tout calcul, Maxwell se croyait certain de trouver la valeur $-\frac{d(Mi)}{dt}$.

Que devons-nous donc conclure? *Il est inexact que le principe de la conservation de l'énergie suffise pour faire prévoir les lois de l'induction.* C'est d'ailleurs ce que savent déjà ceux qui ont lu les critiques profondes et spirituelles de M. Bertrand, dans sa *Théorie mathématique de l'Électricité :*

« On peut, dit M. Bertrand (p. 212), remarquer avec grande raison que les deux courants qui s'attirent deviennent solidaires; il est impossible de considérer l'un d'eux comme formant un système isolé. »

J'ajouterai que, si on le faisait, on serait conduit à des contradictions comme celle que M. Bertrand signale au commencement de la page 217.

Cherchons donc à tenir compte de toutes les circonstances du problème, en *admettant*, bien entendu, bien des choses, comme, par exemple, les lois de Joule, de Ohm et de Faraday.

Admettons que l'induction du premier circuit sur le second comprend deux termes, l'un proportionnel à i et dépendant du déplacement relatif des deux circuits, l'autre proportionnel à $\frac{di}{dt}$ et dépendant de la variation de l'intensité.

La force électromotrice due à l'induction du premier circuit sur le second pourra alors s'écrire

$$-B\frac{di}{dt} - Ci.$$

La force électromotrice due à l'induction du second circuit sur le premier s'écrira

$$-B'\frac{di'}{dt} - C'i'$$

Voici alors ce qu'on peut tirer du principe de la conservation de l'énergie

$$(a) \qquad B = B', \qquad C + C' = \frac{dM}{dt} + \frac{dB}{dt}.$$

Il est *naturel d'admettre* que, si un courant égal à i se déplace pour aller d'une position H dans une position voisine H', la force électromotrice due à ce déplacement sera égale à celle que produiraient la disparition d'un courant égal à i en H et la naissance d'un courant égal à i en H', disparition et naissance qui seraient dues non à des déplacements de circuits, mais à des variations d'intensité.

Si l'on adopte cette hypothèse, *qui ne s'impose pas d'une manière absolue*, on aura

$$(b) \qquad C = \frac{dB}{dt}, \qquad C' = \frac{dB'}{dt},$$

et il viendra

$$(c) \qquad B = B' = M, \qquad C = C' = \frac{dM}{dt}.$$

C'est ce que l'on suppose d'ordinaire; c'est ce qui arrive certainement pour les courants fermés; c'est le résultat auquel conduit le calcul erroné de Maxwell pour les courants non fermés.

Mais si l'on rectifie ce calcul, on trouve

$$(d) \qquad B = B' = M, \qquad C = \frac{dM}{dt} - J, \qquad C = \frac{dM}{dt} + J.$$

Ces valeurs sont conformes, comme les valeurs (c), aux équations (a) déduites du principe de la conservation de l'énergie; mais on voit que, si l'on adopte la théorie de Weber, il faut renoncer, pour les courants non fermés, aux hypothèses exprimées par les équations (b), quelque naturelles qu'elles puissent paraître.

Si l'on renonce à ces hypothèses, le principe de la conservation de l'énergie devient insuffisant pour déterminer les coefficients d'induction.

Je suis heureux d'avoir appuyé d'un argument nouveau les judicieuses critiques de M. Bertrand.

SUR

L'ÉQUILIBRE DES DIÉLECTRIQUES FLUIDES DANS UN CHAMP ÉLECTRIQUE

Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. 112, p. 555-557 (16 mars 1891).

D'après la théorie de M. von Helmholtz (*Annales de Wiedemann* t. XIII), lorsqu'un fluide diélectrique est placé dans un champ électrique, il faut dans les équations de l'Hydrostatique introduire des termes complémentaires pour tenir compte de l'action de ce champ.

Soient

p la pression du fluide;
v son volume spécifique;
K son pouvoir inducteur spécifique;
F l'intensité du champ.

Supposons que les forces extérieures (autres que celles qui sont dues à l'action du champ) se réduisent à la pesanteur; les équations de Helmholtz s'écriront

$$dp + \frac{g\,dz}{v} + \frac{F^2}{8\pi}\,dK + d\left(\frac{v}{8\pi}\,\frac{dK}{dv}\,F^2\right) = 0.$$

Il suit de là que

$$\frac{F^2}{8\pi}\,dK - gz\,d\left(\frac{1}{v}\right)$$

doit être une différentielle exacte. Cette différentielle doit être considérée comme nulle dans l'intérieur d'un même fluide et si la température est constante.

En effet, un liquide est incompressible et, par conséquent, $\frac{1}{v}$ et K sont des constantes, car K ne peut dépendre que de v.

S'il s'agit d'un gaz, $\frac{1}{v}$ peut être regardé comme nul, et K étant sensiblement égal au pouvoir inducteur du vide peut être regardé comme constant.

Mais si l'on a plusieurs fluides chimiquement différents, notre différentielle sera, au contraire, très grande dans la couche de passage qui les sépare. Cela nous permet d'écrire l'équation de la surface de séparation de deux fluides diélectriques quelconques.

Soient v_1 et v_2 les volumes spécifiques des deux fluides, K_1 et K_2 leurs pouvoirs inducteurs.

La force électrique F n'est pas continue et subit un saut brusque quand on franchit la surface de séparation. Soient N_1 la composante normale et T_1 la composante tangentielle de cette force dans le voisinage de la surface de séparation et dans le premier fluide. Soient N_2 et T_2 les mêmes composantes dans le voisinage de la surface de séparation et dans le second fluide. On aura, d'après la théorie classique des diélectriques,

$$T_1 = T_2, \qquad K_1 N_1 = K_2 N_2.$$

Alors l'équation de la surface de séparation devient

$$\frac{T_1^2}{8\pi}(K_1 - K_2) + \frac{K_1^2 N_1^2}{8\pi}\left(\frac{1}{K_2} - \frac{1}{K_1}\right) - gz\left(\frac{1}{v_1} - \frac{1}{v_2}\right) = \text{const.}$$

Il serait curieux de comparer cette forme de l'équation de Helmholtz avec certaines expériences de M. Quincke, qui pourraient, sans doute, s'expliquer ainsi sans qu'on ait à faire intervenir, comme l'on a cherché à le faire, les tensions qui, selon Maxwell, régneraient dans le sens des lignes de force et les pressions qui existeraient perpendiculairement à ces lignes; ces expériences ne pourraient plus alors être regardées comme la démonstration de l'existence réelle de ces tensions et de ces pressions.

Cette théorie est d'ailleurs incomplète, car il existe peut-être à la surface de séparation de deux diélectriques une différence de potentiel dont il faudrait tenir compte.

REMARQUE SUR UN MÉMOIRE DE M. JAUMANN

INTITULÉ

« LONGITUDINALES LICHT »

Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. 121, p. 792-794 (2 décembre 1895).

M. Jaumann a publié récemment dans les *Sitzungsberichte* de l'Académie de Vienne (1) un Travail rempli de vues ingénieuses, où il attribue les rayons cathodiques à des vibrations longitudinales de l'éther.

Le fondement expérimental de sa théorie a donné lieu à une polémique dans laquelle je ne veux pas prendre parti. Je voudrais seulement faire une observation au sujet de ses calculs et des conséquences qu'il croit en tirer.

M. Jaumann suppose que, dans les gaz raréfiés, le pouvoir diélectrique ε est variable et il arrive ainsi aux équations suivantes qui représentent les oscillations électriques dans un pareil milieu et que je transcris avec les notations de Hertz :

$$A\left[\varepsilon_0 \frac{dX}{dt} + X_0 \frac{d\varepsilon}{dt}\right] = \frac{dM}{dz} - \frac{dN}{dy},$$

$$A\left[\varepsilon_0 \frac{dY}{dt} + Y_0 \frac{d\varepsilon}{dt}\right] = \frac{dN}{dx} - \frac{dL}{dz},$$

$$A\left[\varepsilon_0 \frac{dZ}{dt} + Z_0 \frac{d\varepsilon}{dt}\right] = \frac{dL}{dy} - \frac{dM}{dx}.$$

A est l'inverse de la vitesse de la lumière, X, Y, Z et L, M, N les composantes de la force électrique et de la force magnétique ; ε est le pouvoir diélectrique, ε_0 la valeur moyenne de ce pouvoir ; X_0, Y_0, Z_0 les valeurs moyennes de X, Y, Z.

---

(1) *Sitzungsberichte*, t. 104, Abt. II *a*, 4 juillet 1895, p. 747-792.

$\frac{dX}{dt}$ est très petit par rapport à X_0 et $\frac{d\varepsilon}{dt}$ par rapport à ε_0.

Les variations de ε seraient définies par l'équation

$$k\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{d\varepsilon_0 X}{dx} + \frac{d\varepsilon_0 Y}{dy} + \frac{d\varepsilon_0 Z}{dz} = \theta,$$

où k est une constante.

Les équations deviennent alors

$$A\left[\frac{d\varepsilon_0 X}{dt} + \frac{X_0}{k}\theta\right] = \frac{dM}{dz} - \frac{dN}{dy},$$

$$A\left[\frac{d\varepsilon_0 Y}{dt} + \frac{Y_0}{k}\theta\right] = \frac{dN}{dx} - \frac{dL}{dz},$$

$$A\left[\frac{d\varepsilon_0 Z}{dt} + \frac{Z_0}{k}\theta\right] = \frac{dL}{dy} - \frac{dM}{dx}.$$

Différentions la première par rapport à x, la seconde par rapport à y, la troisième par rapport à z et ajoutons, en remarquant que

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{d}{dx}\frac{d\varepsilon_0 X}{dt} + \frac{d}{dy}\frac{d\varepsilon_0 Y}{dt} + \frac{d}{dz}\frac{d\varepsilon_0 Z}{dt},$$

on trouvera

$$A\left[\frac{d\theta}{dt} + \frac{1}{k}\left(\frac{dX_0\theta}{dx} + \frac{dY_0\theta}{dy} + \frac{dZ_0\theta}{dz}\right)\right] = 0;$$

cette équation exprimerait que les rayons cathodiques, au lieu de se propager en ligne droite, suivraient les lignes de force.

D'autre part, ils ne seraient pas déviés par l'aimant; M. Jaumann a bien démontré que la direction du plan de l'onde devrait être déviée par l'aimant; mais il n'en serait pas de même de la direction du rayon.

Il faut donc, en tout cas, que M. Jaumann modifie ses hypothèses s'il veut rendre compte des faits.

Réponse à la remarque de M. H. Poincaré sur la théorie des rayons cathodiques. Note de M. G. Jaumann, présentée par M. Poincaré (¹). — M. H. Poincaré a donné, dans les *Comptes rendus* du 3 décembre 1895, une équation qui démontre que les rayons cathodiques suivent une loi générale que je n'avais trouvée que séparément pour tous les cas spéciaux. Mais il suppose que son équation donne la direction de propagation des rayons cathodiques, ce que je ne peux pas admettre. Or, cette équation donne la vitesse de propagation de la surface d'onde, qui n'a aucune relation générale ni à la vitesse, ni à la direction du rayon.

Pour les gaz raréfiés homogènes en état statique, l'équation de M. Poincaré a la forme

$$k\frac{d\Theta}{dt} + X_0\frac{d\Theta}{dx} + Y_0\frac{d\Theta}{dy} + Z_0\frac{d\Theta}{dz} = 0.$$

(¹) *C. R. Acad. Sc.*, t. 122, 13 janvier 1896, p. 74-75.

C'est une équation de propagation du premier ordre à laquelle satisfont non seulement la variable Θ, mais toutes les variables du rayon. Soit n la direction de la normale de la surface d'onde, on trouvera, pour la vitesse c de la surface d'onde,

$$c = \frac{1}{k}\left[X_0 \cos(n, x) + Y_0 \cos(n, y) + Z_0 \cos(n, z)\right].$$

Il est impossible d'en tirer une conséquence quelconque sur la direction des rayons. Peut-être que les rayons coïncident avec les normales des surfaces d'onde, comme je le crois; alors la vitesse des rayons est égale à c; peut-être que les rayons suivraient les lignes de force ($X_0\, Y_0\, Z_0$), comme M. Poincaré le suppose; alors la *vitesse* des rayons serait *indépendante* de l'inclinaison du plan d'onde à la direction du rayon.

M. Poincaré concède que les surfaces d'onde sont déviées par l'aimant. Il me semble difficile à comprendre comment alors la direction et la vitesse des rayons seraient indépendantes de la force magnétique.

Pour trouver la direction des rayons, je ne connais que trois méthodes.

1. La méthode de Huygens, dont j'ai démontré dans mon Mémoire, qu'elle est seulement juste pour des rayons suivant une équation différentielle du second ordre (rayons lumineux, acoustiques, etc.), mais qu'elle ne l'est pas pour les rayons du premier ordre de ma théorie. Cette méthode donnerait le même résultat que M. Poincaré a énoncé, mais elle donne des conclusions évidemment fausses sur la propagation de la surface d'onde et sur la réflexion. De plus, la surface élémentaire de Huygens dégénère en ce cas en un point unique, ce qui voudrait dire que l'ondulation se propage du centre d'ébranlement dans une seule ligne et non pas dans toutes les directions, ce que personne ne peut croire.

2. La méthode de Kirchhoff qui se fonde sur la direction bien mal définie du flux d'énergie.

3. La méthode que j'ai employée dans un cas qui se fonde sur la distribution de l'intensité. Si dans l'intégrale on peut trouver des lignes où l'intensité des oscillations est constante, ce sont celles que nous voyons comme les directions des rayons. Cette méthode m'a donné que la direction des rayons est partout normale aux surfaces d'onde déviées par une force magnétique. De même je crois que les rayons cathodiques ne suivent pas les lignes de force électrique s'ils ont des composantes magnétiques.

Donc, il ne faut pas, jusqu'à présent, que je modifie mes hypothèses; d'ailleurs ce ne serait pas difficile, pour éviter l'objection de M. Poincaré, laquelle est tout à fait intéressante parce qu'elle établit la discussion sur la direction des rayons du premier ordre, question qui avait tant de difficultés pour les rayons lumineux du second ordre.

Observations au sujet de la Communication précédente [1].

L'équation

$$k\frac{d\Theta}{dt} + X_0\frac{d\Theta}{dx} + Y_0\frac{d\Theta}{dy} + Z_0\frac{d\Theta}{dz} = 0$$

s'intègre immédiatement. Considérons les équations différentielles

$$\frac{dt}{k} = \frac{dx}{X_0} = \frac{dy}{Y_0} = \frac{dz}{Z_0};$$

ce sont les équations différentielles des lignes de force.

---

[1] Observations de H. Poincaré (*C. R. Acad. Sc.*, t. 122, 13 janvier 1896, p. 76).

Soient

$$x = f_1(t + \alpha, \beta, \gamma),$$
$$y = f_2(t + \alpha, \beta, \gamma),$$
$$z = f_3(t + \alpha, \beta, \gamma),$$

leurs intégrales, où α, β, γ désignent trois constantes d'intégration. Je résous par rapport à $t + \alpha$, β, γ et j'ai

$$t + \alpha = \varphi_1(x, y, z),$$
$$\beta = \varphi_2(x, y, z),$$
$$\gamma = \varphi_3(x, y, z).$$

Les deux dernières de ces équations sont les équations des lignes de force en termes finis. L'équation aux dérivées partielles a pour intégrale générale

$$\Theta = \text{fonction arbitraire de } \varphi_1 - t, \quad \varphi_2 \quad \text{et} \quad \varphi_3,$$

ou, si le mouvement doit être périodique,

$$\Theta = \mathrm{F}(\varphi_2, \varphi_3) \cos \lambda(\varphi_1 - t).$$

On voit que l'intensité est fonction seulement de φ_2 et de φ_3, ce qui veut dire que les rayons suivent les lignes de force.

Quelque ingénieuses que soient les hypothèses de M. Jaumann, il est donc nécessaire de les modifier au moins dans le détail.

Réponse aux observations de M. H. Poincaré sur la théorie des rayons cathodiques. Note de M. G. Jaumann, présentée par M. Poincaré [1]. — M. H. Poincaré a considéré, dans les *Comptes rendus* du 13 janvier 1896, l'intégrale

$$(1) \qquad \theta = \mathrm{F}(\varphi_2, \varphi_3) \cos \lambda(t - \varphi_1)$$

de l'équation

$$(2) \qquad k \frac{\partial \theta}{\partial t} + \mathrm{X}_0 \frac{\partial \theta}{\partial x} + \mathrm{Y}_0 \frac{\partial \theta}{\partial y} + \mathrm{Z}_0 \frac{\partial \theta}{\partial z} = 0,$$

où la fonction φ_1 de x, y, z suffit à l'équation

$$(3) \qquad k = \mathrm{X}_0 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \mathrm{Y}_0 \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} + \mathrm{Z}_0 \frac{\partial \varphi_1}{\partial z},$$

et où $\varphi_2 = \beta$, $\varphi_3 = \gamma$ sont les lignes de force. M. Poincaré conclut que les rayons suivent toujours les lignes de force, parce que l'amplitude $\mathrm{F}(\varphi_2, \varphi_3)$ est seulement fonction de φ_2 et φ_3. Je ne peux pas consentir à cette conclusion, parce que, dans les cas en question la fonction $\mathrm{F}(\varphi_2, \varphi_3)$ n'est pas arbitraire, mais nécessairement constante (indépendante de φ_2 et φ_3).

---

[1] *C. R. Acad. Sc.*, t. 122, 2 mars 1896, p. 517-520.

L'intégrale (1) démontre que les *franges d'interférence* de deux ou plusieurs rayons de ma théorie suivent toujours les lignes de force. Ce phénomène résulte de la propriété de ces rayons, que, selon l'équation (3), la vitesse de leur surface d'onde est proportionnelle au cosinus de l'angle entre la direction de la normale et de la force statique électrique.

Pour trouver un cas où l'intégrale (1) ne représente pas des franges d'interférence ou un procès encore plus compliqué, mais où elle représente en effet, un *rayon simple, il faut considérer non seulement la variable* θ, *mais aussi les forces oscillantes*, qui suivent dans une intégrale générale d'autres lois que θ.

Une intégrale ne représente un rayon que sous les conditions suivantes : 1° que toutes les variables ont les mêmes surfaces d'onde φ_1; 2° qu'entre leurs amplitudes et leurs phases existent des relations simples; 3° qu'on ne peut pas décomposer l'intégrale en deux ou plusieurs composantes, qui sont évidemment des rayons simples.

Considérons le cas que toutes les variables sont indépendantes de y, et transformons les équations différentielles de ma théorie dans un système de coordonnées y, φ, ψ. où ψ sont les surfaces équipotentielles, et φ les surfaces de la fonction conjuguée de force. Soient Ψ_0 la force statique électrique et M_0 proportionnel à la force statique magnétique qui a la direction y. Alors il suffit de considérer les forces oscillantes Ψ, Φ (électriques) et M (magnétique), parce qu'avec celles-là les autres composantes ne sont pas cohérentes. On a les équations

$$k\theta = \frac{1}{m^2}\frac{\partial m\Psi}{\partial \psi} + \frac{1}{m^2}\frac{\partial m\Phi}{\partial \varphi},$$

$$\varepsilon_0 \frac{\partial m\Phi}{\partial t} = \frac{\partial M}{\partial \psi},$$

$$\varepsilon_0 \frac{\partial m\Psi}{\partial t} + k_1\theta = -\frac{\partial M}{\partial \varphi},$$

$$\mu_0 \frac{\partial M}{\partial t} + M_0\theta = \frac{1}{m^2}\frac{\partial m\Phi}{\partial \psi} - \frac{1}{m^2}\frac{\partial m\Psi}{\partial \varphi},$$

où $m = \frac{k_1}{\Psi_0}$ est le coefficient de transformation. La forme nécessaire mais encore trop générale, des équations d'un rayon qui suit les lignes de force est

$$\theta = F(\varphi)\cos\lambda(t - \varphi_1), \qquad m\Psi = \rho_2 F_2(\varphi)\cos\lambda(t - \varphi_1 - a_2) + k_1,$$

$$m\Phi = \rho_1 F_1(\varphi)\cos\lambda(t - \varphi_1 - a_1), \qquad M = \rho_3 F_3(\varphi)\cos\lambda(t - \varphi_1 - a_3) + M_0,$$

où a_1, a_2, a_3 sont des constantes, et ρ_1, ρ_2, ρ_3 sont des fonctions de m, qui correspondent à l'affaiblissement des rayons qui, en se propageant, s'élargissent comme les tubes de force.

En substituant ces formules dans les équations différentielles, on voit que les amplitudes F ne sont point arbitraires que pour des cas tout à fait exceptionnels. De plus, il est, en général, impossible de suffire à ces équations, quelles que soient les fonctions inconnues, ce qui veut dire que, dans un champ général, les rayons ne suivent jamais les lignes de force.

Pour le champ uniforme, on obtient, par exemple, que les amplitudes sont nécessairement constantes; quant à la direction des rayons, on ne peut alors rien en conclure. C'est de même que pour les rayons de Maxwell. Le cas $M_0 = 0$ et $\frac{\partial \varphi_1}{\partial \varphi} = 0$ est excepté; seulement, dans ce cas, les amplitudes sont arbitraires.

Pour un champ général, mais sous les conditions :

$$M_0 = 0, \qquad \frac{\partial m}{\partial \varphi} = 0, \qquad \frac{\partial \varphi_1}{\partial \varphi} = 0,$$

on peut donner une intégrale qui représente un rayon qui suit une ligne distinguée de force. On a

$$\Theta = C\cos\lambda(t - \varphi_1), \qquad m\Psi = C_1\sin\lambda(t - \varphi_1) + k_1, \qquad \Phi = M = 0.$$

où C et C_1 sont des constantes. Cette intégrale démontre qu'un rayon peut se propager exactement dans la ligne de force de longueur maximum ou minimum $\left(\text{où l'on a } \frac{\partial m}{\partial \varphi} = 0\right)$ si sa surface d'onde

reste normale à cette ligne de force $\left(\frac{d\varphi_1}{d\varphi} = 0\right)$ et s'il n'est pas dévié par une force magnétique

$$(M_0 = 0).$$

C'est pourquoi je crois que les rayons ne sont pas rectilignes dans le voisinage de la cathode [1]. Or, c'est conforme aux faits, les rayons cathodiques suivant, en effet, dans le voisinage de la cathode à peu près les lignes de force, s'ils ne sont pas déviés par l'aimant.

L'intégrale (1) que M. Poincaré a donnée est très importante pour ma théorie, mais on ne peut en tirer aucune objection. Les rayons ne suivent pas les lignes de force, et il n'y a aucune raison pour qu'ils ne soient déviés par l'aimant. Toujours ce n'est pas sûr que les surfaces d'onde soient normales à la direction du rayon. Donc on ne sait pas jusqu'à présent en quelle proportion la surface d'onde ou la direction des oscillations est déviée par l'aimant. Mais la déviation magnétique de la direction du rayon est sans doute donnée par ma théorie, même avec les exceptions constatées par l'expérience.

Observations au sujet de la Communication précédente [2].

Si M. Jaumann n'a pas pu satisfaire aux équations différentielles avec ses formules, c'est qu'il a tenu, je ne sais pourquoi, à ce que α_1, α_2, α_3 soient des constantes tandis que ce sont des fonctions de φ_2 et de φ_3 (ou de φ dans le cas particulier qu'il traite). Si, par définition, il appelle *rayon simple* les radiations telles que α_1, α_2, α_3 soient des constantes, et *frange d'interférence* celles pour lesquelles α_1, α_2, α_3 ne sont pas des constantes; alors il ne peut pas y avoir de rayon simple en général.

Mais ces définitions importent peu. L'expérience montre que l'on peut, par exemple, à l'aide d'un écran percé d'un trou, circonscrire une surface-canal très déliée, à l'intérieur de laquelle les phénomènes appelés *rayons cathodiques* se manifestent, tandis qu'ils ne se manifestent pas à l'extérieur. *C'est l'axe de cette surface-canal que j'appelle rayon.* L'expérience montre que cet axe est rectiligne si l'on ne fait pas intervenir l'aimant.

Il faut donc que les équations soient telles qu'on puisse y satisfaire si toutes les quantités sont sensiblement nulles, sauf dans le voisinage immédiat d'une certaine courbe; c'est, en effet, ce qui arrive avec les équations de M. Jaumann. Malheureusement, cette courbe, comme le montre l'intégration des équations, est une ligne de force et non une droite comme l'expérience l'exigerait.

---

(1) Pour des lieux plus éloignés où M' s'affaiblit, l'équation (2) n'est plus juste avec une approximation suffisante.

(2) Observations de H. Poincaré (*C. R. Acad. Sc.*, t. 122, [illegible] mars 1896, p. [illegible]).

Déviation électrostatique des rayons cathodiques. Réponse à M. H. Poincaré. Note de M. G. Jaumann, présentée par M. Poincaré [1]. — Dans ses observations (*Comptes rendus* du 2 mars 1896), M. H. Poincaré ne tient plus à sa première objection, que ma théorie ne donnerait pas la déviation magnétique des rayons cathodiques. Ainsi, il n'y a pas de différence entre nous sur les conséquences de ma théorie.

Il ne reste qu'à démontrer pourquoi a_1, a_2, a_3 doivent être des constantes. C'est nécessaire, parce que tout rayon doit avoir des surfaces d'onde. Quand a_1, a_2, a_3 ne seraient pas des constantes, les surfaces d'onde des oscillations électriques auraient une *autre forme* que les surfaces d'onde de la variable Θ ou des oscillations magnétiques, ce que personne ne pourrait nommer un *rayon*.

Je consens à la méthode du surface canal, que M. Poincaré propose. Mais je ne connais jusqu'à présent aucune intégrale pour un champ non uniforme qui, en rendant compte de toutes les variables et de tout l'espace considéré, représenterait un phénomène quelconque à l'intérieur de la surface-canal, tandis qu'à l'extérieur du canal les oscillations seraient sensiblement nulles.

La seconde objection de M. Poincaré tire à une conséquence évidente de ma théorie. Il n'accepte pas ma théorie parce qu'elle indique que (sans intervention de l'aimant) les rayons cathodiques suivent les lignes de force électrique statique, bien que l'expérience démontre que ces rayons sont rectilignes.

Or, ça, j'ai réussi, il n'y a pas longtemps, des expériences qui expliquent d'une manière toute nouvelle pourquoi les rayons cathodiques sont à peu près rectilignes. Je viens de communiquer ces expériences dans les *Stizungsberichte de l'Académie de Vienne* du 23 avril 1896, et j'ai l'honneur d'en donner ici le résumé : j'ai toujours prétendu [2] que (sans intervention de l'aimant) l'axe des rayons de ma théorie, où les oscillations sont purement longitudinales, suit les lignes de force électrique statique. D'après cela, quand les rayons cathodiques sont rectilignes, il faut conclure que la surface de verre du tube évacué est tellement chargée que les lignes de force sont rectilignes. Ce sont les rayons cathodiques eux-mêmes qui, en toutes circonstances et par une loi bien profonde, chargent le verre en cette manière, c'est-à-dire qui ont le pouvoir de se tendre en ligne droite. Cette tension ne prend qu'un temps très court, si l'on emploie, comme tous les autres observateurs l'ont préféré, des rayons cathodiques de grande intensité. Mais les rayons très faibles se dressent déjà en 0,2 à 1 seconde.

La meilleure méthode (mais non pas la seule méthode) pour affaiblir les rayons est la suivante : on submerge le tube, qui est fortement évacué et sans anode, dans de l'huile ordinaire, bien peu isolante, en enfonçant aussi une anode dans l'huile à une distance de 1^{cm} à 2^{cm} du tube. Il est nécessaire de charger les électrodes par une machine à influence, non pas par une bobine de Ruhmkorff.

Ces rayons faibles sont déviés très fortement par des forces électrostatiques. Un bâton de verre frotté, agité à une distance de 50^{cm} du tube dévie les rayons. Un bâton d'ébonite les dévie en sens contraire. Des conducteurs chargés les dévient dans les sens correspondants. Mais l'intention des rayons de se tendre en ligne droite donne à ces déviations électrostatiques le caractère des phénomènes d'induction : pendant qu'on agrandit la force électrostatique déviante, les rayons sont déviés, pour se dresser eux-mêmes en 0,2 à 1 seconde. Tant que la force déviante reste grande, mais constante, les rayons restent rectilignes. Quand on affaiblit la force déviante à sa valeur initiale, les rayons font leur inclinaison en sens contraire et se dressent de nouveau en 0,2 à 1 seconde. Il est très remarquable que (et de quelle manière) ces déviations sont accompagnées par des variations d'intensité des rayons cathodiques.

Le sens de ces déviations électrostatiques est *inverse* à celui qu'on aurait pu attendre. Le rapprochement de la cathode de corps électrisés négativement (ou l'éloignement des corps positifs, etc.) attire les rayons, ce qui ne démontre que le fait qu'on connaît mal le signe d'une partie quelconque des phénomènes à l'intérieur du tube.

J'ajouterai aussi que les anciennes expériences de MM. Crookes et Goldstein, qui démontrent

---

[1] *C. R. Acad. Sc.*, t. 122, 4 mai 1896, p. 988-990.

[2] Voir *Sitzungsberichte de l'Académie de Vienne*, 4 juillet 1895, p. 786; *Wied. Ann.*, t. XLVII, p. 178; *C. R. Acad. Sc.*, t. 122, 13 janvier 1896, p. 75, et t. 122, 2 mars 1896, p. 519.

des réflexions *persistantes* des rayons exercées par des *électrodes*, s'expliquent comme des déviations électrostatiques (*stationnaires*). En ces cas, l'effet des rayons, qui charge le verre du tube, ne peut pas tendre en ligne droite les lignes de force, par exemple, parce que cet effet est stationnairement paralysé par la charge affluente de l'électrode déviante.

Observations au sujet de la Communication de M. Jaumann (1).

M. Jaumann est conduit à supposer que les lignes de force sont rectilignes à l'intérieur d'un tube de Crookes. Hertz avait cru pouvoir tirer de certaines expériences une conclusion contraire (Cf. *Wied. et Ann.*, t. XIX). Je ne veux pas insister sur cette question, que les expérimentateurs pourront seuls trancher ; mais je tiens à faire observer que je n'ai nullement renoncé à l'objection tirée de la déviation magnétique des rayons cathodiques.

(1) Réponse de H. Poincaré (*C. R. Acad. Sc.*, t. 122, 4 mai 1896, p. 990).

OBSERVATIONS

AU SUJET DE LA COMMUNICATION DE M. J. PERRIN : « QUELQUES PROPRIÉTÉS DES RAYONS DE RÖNTGEN » [1]

Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. 122, p. 188 (27 janvier 1896).

M. Röntgen avait déjà reconnu que les rayons X ne se réfractent pas ; il avait expérimenté avec des prismes formés de différentes matières ; une seule fois, il a cru observer une légère déviation correspondant à un indice de 1,05, mais cette observation reste douteuse.

Il a vu également que ces rayons ne subissent pas de réflexion régulière, mais il croit qu'ils peuvent éprouver une réflexion irrégulière avec diffusion.

---

(1) *Résumé de la Note de M. J. Perrin* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 122, 1896, p. 186-188). — M. J. Perrin rapporte dans cette Note les résultats d'une série d'expériences sur les rayons de Röntgen. Celles-ci montrent notamment que les rayons de Röntgen qui ne sont pas des rayons cathodiques, sont capables d'impressionner une plaque photographique en traversant certains corps interposés opaques aux rayons lumineux, les métaux étant en général moins transparents que les autres corps essayés sans présenter toutefois une opacité absolue. La propagation de ces rayons est rectiligne. Des essais de réflexion sur un miroir d'acier, de réfraction par des prismes de paraffine ou de cire, de diffraction par une fente étroite ne donnent aucun résultat. Ces expérienees conduisent à conclure que « ... si donc le phénomène est périodique, la période est très inférieure à celle de la lumière verte employée ... ». Des expériences effectuées sur des êtres vivants montrent que ces rayons permettent d'obtenir des clichés représentant l'ossature et quelques organes internes des animaux examinés (grenouille, pleuronecte, etc.).

M. J. Perrin devait développer ces expériences dans des travaux ultérieurs et les exposer notamment dans sa Thèse de Doctorat ès Sciences du 14 juin 1897 : *Rayons Cathodiques et Rayons de Röntgen. Étude expérimentale* (*Ann. Chim. et Phys.*, t. 11, 1897, p. 496 ; *Œuvres Scientifiques de J. Perrin*, p. 9-51).

OBSERVATIONS

AU SUJET DE LA COMMUNICATION DE M. G. DE METZ :

« PHOTOGRAPHIE

À

L'INTÉRIEUR DU TUBE DE CROOKES »[1]

(*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. 122, p. 881 (20 avril 1896).

Les photographies présentées par M. de Metz ne semblent pas démontrer d'une façon irréfutable que les rayons cathodiques jouissent des propriétés essentielles des rayons de Röntgen. Les rayons cathodiques, en frappant le platine ou l'aluminium qui recouvrent les plaques sensibles de M. de Metz, doivent provoquer l'émission de rayons X qui traversent *ensuite* les plaques métalliques.

(1) *Résumé de la Note de M. de Metz* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 122, 1896, p. 880-881). — M. G. de Metz présente à l'examen de l'Académie deux photographies obtenues à l'intérieur du tube de Crookes et apparemment dues à l'action des rayons cathodiques.

OBSERVATIONS

AU SUJET DE LA COMMUNICATION DE M. G. DE METZ :

« PHOTOGRAPHIE

A

L'INTÉRIEUR DU TUBE DE CROOKES » [1]

Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. 123, p. 356 (10 août 1896).

Il y aurait lieu, pour interpréter cette expérience, de vérifier si le carton frappé par les rayons cathodiques émet, comme d'autres corps, des rayons X.

Il faudrait également répéter l'expérience en réservant un plus grand intervalle entre les lames absorbantes et en faisant varier cet intervalle. En effet, les rayons X émis par ces lames et envoyés dans toutes les directions troublent les phénomènes et expliquent sans doute les divergences signalées par M. de Metz.

(1) ***Résumé de la Note de M. de Metz*** (*C. R. Acad. Sc.*, t. 123, 1896, p. 354-355). — M. G. de Metz présente une nouvelle série de photographies obtenues à l'intérieur du tube de Crookes par l'action des rayons cathodiques n'ayant traversé qu'un couvercle de carton mince avant d'atteindre la pellicule sensible.

REMARQUES

SUR UNE EXPÉRIENCE DE M. BIRKELAND

Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. 123, p. 530-533 (5 octobre 1896).

M. Birkeland, en soumettant un tube de Crookes à l'action d'un aimant très puissant, a observé certains phénomènes nouveaux, qu'il était tenté d'attribuer à une sorte d'attraction ou de répulsion que les pôles magnétiques exerceraient sur les rayons cathodiques (*Archives des Sciences physiques et naturelles de Genève*, t. I, 4e période, juin 1896). Si un faisceau parallèle de rayons cathodiques est soumis à l'action d'un aimant rectiligne dont l'axe est parallèle à leur direction, ce faisceau devient convergent, et si la distance de l'aimant est convenable, il est concentré en un foyer très net, au point de fondre le verre en très peu de temps.

Ce qui donne à cette observation son caractère paradoxal, c'est que les phénomènes ne changent pas quand on renverse les pôles de l'aimant.

Cependant, en y réfléchissant un peu, on voit que tout peut s'expliquer sans faire intervenir aucune hypothèse nouvelle. Prenons l'axe des z parallèle au faisceau et passant par le pôle de l'aimant; considérons un rayon cathodique se dirigeant vers les z positifs; je le suppose situé dans le plan des xz du côté des x positifs; la force magnétique aura deux composantes, l'une Z parallèle à l'axe des z et dirigée vers les z positifs; elle est d'abord sans action; l'autre X parallèle à l'axe des x et dirigée vers les x négatifs; elle produit une déviation du rayon vers les y positifs par exemple; le rayon ainsi dévié a maintenant une composante η, parallèle à l'axe des y. La composante Z a alors une action sur cette composante η et produit une déviation du rayon vers les x négatifs; *d'où il résulte que le faisceau devient convergent.*

Si l'on renverse les pôles de l'aimant, la composante X et par conséquent la composante η changent de signe; mais, comme la composante Z a également changé de signe, le rayon est toujours dévié vers les x négatifs et le faisceau reste convergent. Si, au contraire, on considère un faisceau *s'éloignant* de l'aimant, la même discussion prouve que, sous l'influence des mêmes causes, il devient divergent, ce qui est conforme aux expériences de M. Birkeland.

Une discussion plus approfondie est nécessaire. Pour cela, nous écrirons les équations du rayon cathodique, en l'assimilant à une particule matérielle en mouvement rapide, chargée d'électricité; si l'hypothèse de Crookes n'est pas vraie, il semble bien que tout se passe comme si elle l'était.

Supposons un seul pôle magnétique, que nous prendrons pour l'origine en conservant le même axe des z. Les équations s'écriront

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\lambda}{r^3}\left(y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt}\right),$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{\lambda}{r^3}\left(z\frac{dx}{dt} - x\frac{dz}{dt}\right),$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{\lambda}{r^3}\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right),$$

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2;$$

où λ est un coefficient constant qui dépend de l'intensité de l'aimant et de la nature du rayon cathodique (c'est-à-dire, dans l'hypothèse de Crookes, de la masse de la particule matérielle en mouvement et de sa charge électrique.

On trouve aisément

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = C,$$

$$r^2 = Ct^2 + 2Bt + A.$$

A, B et C étant trois constantes d'intégration.

On trouve ensuite

$$y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt} = \frac{-\lambda x}{r} + a,$$

$$z\frac{dx}{dt} - x\frac{dz}{dt} = \frac{-\lambda y}{r} + b,$$

$$x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = \frac{-\lambda z}{r} + c.$$

a, b, c étant trois nouvelles constantes d'intégration liées aux trois premières par une relation simple.

On tire de là

$$ax + by + cz = \lambda r,$$

ce qui prouve que le rayon reste sur un cône de révolution.

Comme l'accélation est perpendiculaire à la vitesse et à la génératrice de ce cône, elle est normale au cône; d'où l'on doit conclure que *le rayon suit une ligne géodésique de ce cône de révolution.*

En émanant de la cathode, loin de l'action de l'aimant, le rayon est sensiblement rectiligne et parallèle à l'axe des z; il a donc une asymptote rectiligne parallèle à l'axe des z.

Soient

$$x = x_0, \qquad y = y_0$$

les équations de cette asymptote, V la vitesse du rayon. On aura

$$C = V^2; \qquad a = y_0 V; \qquad b = -x_0 V; \qquad c = \lambda.$$

L'axe des z est donc une des génératrices du cône et le demi-angle au sommet du cône a pour sinus

$$\sin\omega = \frac{V}{\lambda}\sqrt{x_0^2 + y_0^2}.$$

La plus courte distance du rayon cathodique à l'origine est égale à

$$\sqrt{x_0^2 + y_0^2}.$$

Cela posé, remarquons que le rayon cathodique rencontrera l'axe des z en des points dont la distance à l'origine est

$$\frac{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}}{\sin\varphi}, \quad \frac{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}}{\sin 2\varphi}, \quad \frac{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}}{\sin 3\varphi}, \quad \ldots.$$

L'angle φ est le développement total du cône, c'est-à-dire

$$\varphi = 2\pi\sin\omega.$$

Remarquons toutefois que la rencontre n'a pas lieu dans la partie utile si

$$\varphi > \pi, \qquad \sin\omega > \frac{1}{2}.$$

De même, les seules rencontres effectives sont celles qui correspondent aux multiples de φ plus petits que π.

Qu'arrive-t-il alors? La cathode a la forme d'un disque circulaire de rayon ρ.

Supposons qu'on règle la distance de l'aimant au tube de telle façon que l'un des rayons émanés du bord du disque (et tel par conséquent que $x_0^2+y_0^2=\rho^2$) vienne rencontrer l'axe des z précisément au point où cet axe perce la paroi du tube. Tous les autres rayons émanés du bord du disque viendront, par raison de symétrie, passer par ce même point; le rayon central qui est rectiligne et suit l'axe des z y passera également; les rayons intermédiaires ne s'en écarteront que fort peu, de sorte que tous les rayons paraîtront concentrés comme au foyer d'une lentille.

Chaque système de rayons pourra donner plusieurs foyers correspondant aux divers multiples de φ plus petits que π; de plus il y a, comme M. Birkeland l'a montré, plusieurs espèces de rayons cathodiques, correspondant à plusieurs valeurs de λ. M. Birkeland a en effet constaté plusieurs foyers qui paraissent plutôt dus à la seconde de ces causes.

Comment se comportent alors ceux des rayons cathodiques pour lesquels λ a une valeur trop grande pour qu'il se forme des foyers? On peut d'abord penser que la distance r, après avoir décru jusqu'à un certain minimum, croît ensuite de nouveau et que ce sont eux qui produisent les anneaux lumineux observés par M. Birkeland sur la paroi latérale du tube. Mais une difficulté se présente. D'après la théorie, pour les rayons émanés normalement du plan du disque de la cathode, le minimum de r est $\sqrt{x_0^2+y_0^2}$; il ne devrait donc se former d'anneaux lumineux latéraux que quand la distance du pôle magnétique au tube est plus petite que le rayon du disque. Est-ce que la théorie est incomplète, parce que nous avons supposé un pôle magnétique unique; ou bien plutôt les anneaux lumineux sont-ils dus à des rayons émanés obliquement du *bord* du disque et correspondant à une grande valeur de λ?

LES RAYONS CATHODIQUES

ET

LA THÉORIE DE JAUMANN

L'Éclairage électrique, t. 9, p. 241-251 (7 novembre 1896).

On a tenté de bien des manières d'expliquer les phénomènes présentés par les rayons cathodiques.

La théorie anglaise, d'après laquelle ces rayons seraient de simples courants de molécules gazeuses électrisées, rend bien compte d'un certain nombre de faits; cependant elle n'a généralement pas été adoptée par les savants allemands qui préfèrent voir dans ces phénomènes un mouvement ondulatoire de l'éther.

Wiedemann et Hertz étaient disposés à voir dans les rayons cathodiques des vibrations transversales de l'éther, des radiations ultra-ultraviolettes, c'est-à-dire de la lumière. Dans cette manière de voir, la déviation magnétique paraît bien difficile à expliquer.

Aussi cette théorie soulève-t-elle bien des difficultés et il est assez naturel qu'on ait cherché à les éviter en attribuant les phénomènes cathodiques à des vibrations longitudinales.

M. Jaumann a proposé, dans cet ordre d'idées, une théorie que je voudrais exposer et discuter ici.

Bien que cette théorie sous sa forme actuelle ne me paraisse pas soutenable, les expériences sur lesquelles leur auteur a cherché à l'établir présentent un assez grand intérêt; ces expériences sont relatées dans deux Mémoires, le premier a paru d'abord dans les *Comptes rendus de l'Académie de Vienne*, puis dans le tome LVII des *Annalen der Physik und Chemie;* le second, où sont

exposées les expériences entreprises par M. Jaumann à la suite de la polémique que j'avais eue avec lui [1], a paru dans le tome X des *Comptes rendus de l'Académie de Vienne* (avril 1896).

Influence des radiations sur l'étincelle.

M. Jaumann a appuyé sa théorie sur deux ordres de preuves : la première preuve est tirée de l'effet produit par les rayons cathodiques sur l'étincelle électrique et se rattache à d'autres travaux du même auteur publiés en 1888 dans le tome XCVII des *Comptes rendus de l'Académie de Vienne*, et qui ont pour objet l'influence de variations périodiques de la force électrique sur la décharge disruptive.

D'après ses expériences, la distance explosive ne dépendrait pas seulement de la différence de potentiel E des deux conducteurs entre lesquels doit jaillir l'étincelle, mais de la dérivée $\frac{dE}{dt}$. En première approximation, cette distance explosive serait fonction du produit $E\frac{dE}{dt}$.

Il convient de faire quelques réserves au sujet de la loi ainsi énoncée; les résultats de M. Jaumann ont été contestés par M. Swyngedauw [2]. Je ne veux pas prendre parti dans cette polémique, car de nouvelles expériences finiront sans doute par trancher la question.

Quoi qu'il en soit, M. Jaumann tire de cette loi diverses conséquences. Soit M un point très voisin de la surface d'un conducteur; M' le point de cette surface qui est le point le plus rapproché du point M; de telle façon que la droite MM' soit normale à cette surface.

Soit E la différence de potentiel entre les deux points M et M'. La facilité avec laquelle l'étincelle jaillira du point M' dépendra du produit $E\frac{dE}{dt}$.

Mais E n'est ici autre chose que la composante de la force électrique dirigée suivant la droite MM', c'est-à-dire normale à la surface du conducteur.

La facilité de l'explosion dépend donc de cette composante normale et de ses variations. On pourra donc provoquer l'étincelle en produisant des variations rapides de la composante normale de la force électrique.

---

(1) Voir *L'Éclairage électrique*, t. V, 14 décembre 1895, p. 321; t. VI, 25 janvier 1896, p. 175 et t. VII, 16 mai 1896, p. 321; ce tome p. 299.

(2) Voir *L'Éclairage électrique*, t. VII, 23 mai 1896, p. 370.

Ce serait pour cette raison que la lumière ultraviolette facilite l'étincelle : car la lumière, d'après la théorie de Maxwell, n'est autre chose qu'une variation périodique très rapide du champ électromagnétique et en particulier de la force électrique.

Il s'agit toutefois d'expliquer pourquoi cette propriété est spéciale aux rayons ultraviolets ; la formule de M. Jaumann en rend compte en partie, puisque plus les vibrations sont rapides, plus à amplitude égale le facteur $\frac{dE}{dt}$ est grand. Les rayons hertziens peuvent aussi avoir une action ; mais comme ils sont beaucoup plus lents, leur amplitude doit être beaucoup plus grande pour que cette action soit sensible.

Mais cette théorie est susceptible d'une vérification plus précise. Les radiations doivent avoir une action maximum si la force électrique est normale à la surface conductrice, puisque c'est la composante normale de cette force qui est active. Pour parler de langage optique, le plan de polarisation qui est perpendiculaire à la force électrique doit être tangent à la surface du conducteur.

Les expériences de Wanka (1) ont vérifié cette conséquence en ce qui concerne les rayons hertziens.

Mais ce qui serait le plus intéressant, ce serait de la vérifier en ce qui concerne les rayons lumineux et ultraviolets.

Expériences de Elster et Geitel.

Hertz avait déjà essayé de voir comment l'influence des rayons ultraviolets sur l'étincelle varie avec l'orientation du plan de polarisation. La tentative a été reprise par MM. Wanka et Jaumann, mais toujours sans succès, à cause de la difficulté d'obtenir des rayons parallèles ultraviolets polarisés et suffisamment intenses.

La difficulté a été tournée par MM. Elster et Geitel (2) qui ont montré que les électrodes formées d'amalgames de métaux alcalins se comportent vis-à-vis de la lumière ordinaire comme les électrodes ordinaires vis-à-vis de la lumière ultraviolette.

Ces deux savants ont donc opéré dans l'air raréfié avec des électrodes en amalgames alcalins et *avec de la lumière visible*.

---

(1) *Mith. der deutschen math. Gesellschaft in Prag*, 1892.

(2) Voir *L'Éclairage électrique*, t. I, 29 septembre 1894, p. 134 ; t. IV, 10 août 1895, p. 378.

Ils ont reconnu que le « courant photoélectrique » est proportionnel à

$$A \cos^2 \alpha + B \sin^2 \alpha,$$

où $\frac{\pi}{2} - \alpha$ est l'angle du plan de polarisation et du plan d'incidence et où les coefficients A et B sont des fonctions de l'angle d'incidence i.

Si la composante normale de la force électrique agissait seule, et si les lois ordinaires de la propagation de la lumière étaient applicables, B devrait être nul et A devrait être proportionnel à $\sin^2 i$.

Le courant photoélectrique présente donc bien, comme il convient, un maximum quand le plan de polarisation et celui d'incidence sont perpendiculaires entre eux et un minimum quand ces deux plans sont parallèles. Mais ce minimum, qui devrait être nul, ne l'est pas quoiqu'il décroisse rapidement quand l'angle d'incidence augmente.

Cette divergence n'a pas étonné M. Jaumann. Des considérations théoriques, dont nous aurons plus loin à apprécier la valeur, l'avaient conduit en effet à admettre que dans l'air raréfié la lumière est toujours accompagnée d'une composante longitudinale (ce qui d'ailleurs devrait être vérifiable, en étudiant la réflexion de la lumière polarisée à l'intérieur du tube de Crookes sur le verre de l'ampoule).

C'est à cette composante longitudinale hypothétique que M. Jaumann attribue la présence du terme $B \sin^2 \alpha$. Mais il ne cherche pas à se rendre compte des variations de A et de B en fonction de i.

Application aux rayons cathodiques.

Admettant, d'après ces données, l'exactitude de la loi de décharge énoncée plus haut, M. Jaumann se trouve en possession d'un moyen de déterminer la direction d'une vibration électrique.

Lenard ayant montré que les rayons cathodiques provoquent la décharge disruptive, M. Jaumann en conclut que ces rayons sont dus à une vibration électrique.

Comme, d'autre part, cette action est maximum quand les rayons cathodiques sont normaux à l'électrode, on doit conclure, si l'on admet ses prémisses, que ces rayons sont dus à des ondes longitudinales.

Phénomènes d'interférence.

La seconde preuve invoquée par M. Jaumann est fondée sur certaines apparences que ce physicien attribue à une sorte d'interférence. Voici en quoi consistent ces apparences :

La cathode étant formée d'une sphère montée sur une sorte de manche, M. Jaumann a remarqué dans l'angle rentrant compris entre la sphère et le manche une région où la lueur cathodique bleue prenait un éclat beaucoup plus grand.

Cette région est très mince, et se réduit presque à une surface géométrique. Cette surface, que M. Jaumann appelle *surface d'interférence*, a dans le cas qui nous occupe, la forme d'un cône de révolution dont la génératrice est la bissectrice de l'angle rentrant formé par la sphère et son manche.

Si l'on emploie deux cathodes l'une plane, l'autre filiforme placée parallèlement au plan de la première, la surface d'interférence est un cylindre parabolique, et la parabole, section droite de ce cylindre, a son foyer sur l'électrode filiforme et sa directrice sur l'électrode plane.

Avec deux cathodes planes, la surface se réduit au plan bissecteur.

En résumé ces surfaces d'interférences sont le lieu des points également distants des deux cathodes. Elles sont déviées par l'aimant comme le seraient des rayons cathodiques. Les rayons cathodiques, issus normalement des deux cathodes, se courbent en se rencontrant dans la surface d'interférence et poursuivent leur course le long de cette surface.

M. Jaumann a employé ensuite deux cathodes planes parallèles, distantes de 1^{cm}. La surface d'interférence, si la pression est assez basse, se réduit à un plan équidistant des deux cathodes et le long duquel les rayons cathodiques se propagent dans toutes les directions.

Influence d'une différence de phase.

Joignons les deux cathodes par deux fils différents au pôle négatif d'une machine à influence et intercalons un interrupteur à étincelles.

La surface d'interférence subsistera et conservera sa minceur et sa netteté *tant que les deux fils auront même longueur*. Mais dès que la différence de

longueur est de 10^{cm}, on voit la région d'interférence s'épaissir. Si la différence de marche devient plus grande, la lueur bleue remplit bientôt tout l'espace compris entre les deux plaques et finalement se réduit à une couche contiguë à celle des deux plaques dont le fil conducteur est le plus court.

Les ondes électriques, dues à la présence de l'interrupteur à étincelles, doivent donc, pour former une surface d'interférence nette, avoir exactement la même phase. M. Jaumann juge que la longueur de ces ondes doit être à peu près 10 fois la différence de marche pour laquelle la surface d'interférence commence à s'épaissir, c'est-à-dire de 0,5 m à 1 m.

La surface d'interférence épaissie correspondrait à une sorte de « spectre de surfaces d'interférence » dues à des rayons cathodiques de longueur d'onde variable.

Preuves de la nature longitudinale des vibrations.

Comment M. Jaumann conclut-il des observations que je viens de relater à la nature longitudinale des vibrations?

En premier lieu, la valeur qu'il attribue à la longueur d'onde pour les raisons que j'ai dites plus haut, lui donne pour la durée de vibrations 10^{-8} à 10^{-9} secondes. Si les rayons cathodiques ont cette durée de vibration, ils ne peuvent être comme le croyait Wiedemann, de la lumière ultra-ultraviolette; ils ne peuvent être des ondes transversales, sans quoi ils seraient identiques aux rayons hertziens.

En second lieu, les rayons cathodiques se montrent toujours plus intenses dans l'axe de symétrie du tube; de simples raisons de symétrie doivent donc amener à les regarder comme longitudinaux.

Discussion.

Cet exposé suffira sans doute pour faire voir que M. Jaumann a tiré de ses expériences des conclusions prématurées; mais ces expériences, et en particulier celles qu'il attribue à des phénomènes d'interférence, semblent extrêmement intéressantes et il y a lieu d'en discuter l'interprétation.

Il peut être curieux de les rapprocher d'une observation dont j'ai été témoin et qui a été faite par M. Deslandres. La cathode avait la forme d'un demi-

cylindre de révolution placé de telle manière que l'axe de ce cylindre et son prolongement ne s'écartaient pas beaucoup de la paroi du tube; la hauteur du cylindre pouvait être de $1^{cm},5$, son rayon de 3^{cm}; la portion de la paroi voisine de son axe et de son prolongement s'illuminait vivement, non seulement à la hauteur de la cathode mais à 5 ou 6^{cm} au-dessus et au-dessous. Il y a sans doute là un phénomène de déviation des rayons cathodiques analogue à ceux que je viens de décrire; de nouvelles expériences pourront seules permettre de se prononcer sur ce point.

D'un autre côté, cette déviation des rayons cathodiques qui se produit dans ces « surfaces d'interférence » fait penser tout de suite à la déflexion électrostatique » observée par Goldstein, ou bien encore à la répulsion apparente des rayons cathodiques observée par Crookes.

Voyons maintenant dans quelle mesure on est fondé à voir dans ces apparences une véritable interférence.

Cherchons pour cela à leur appliquer les formules ordinaires des interférences. Soit τ la période des vibrations, t le temps; soient $\lambda + x$ et $\lambda - x$ les distances du point envisagé aux deux cathodes; α ou β les longueurs des deux fils conducteurs, V et W les vitesses de propagation de la perturbation dans l'air raréfié et dans les fils.

Le déplacement dû au rayon émané de la première cathode sera

$$A \sin \frac{2\pi}{\tau}\left(t - \frac{\alpha}{W} - \frac{\lambda + x}{V}\right)$$

et celui qui est dû au rayon de la deuxième cathode sera

$$A \sin \frac{2\pi}{\tau}\left(t - \frac{\beta}{W} - \frac{\lambda - x}{V}\right).$$

Le déplacement total sera :

$$2A \sin \frac{2\pi}{\tau}\left(t - \frac{\alpha + \beta}{2W} - \frac{l}{V}\right) \cos \frac{2\pi}{\tau}\left(\frac{\alpha - \beta}{2W} + \frac{x}{V}\right)$$

et l'intensité du rayon résultant sera :

$$4A^2 \cos^2 \frac{2\pi}{\tau}\left(\frac{\alpha - \beta}{2W} + \frac{x}{V}\right).$$

Si les deux conducteurs sont égaux, $\alpha = \beta$; et cette expression se réduit à

$$(1) \qquad 4A^2 \cos^2 \frac{2\pi x}{\tau V}.$$

Cette expression présente en effet un maximum pour $x = 0$; et le lieu des

point où ce maximum est atteint correspond à la « surface d'interférence » de M. Jaumann. Mais dans le voisinage de ce maximum, ainsi qu'il arrive d'ailleurs pour tous les maxima, les variations de la fonction sont très lentes. Au lieu d'une surface d'interférence mince et nettement tranchée, on aurait un maximum à peine marqué.

A vrai dire, les franges d'interférence ordinaires présentent des maxima bien nets; les variations de la fonction (1) peuvent être en effet assez rapides, mais à la condition que τ soit très petit; mais s'il en était ainsi, nous devrions observer entre les deux cathodes un grand nombre de maxima.

En résumé, les apparences observées ne peuvent pas être représentées par la fonction (1); elles pourraient l'être par la fonction

$$\frac{\alpha}{x^2+\beta}, \tag{1 bis}$$

où α et β sont deux constantes très petites.

Supposons maintenant que les deux conducteurs soient inégaux et que $\alpha \gtrless \beta$. Le maximum sera alors atteint pour

$$x = \frac{\beta - \alpha}{2}\frac{V}{W}.$$

On voit que cette expression de x est indépendante de τ, c'est-à-dire de la période. Si donc on suppose qu'on ait une superposition de divers rayons cathodiques de période différente, la surface d'interférence serait déplacée de la même quantité pour chacun d'eux; la surface observée ne serait donc que déplacée et non pas élargie.

A moins qu'on n'admette que ces rayons ne se propagent pas avec la même vitesse et que V dépend de τ. Cette hypothèse n'aurait du reste rien d'absurde.

Mais ce n'est pas tout. Dans la surface d'interférence, les rayons ne sont pas seulement rendus plus intenses, mais ils sont déviés, de sorte qu'ils vont exciter des régions où ils ne pénétreraient pas s'il n'y avait qu'une seule cathode. On ne comprendrait pas qu'un point du tube fût atteint par une perturbation résultante qui, dans l'hypothèse des interférences, serait la simple superposition de deux composantes dont aucune séparément n'atteindrait ce point.

En résumé, *l'assimilation de ces phénomènes aux interférences n'est pas justifiée;* ils semblent n'être qu'une forme nouvelle de la déviation électrostatique observée par Goldstein et Crookes. Les rayons cathodiques émanés de l'une des cathodes sont déviés par la répulsion de l'autre cathode et forcés de

prendre une autre direction; sur les deux cathodes le potentiel est le même, il est négatif et très grand; si l'on va de l'une à l'autre, il croît d'abord (en valeur relative) jusqu'à un certain maximum, pour décroître ensuite. Pour raison de symétrie, ce maximum doit être atteint à mi-chemin des deux cathodes.

Les rayons s'éloignent de l'une des cathodes et continuent leur chemin tant que le potentiel croît; quand il recommence à décroître, ils sont déviés, d'où il résulte une concentration de ces rayons dans la région où le maximum du potentiel est atteint. C'est cette région qui constitue la soi-disant surface d'interférence.

Qu'arrive-t-il alors quand les deux cathodes sont reliées à la bobine par deux fils de longueur différente?

La perturbation électrique étant périodique, les potentiels des deux cathodes varieront périodiquement; mais comme il y a une différence de marche, ces deux potentiels n'atteindront pas leur maximum en même temps; à un certain moment de la période, le potentiel de la première cathode sera plus grand que celui de la seconde, à un autre moment ce sera le contraire.

Soient alors V_1 et V_2 les potentiels des deux cathodes à un instant quelconque; $\lambda + x$ et $\lambda - x$ les distances du point considéré aux deux cathodes.

Lorsque x variera de $-\lambda$ à $+\lambda$, le potentiel variera de V_1 à V_2 mais en passant par un maximum. Ce maximum sera atteint pour $x = x_0$. Mais cette fois, comme V_1 n'est pas égal à V_2, il n'y a plus de raison pour que $x_0 = 0$.

Si $V_1 > V_2$, on aura $x_0 < 0$; si au contraire $V_1 < V_2$, on aura $x_0 > 0$.

La « surface d'interférence » correspondra aux points tels que $x = x_0$.

Mais comme la différence $V_1 - V_2$ est variable et change de signe dans le courant de la période, x_0 oscillera entre certaines limites, par conséquent la surface d'interférence occupera des positions différentes aux divers instants de la période, de sorte que pour l'observateur elle semblera s'épaissir.

La théorie de M. Jaumann.

Écrivons les équations de Maxwell-Hertz sous la forme suivante :

$$(2)\quad \begin{cases} \dfrac{d}{dt}(\varepsilon X) = \dfrac{dM}{dz} - \dfrac{dN}{dy}, \\ \dfrac{d}{dt}(\varepsilon Y) = \dfrac{dN}{dx} - \dfrac{dL}{dz}, \\ \dfrac{d}{dt}(\varepsilon Z) = \dfrac{dL}{dy} - \dfrac{dM}{dx}; \end{cases}$$

et

$$(3)\quad \begin{cases} \dfrac{d}{dt}(\mu L) = \dfrac{dZ}{dy} - \dfrac{dY}{dz}, \\ \dfrac{d}{dt}(\mu M) = \dfrac{dX}{dz} - \dfrac{dZ}{dx}, \\ \dfrac{d}{dt}(\mu N) = \dfrac{dY}{dx} - \dfrac{dX}{dy}. \end{cases}$$

Dans ces équations X, Y, Z sont les composantes de la force électrique; L, M, N celles de la force magnétique, ε la constante diélectrique, μ la constante magnétique du milieu; enfin j'ai supposé qu'on ait choisi des unités telles que la vitesse de la lumière soit égale à 1.

De ces équations on tire :

$$(4)\quad \begin{cases} \dfrac{d(\varepsilon X)}{dx} + \dfrac{d(\varepsilon Y)}{dy} + \dfrac{d(\varepsilon Z)}{dz} = 0 \\ \dfrac{d(\mu X)}{dx} + \dfrac{d(\mu Y)}{dy} + \dfrac{d(\mu Z)}{dz} = 0. \end{cases}$$

Si l'on regarde les constantes ε et μ comme inaltérées par la perturbation, si X, Y, Z, L, M, N sont les seules variables, ces équations sont linéaires. Mais l'hypothèse que fait M. Jaumann, c'est précisément que ε et μ ne sont pas des constantes absolues, mais dépendent de l'état du champ électromagnétique (au moins dans les gaz raréfiés).

Les équations cessent alors d'être linéaires, ce qui, dit M. Jaumann, peut présenter des avantages pour l'explication de certains phénomènes : « Nun haben die höheren electrischen Vorgänge einen entschieden *nichtsuperpositorischen* Charäkter (*Z. B. Entladung durch Licht, gegenseitige Abstossung der Kathodenstrahlen*, etc.) ».

Supposons donc que toutes nos quantités

$$X,\quad Y,\quad Z;\qquad L,\quad M,\quad N;\qquad \varepsilon,\quad \mu$$

éprouvent des oscillations très petites autour de leurs valeurs moyennes

$$X_0,\quad Y_0,\quad Z_0,\quad L_0;\qquad M_0,\quad N_0,\quad \varepsilon_0,\quad \mu_0$$

et que l'amplitude de ces oscillations soit très petite par rapport à ces valeur moyennes.

Alors $\dfrac{d\varepsilon}{dt}$ et $\varepsilon - \varepsilon_0$ seront très petits par rapport à ε_0, $\dfrac{dX}{dt}$ et $X - X_0$ très petits par rapport à X_0.

Nous pouvons écrire

$$\frac{d}{dt}(\varepsilon X) = \frac{d\varepsilon}{dt} X_0 + \frac{d\varepsilon}{dt}(X - X_0) + \varepsilon_0 \frac{dX}{dt} + (\varepsilon - \varepsilon_0)\frac{dX}{dt}.$$

Le second et le quatrième terme sont très petits par rapport au premier et au troisième et peuvent être négligés, de sorte que les équations (2) peuvent s'écrire :

$$(5)\qquad \left\{\begin{aligned} \varepsilon_0 \frac{dX}{dt} + X_0 \frac{d\varepsilon}{dt} &= \frac{dM}{dz} - \frac{dN}{dy}, \\ \varepsilon_0 \frac{dY}{dt} + Y_0 \frac{d\varepsilon}{dt} &= \frac{dN}{dx} - \frac{dL}{dz}, \\ \varepsilon_0 \frac{dZ}{dt} + Z_0 \frac{d\varepsilon}{dt} &= \frac{dL}{dy} - \frac{dM}{dx}. \end{aligned}\right.$$

De même les équations (3) deviennent

$$(6)\qquad \left\{\begin{aligned} \mu_0 \frac{dL}{dt} + L_0 \frac{d\mu}{dt} &= \frac{dZ}{dy} - \frac{dY}{dz}, \\ \mu_0 \frac{dM}{dt} + M_0 \frac{d\mu}{dt} &= \frac{dX}{dz} - \frac{dZ}{dx}, \\ \mu_0 \frac{dN}{dt} + N_0 \frac{d\mu}{dt} &= \frac{dY}{dx} - \frac{dX}{dy}. \end{aligned}\right.$$

Il y a deux cas où ces équations se réduisent à celles de Maxwell et où par conséquent la propagation d'une onde longitudinale demeure impossible :

1° Quand $\frac{d\varepsilon}{dt}$, $\frac{d\mu}{dt}$ sont très petits ; et que les deux quantités ε et μ sont sensiblement constantes, c'est-à-dire dans tous les milieux, sauf dans les gaz raréfiés ;

2° Quand X_0, Y_0, Z_0, L_0, M_0, N_0 sont très petits, c'est-à-dire quand les phénomènes ne se passent pas dans un champ électrique ou magnétique très intense.

Dans ces deux cas, en effet, le terme additionnel $X_0 \frac{d\varepsilon}{dt}$ devient négligeable de même que tous les termes analogues.

On s'expliquerait ainsi, d'après M. Jaumann, que les ondes longitudinales, c'est-à-dire les rayons cathodiques, ne puissent se produire que dans les gaz raréfiés et en présence d'un champ électrique intense.

Maintenant pourquoi les quantités ε et μ seraient-elles variables dans les gaz raréfiés tandis qu'elles sont constantes dans tous les autres milieux ?

M. Jaumann pense qu'un milieu très rare est plus sensible qu'un autre aux

causes qui tendent à faire varier ces quantités; la résistance opposée à ces causes par un milieu serait ainsi comparable à une sorte d'inertie d'autant plus grande que ce milieu serait plus dense.

Il reste à établir les lois de ces variations; mais sur ce point nous en sommes réduits aux hypothèses. Voici celle qu'adopte M. Jaumann en s'appuyant sur des considérations de symétrie et sur des analogies que je ne développerai pas ici; il admet les deux équations suivantes :

(7) $$\frac{1}{\beta}\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{d}{dx}(\varepsilon_0 X) + \frac{d}{dy}(\varepsilon_0 Y) + \frac{d}{dz}(\varepsilon Z),$$

(8) $$\frac{1}{\gamma}\frac{d\mu}{dt} = \frac{d}{dx}(\varepsilon_0 X) + \frac{d}{dy}(\varepsilon_0 Y) + \frac{d}{dz}(\varepsilon_0 Z),$$

où β et γ sont des constantes dépendant de la nature du milieu.

Le second membre de l'équation (7) [ou de l'équation (8)] que je désignerai pour abréger par θ, est proportionnel à la densité électrique au point considéré.

Les ondes transversales continuent à se propager dans un pareil milieu suivant les lois ordinaires.

Si en effet nous faisons :

$$\theta = 0, \qquad \varepsilon = \varepsilon_0, \qquad \mu = \mu_0,$$

les équations (7) et (8) sont satisfaites et les équations (5) et (6) se réduisent aux équations de Maxwell. Ces dernières sont d'ailleurs compatibles avec l'équation

$$\theta = 0$$

qui exprime simplement la transversalité des vibrations.

Mais ce milieu devient en même temps capable de propager *dans un seul sens* des vibrations longitudinales.

On satisfait en effet aux équations (5), (6), (7), (8) en faisant :

(9) $$L = M = N = L_0 = M_0 = N_0 = 0,$$

(10) $$X = Y = X_0 = Y_0 = 0,$$

(11) $$\varepsilon_0 = \mu_0 = Z_0 = \text{const.},$$

(12) $$\frac{d\varepsilon}{dt} = \beta\theta = \beta\varepsilon_0\frac{dZ}{dz}, \qquad \frac{d\mu}{dt} = \gamma\theta = \gamma\varepsilon_0\frac{dZ}{dz},$$

(13) $$\varepsilon_0\frac{dZ}{dt} + Z_0\beta\varepsilon_0\frac{dZ}{dz} = 0;$$

d'où :

(14) $$Z = \text{fonction arbitraire de } (z - \beta Z_0 t).$$

Les équations (9) expriment qu'il n'y a pas de champ magnétique, ni constant, ni variable.

Les équations (10) expriment que la vibration électrique est partout parallèle à l'axe des z; les équations (11) que le champ électrique moyen est uniforme et le milieu homogène; les équations (12) donnent dès lors des variations de ε et de μ; celles de μ n'ont d'ailleurs aucune influence puisque le champ magnétique est nul.

L'équation (13) s'intègre immédiatement et donne l'équation (14) qui exprime que le plan de l'onde est perpendiculaire à l'axe des z et par conséquent à la vibration électrique; cette vibration est donc *longitudinale*.

Discussion.

Différentions la première équation (5) par rapport à x, la seconde par rapport à y, la troisième par rapport à z et ajoutons; il viendra :

$$\frac{d}{dx}\left(\varepsilon_0\frac{dX}{dt}\right)+\frac{d}{dy}\left(\varepsilon_0\frac{dY}{dt}\right)+\frac{d}{dz}\left(\varepsilon_0\frac{dZ}{dt}\right)+\frac{d}{dx}\left(\frac{d\varepsilon}{dt}X_0\right)+\frac{d}{dy}\left(\frac{d\varepsilon}{dt}Y_0\right)+\frac{d}{dz}\left(\frac{d\varepsilon}{dt}Z_0\right)=0.$$

Mais :

$$(7)\qquad \frac{d\varepsilon}{dt}=\beta\theta$$

et d'autre part :

$$\varepsilon_0\frac{dX}{dt}=\frac{d(\varepsilon_0X)}{dt};\qquad \frac{d}{dx}\left(\varepsilon_0\frac{dX}{dt}\right)=\frac{d}{dt}\left[\frac{d(\varepsilon_0X)}{dx}\right].$$

Donc :

$$\sum\frac{d}{dt}\left(\varepsilon_0\frac{dX}{dt}\right)=\frac{d}{dt}\sum\frac{d(\varepsilon_0X)}{dx}=\frac{d\theta}{dt}.$$

Notre équation devient donc, en la divisant par β :

$$(15)\qquad \frac{1}{\beta}\frac{d\theta}{dt}+\frac{d}{dx}(X_0\theta)+\frac{d}{dy}(Y_0\theta)+\frac{d}{dz}(Z_0\theta)=0.$$

La fonction θ satisfait donc à une équation aux dérivées partielles du premier ordre dont l'intégration est facile. L'intégration du système (5), (6), (7), (8) s'achèverait ensuite aisément quelles que soient les expressions des fonctions données ε_0, μ_0, X_0, Y_0, Z_0, L_0, M_0, N_0 en fonctions de x, y et z.

Mais l'interprétation est encore facilitée par les circonstances suivantes :

1° Le milieu différant peu du vide, on devra avoir :

$$\varepsilon_0 = \mu_0 = 1;$$

2° Le champ électrique moyen devant être considéré comme champ constant, on aura, s'il n'y a pas de charge électrique constante dans le gaz raréfié :

$$X_0 = \frac{dV_0}{dx}, \qquad Y_0 = \frac{dV_0}{dy}, \qquad Z_0 = \frac{dV_0}{dz},$$

$$\Delta V_0 = 0;$$

ce qui peut encore s'écrire :

$$(16) \qquad \frac{dX_0}{dx} + \frac{dY_0}{dy} + \frac{dZ_0}{dz} = 0;$$

3° Le champ magnétique moyen doit satisfaire de même aux conditions

$$L_0 = \frac{d\Omega_0}{dx}; \qquad M_0 = \frac{d\Omega_0}{dy}; \qquad N_0 = \frac{d\Omega_0}{dz};$$

$$\Delta\Omega_0 = 0;$$

$$(17) \qquad \frac{dL_0}{dx} + \frac{dM_0}{dy} + \frac{dN_0}{dz} = 0.$$

A cause de l'équation (16), l'équation (15) devient :

$$(15\ bis) \qquad \frac{1}{\beta}\frac{d\theta}{dt} + X_0\frac{d\theta}{dx} + Y_0\frac{d\theta}{dy} + Z_0\frac{d\theta}{dz} = 0.$$

L'intégration de cette équation se ramène à celle du système :

$$(18) \qquad \beta\, dt = \frac{dx}{X_0} = \frac{dy}{Y_0} = \frac{dz}{Z_0}$$

Or les équations :

$$\frac{dx}{X_0} = \frac{dy}{Y_0} = \frac{dz}{Z_0}$$

sont les équations différentielles des lignes de force électrique.

Supposons que ces lignes de force soient connues et soient :

$$u = f_1(x, y, z),$$
$$v = f_2(x, y, z)$$

leurs équations en termes finis, où je suppose que f_1 et f_2 sont des fonctions données de x, y, z et où u et v sont deux constantes arbitraires

Prenons pour variables u, v et V_0 et soit

$$F_0 = \sqrt{X_0^2 + Y_0^2 + Z_0^2}$$

la force électrique. Les équations (18) deviendront :

$$du = dv = 0; \qquad \beta\, dt = \frac{dV_0}{F_0^2}$$

et l'équation (15 *bis*) devient :

$$\frac{1}{\beta}\frac{d\theta}{dt} + F_0^2 \frac{d\theta}{dV_0} = 0.$$

L'intégrale $\int \frac{dV_0}{F_0^2}$ prise le long d'une ligne de force à partir d'une origine quelconque peut être regardée comme une fonction connue de x, y, z que j'appelle ω. Nous pourrons prendre maintenant pour variables nouvelles u, v, ω au lieu de u, v, V_0.

L'équation (15 *bis*) devient alors :

$$\frac{d\theta}{dt} + \beta \frac{d\theta}{d\omega} = 0$$

dont l'intégrale générale est :

$$\theta = \text{fonction arbitraire de } u, v \text{ et } \omega - \beta t.$$

La fonction θ peut maintenant être regardée comme connue.

D'autre part, comme ε_0 est égal à 1, il vient :

(19) $$\frac{dX}{dx} + \frac{dY}{dy} + \frac{dZ}{dz} = 0.$$

Si nous différentions la première équation (5) par rapport à t, et si nous observons que X_0 ne dépend pas de t et que $\frac{d\varepsilon}{dt} = \beta\theta$, et $\varepsilon_0 = 1$, nous aurons :

(20) $$\frac{d^2X}{dt^2} + \beta X_0 \frac{d\theta}{dt} = \frac{d^2M}{dz\,dt} - \frac{d^2N}{dx\,dt}.$$

D'autre part, en différentiant les équations (6) nous trouvons :

(21) $$\left\{\begin{aligned} &\frac{d^2M}{dz\,dt} + \gamma \frac{d}{dz}(M_0\theta) = \frac{d^2X}{dz^2} - \frac{d^2Z}{dx\,dz}, \\ &\frac{d^2N}{dy\,dt} + \gamma \frac{d}{dy}(N_0\theta) = -\frac{d^2X}{dy^2} + \frac{d^2Y}{dx\,dy}. \end{aligned}\right.$$

En combinant les opérations (20) et (21), on trouve :

$$\frac{d^2X}{dt^2} - \beta X_0 \frac{d\theta}{dt} = \gamma\left[\frac{d}{dy}(N_0\theta) - \frac{d}{dz}(M_0\theta)\right] + \Delta X - \frac{d}{dx}\left(\frac{dX}{dx} + \frac{dY}{dy} + \frac{dZ}{dz}\right)$$

ou

$$\frac{d^2X}{dt^2} - \Delta X = -\beta X_0 \frac{d\theta}{dt} + \gamma\left(\frac{dN_0\theta}{dy} - \frac{dM_0}{dz}\right) - \frac{d\theta}{dx}. \tag{22}$$

Le second membre de (22) peut être considéré comme une fonction connue de x, y, z et t, que j'appellerai :

$$\Phi_1(x, y, z, t).$$

L'équation (22) admet alors l'intégrale suivante :

$$X = \frac{1}{4\pi}\int \frac{\Phi_1(x', y', z', t-r)}{r}\,d\tau'. \tag{23}$$

L'intégration doit être étendue à tous les éléments de volume $d\tau'$ de l'espace; x', y', z' sont les coordonnées de l'élément $d\tau'$ et r est la distance du point x, y, z au point x', y', z'.

Les autres composantes Y et Z satisferont alors à des équations de même forme que (22) :

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{d^2Y}{dt^2} - \Delta Y = \Phi_2, \\ &\frac{d^2Z}{dt^2} - \Delta Z = \Phi_3, \end{aligned}\right. \tag{22 bis}$$

où Φ_2 et Φ_3 sont des fonctions formées de la même manière que Φ_1 et que l'on peut regarder comme connues.

Les équations (22 *bis*) admettront alors comme intégrales :

$$\left\{\begin{aligned} &Y = \frac{1}{4\pi}\int \Phi_2(x', y', z', t-r)\frac{d\tau'}{r}, \\ &Z = \frac{1}{4\pi}\int \Phi_3(x', y', z', t-r)\frac{d\tau'}{r}. \end{aligned}\right. \tag{23 bis}$$

Il est aisé de vérifier que les intégrales (23) et (23 *bis*) satisfont à la condition (19); car les trois fonctions $\Phi_1(x, y, z, t)$, $\Phi_2(x, y, z, t)$, $\Phi_3(x, y, z, t)$, satisfont, en tenant compte de l'équation (15 *bis*), à la condition :

$$\frac{d\Phi_1}{dx} + \frac{d\Phi_2}{dy} + \frac{d\Phi_3}{dz} = \frac{d^2\theta}{dt^2} - \Delta\theta.$$

Cela posé, on peut se demander si les équations (23) et (23 *bis*) nous donnent la seule solution du système (5), (6), (7), (8), en supposant que θ soit une fonction donnée satisfaisant à (15 *bis*).

Supposons que ce système, ou, ce qui revient au même, le système (22),

(22 *bis*), (19) admette deux solutions :

$$X, \quad Y, \quad Z \qquad \text{et} \qquad X', \quad Y', \quad Z'.$$

Il est clair que l'on aura :

$$\frac{d^2(X-X')}{dt^2} = \Delta(X-X'), \qquad \frac{d^2(Y-Y')}{dt^2} = \Delta(Y-Y'), \qquad \frac{d^2(Z-Z')}{dt^2} = \Delta(Z-Z'),$$

$$\frac{d}{dx}(X-X') + \frac{d}{dy}(Y-Y') + \frac{d}{dz}(Z-Z') = 0,$$

ce qui montre que $X-X'$, $Y-Y'$, $Z-Z'$ sont les composantes d'une vibration transversale satisfaisant aux équations ordinaires de Maxwell.

Une perturbation quelconque peut donc être regardée comme la superposition d'une onde transversale ordinaire et d'une perturbation définie par les équations (23) et (23 *bis*).

Direction des rayons cathodiques.

Supposons qu'à l'origine du temps la perturbation soit limitée à une région très petite R; en dehors de cette région θ sera nul pour $t = 0$. Mais, d'autre part, θ doit être fonction de u, v et $\omega - \beta t$.

Si donc par les différents points de Q nous menons des lignes de force, ces lignes de force définiront un tube de force T, extrêmement délié puisque la région R est supposée très petite.

En dehors de ce tube, θ sera et restera toujours nul; il y aura encore en dehors de ce tube des perturbations, puisque l'équation (23) montre que chacun des éléments $d\tau'$ du tube T agit comme un centre d'ébranlement et envoie des ondulations dans tous les sens. Mais *il n'y aura que des perturbations transversales*, puisque l'équation $\theta = 0$ exprime précisément la transversalité.

Le phénomène cathodique proprement dit est donc confiné dans le tube T.

Supposons que l'on place sur le trajet des rayons un écran percé d'une étroite ouverture; dans le plan de l'écran, la perturbation sera limitée à l'ouverture; si par les divers points de cette ouverture, on mène des lignes de force définissant un tube de force T, le phénomène cathodique sera confiné dans le tube T.

En d'autres termes, *si la théorie de M. Jaumann était vraie, les rayons cathodiques devraient suivre les lignes de force électrique.*

Ils ne seraient donc pas rectilignes et ils iraient de la cathode à l'anode.

Action de l'aimant.

Cette conclusion subsiste, qu'il y ait ou non un champ magnétique. Les lignes de force électrique ne sont pas déviées par l'aimant. *Les rayons cathodiques ne devraient donc pas non plus être déviés par l'aimant.*

La fonction θ ne dépend aucunement de L_0, M_0, N_0; le champ magnétique exerce cependant une influence sur la perturbation puisque Φ_1, Φ_2, Φ_3 contiennent des termes dépendant de L_0, M_0, N_0, mais cette influence ne fait qu'y ajouter une perturbation purement transversale.

Le calcul de M. Jaumann, page 177 du Mémoire cité, ne prouve pas que le rayon est dévié, mais que le plan de l'onde change d'orientation au moins dans l'exemple assez particulier qu'il a choisi. Mais il n'y a pas de raison de supposer que le rayon soit perpendiculaire au plan de l'onde. La direction du rayon reste définie par l'équation (15 *bis*) qui demeure valable.

La théorie de M. Jaumann est donc incapable d'expliquer la déviation magnétique.

Lumière longitudinale.

D'après M. Jaumann, la lumière transversale ordinaire est accompagnée dans les gaz raréfiés d'une composante longitudinale et c'est par cette composante qu'il explique, comme je l'ai dit plus haut, le terme $B \sin^2 \alpha$ donné par les expériences de Elster et Geitel.

Mais nous avons vu plus haut que les perturbations transversales se propagent dans le milieu imaginé par M. Jaumann, en se conformant exactement aux équations de Maxwell.

Si, en effet, on fait $\theta = 0$, les termes complémentaires $X_0 \frac{d\xi}{dt}$, $L_0 \frac{d\mu}{dt}$, ..., disparaissent et l'on retombe sur les équations de Maxwell.

Si donc il n'y a pas à l'origine du temps, de perturbation longitudinale il ne s'en produira jamais.

M. Jaumann croit le contraire; il croit par exemple que la lumière transversale, en se réfléchissant, doit produire une composante longitudinale.

Il est aisé de voir d'où provient son erreur. Il suppose que dans la couche de passage très mince qui sépare les deux milieux, on doit avoir :

$$\frac{dX}{dx} + \frac{dY}{dy} + \frac{dZ}{dz} = 0. \tag{24}$$

Il ne peut en être ainsi; les expériences de Fresnel nous apprennent en effet que des deux côtés de la surface de séparation de deux milieux les trois composantes de la force magnétique et les deux composantes tangentielles de la force électrique sont continues, mais que la composante de la force électrique est discontinue.

Cette composante normale serait continue si l'équation (24) était vraie.

Dans la couche de passage, ce n'est pas l'équation (24) qui doit être satisfaite, mais l'équation

$$\frac{d(\varepsilon_0 X)}{dx} + \frac{d(\varepsilon_0 Y)}{dy} + \frac{d(\varepsilon_0 Z)}{dz} = 0. \tag{25}$$

LES RAYONS CATHODIQUES

ET

LA THÉORIE DE JAUMANN[1]

L'Éclairage électrique, t. 9, p. 289-293 (14 novembre 1896).

Nouvelles expériences de M. Jaumann.

Quand j'eus démontré que dans la théorie proposée, les rayons cathodiques doivent suivre les lignes de force, M. Jaumann ne renonça pas à sa théorie; mais il conclut que, par un mécanisme qu'il restait à expliquer, les lignes de force électrique devaient dans un tube de Crookes devenir rectilignes. Les charges électriques sur le verre tendent, d'après lui, à prendre une distribution telle que les lignes de force se réduisent à des lignes droites. C'est ce que M. Jaumann appelle la « Selbststreckung » des rayons cathodiques.

Il faut, dit-il, qu'il existe une loi d'après laquelle les rayons cathodiques ont, quelles que soient les circonstances, l'effet de charger le verre de telle sorte que les lignes de force statiques se rapprochent le plus possible de la ligne droite.

C'est en vue de vérifier cette conception que M. Jaumann a entrepris une nouvelle série d'expériences.

Il a pensé tout d'abord que, si ses idées étaient exactes, l'approche d'un corps électrisé devait dévier les rayons cathodiques au moins momentanément. En effet, le champ électrique s'en trouve modifié, et les lignes de force

(1) Voir *L'Éclairage électrique*, t. IX, 7 novembre 1896, p. 241-251; ce tome p. 314.

déformées. Ce n'est qu'au bout d'un certain temps que, par le mécanisme mystérieux que M. Jaumann appelle la Selbststreckung, les rayons cathodiques peuvent modifier les charges de la paroi de verre, de telle façon que les lignes de force redeviennent rectilignes.

Mais Voller et Hertz n'ayant pu obtenir de déviation électrostatique sensible, M. Jaumann conclut que dans les circonstances ordinaires les rayons sont trop intenses pour que cette déviation puisse se produire. De là l'idée d'affaiblir ces rayons. D'autre part, la déviation des lignes de force par l'approche d'un corps électrisé paraît devoir être d'autant plus forte que la charge du verre est plus faible.

Telles sont les idées qui ont guidé M. Jaumann dans ses expériences et l'ont conduit à opérer avec des rayons cathodiques très faibles.

Dispositions expérimentales.

Pour cela, il plonge complètement le tube de Crookes dans un vase de verre rempli d'huile. La cathode, placée à la partie inférieure du tube, a la forme d'un plateau légèrement concave. L'anode est une plaque métallique plongée dans l'huile et par conséquent *extérieure* au tube; elle se trouve séparée de la paroi extérieure du tube par une couche de 1 à 2^{cm} d'huile.

La différence de potentiel des deux électrodes était d'environ 9000 V ; mais il ne passait qu'un courant très faible à travers l'huile très mauvaise conductrice. Dans ces conditions, les rayons cathodiques sont si faibles que la fluorescence du verre ne peut être distinguée que quand les yeux se sont accoutumés à l'obscurité.

Ces dispositions, qui ont pour but d'affaiblir les rayons afin de les rendre plus déviables, peuvent être variées de diverses manières. On peut, par exemple, supprimer le bain d'huile et prendre comme anode un doigt touchant la paroi du tube.

Distribution des rayons.

Dans ces conditions on observe la fluorescence verte en trois points différents :

1° Sur la trace de la « surface d'interférence », qui bissecte l'angle rentrant

formé par le plateau de la cathode et le fil qui y amène le courant (ce fil aboutit au centre de ce plateau normalement au plan du plateau);

2° Du bord du plateau partent dans toutes les directions radiales des rayons qui dessinent sur le verre un anneau lumineux;

3° Enfin un faisceau de rayons normaux au plan du plateau forment une tache fluorescente de la partie supérieure du tube; c'est de ce faisceau et de cette tache qu'il sera uniquement question dans ce qui va suivre.

« On peut, dit M. Jaumann, en faisant varier la forme de la cathode aller de ce faisceau par degrés insensibles aussi bien au « foyer » de Crookes qu'aux surfaces d'interférence. » Une connaissance complète de ces passages insensibles présenterait un intérêt capital; malheureusement l'auteur ne donne pas d'autres détails.

Cette tache fluorescente se compose de deux parties distinctes que M. Jaumann appelle la *tache principale* et la *figure annulaire*.

La tache principale se réduit à un cercle dont l'éclat décroît du centre à la circonférence; la figure annulaire se compose d'un centre brillant entouré d'un anneau obscur et d'un anneau brillant.

Dans les conditions ordinaires, la figure annulaire est très brillante, mais son éclat diminue plus rapidement que celui de la tache principale quand on affaiblit les rayons, de sorte que dans les expériences de M. Jaumann elle était beaucoup plus faible que cette tache principale.

La tache principale et la figure annulaire sont également déviables par l'aimant; mais *la première est sensible à la déviation électrostatique tandis que la seconde ne l'est pas*.

On rapprochera ce résultat d'une expérience de M. Birkeland ([1]).

M. Birkeland, ayant pris un tube avec une anode percée d'une fente étroite a observé l'image de cette fente sur le fond du tube.

« A une pression assez faible, dit-il, et en employant des décharges d'une assez grande tension, j'ai distingué deux et même souvent trois raies fines se recouvrant presque l'une l'autre. On obtient un écartement plus grand d'une de ces lignes avec les autres *en touchant du doigt la boule de verre*...; par ce

---

([1]) *C. R. Acad. Sc.*, t. 122, 1896; *L'Éclairage électrique*, t. IX, 7 novembre 1896, p. 274.

procédé, *une* des raies fines sera déviée vers le côté du doigt à peu près de 2^{mm} (l'anode est à la terre) tandis que les autres restent immobiles. »

La raie mobile est évidemment analogue à la tache principale de M. Jaumann et les deux raies immobiles à la figure annulaire.

Déviation des rayons par l'anode.

Avec la disposition adoptée, on peut faire facilement varier la position de l'anode, puisque cette anode est extérieure au tube. On voit alors qu'en la plaçant à une certaine hauteur on fait coïncider le centre de la tache principale et celui de la figure annulaire.

Dès qu'on soulève l'anode, le centre de la tache principale semble attiré et finit par atteindre l'anneau clair extérieur de la figure annulaire, qu'elle ne peut d'ailleurs dépasser quand on continue à soulever l'anode.

De même quand on abaisse l'anode, le centre de la tache principale est repoussé sans jamais dépasser l'anneau extérieur.

Cette attraction de la tache principale par l'anode est *durable* et, contrairement à ce qui arrive pour les autres actions électrostatiques dont il nous reste à parler, elle subsiste tant que l'anode reste dans la même position.

Action électrostatique.

La tache principale est extrêmement sensible aux actions électrostatiques ; il suffit d'agiter le doigt à 10^{cm} du vase qui contient l'huile pour provoquer des déplacements sensibles.

Si, près de ce vase, on abaisse rapidement un bâton de verre frotté jusqu'à la hauteur de la cathode, puis qu'on le maintienne dans cette position, les rayons sont repoussés. Le côté du tube voisin du bâton est envahi par une zone obscure et la tache principale est rejetée de l'autre côté. Mais au bout de 0,2 seconde elle revient en arrière, et le centre de la tache principale après quelques oscillations revient à sa position primitive.

Ramenons maintenant le bâton de verre à sa hauteur primitive, le rayon cathodique sera fortement attiré.

Une zone claire apparaît sur le côté opposé au bâton, s'élève, repousse la tache principale du côté du bâton, puis, au bout de 0,2 seconde revient en arrière, laisse la tache principale revenir à sa position primitive sans oscillation, et finalement s'éteint.

Quelle que soit d'ailleurs la manière dont on fait varier le champ électrique extérieur; que l'on déplace dans un sens quelconque un corps électrisé; que l'on fasse varier le potentiel de conducteurs extérieurs, les choses se passent de la même manière.

La tache principale se déplace d'abord pour revenir bientôt à sa position primitive.

Si l'appareil est placé entre les deux armatures d'un condensateur et qu'on le charge avec une différence de potentiel de 6000 V, le rayon est un instant attiré par l'armature négative; il reprend presque immédiatement sa direction primitive.

Si l'on décharge le condensateur, le rayon, d'abord attiré par l'armature positive, vient très rapidement à sa direction première.

Un conducteur chargé positivement, repousse d'abord le rayon quand on l'approche; un conducteur non chargé, comme la main par exemple, agit comme un corps positif si l'anode est à la terre, comme un corps négatif si la cathode est à la terre.

On remarquera que le sens du phénomène est précisément l'opposé du sens théorique.

Cette déviation du rayon est accompagnée d'une variation d'intensité. L'attraction est accompagnée et précédée d'un renforcement, la répulsion d'un affaiblissement des rayons.

Les deux phénomènes sont d'ailleurs indépendants. En effet un écran conducteur mis à la terre fait cesser la déviation, mais non la variation d'intensité. En enveloppant complètement le tube dans un cylindre de Faraday, on fait disparaître à la fois les deux phénomènes.

Explication des phénomènes observés.

Cette déviation passagère peut s'expliquer de deux manières; on peut supposer qu'elle est due à la vitesse des corps électrisés.

M. Jaumann rejette cette explication, *il* suppose que les lignes de force sont

déviées, quand le champ électrique varie (si par exemple on approche un conducteur chargé), les rayons cathodiques qui suivent ces lignes de force sont déviés également.

Mais ensuite intervient le mécanisme que M. Jaumann appelle la Selbststreckung; les rayons cathodiques, transportant avec eux des charges électriques, modifient la distribution de l'électricité à la surface du verre, et cela jusqu'à ce que les lignes de force soient redevenues rectilignes.

Les rayons cathodiques, redevenus rectilignes, suivent de nouveau leur route primitive.

Si maintenant le champ électrique *extérieur* redevient ce qu'il était au début (si l'on éloigne le conducteur chargé que l'on avait d'abord approché) les lignes de force sont de nouveau déviées (de sens contraire) de la première déviation et les rayons cathodiques avec elles. Mais cette déviation cesse promptement, parce que les rayons cathodiques modifient la distribution sur le verre jusqu'à ce que les lignes de force redeviennent rectilignes.

Les actions électrostatiques ne peuvent donc produire de déviations permanentes; à moins qu'il n'y ait une source permanente d'électricité qui vienne contre-balancer l'afflux constant dû aux rayons cathodiques et empêcher les diverses parties du verre de prendre des charges telles que les lignes de force redeviennent rectilignes.

C'est ce qui arrive quand on a une cathode ou anode amenant un courant permanent; c'est pour cela qu'une cathode dans l'expérience de Goldstein, que l'anode dans l'expérience de Jaumann que j'ai décrite plus haut exerçaient une action déviatrice permanente.

Nouvelles objections.

Cette explication ne supporte pas l'examen.

1° La théorie continue à ne pas rendre compte de la déviation magnétique; nous avons vu que d'après les équations de Jaumann, les rayons cathodiques doivent suivre les lignes de force électrique qu'il y ait ou non un champ magnétique.

On pourrait, il est vrai, supposer que la déviation magnétique n'est qu'un phénomène secondaire, que des courants règnent sur la surface du verre, et que ces courants, déviés par l'aimant, troublent la Selbststreckung.

M. Jaumann examine cette hypothèse, mais il la rejette, avec raison d'ailleurs. La déviation magnétique demeure donc inexpliquée.

2° La théorie ne rend pas compte non plus de l'existence de deux faisceaux de rayons, formant la tache principale et la figure annulaire, l'une déviable par les actions électrostatiques, l'autre insensible à ces actions.

3° L'expérience confirme bien la déviation *passagère* des rayons par les actions électrostatiques, mais cette déviation a lieu dans un sens opposé au sens théorique. Voici ce que M. Jaumann dit à ce sujet :

« Comme les expériences qui ont donné ce sens de la déviation ont été entreprises sur le fondement de ce théorème, que les rayons cathodiques suivent les lignes de force électrostatiques, je suis très éloigné d'abandonner ce théorème, à cause de cette discordance de signe. Au contraire, on doit chercher à en tirer de nouvelles conclusions.

Comme les lignes de force négatives doivent néanmoins, même dans le vide, être repoussées par l'approche d'un corps chargé négativement, et comme on voit d'autre part que les rayons cathodiques qui suivent ces lignes sont attirés par ce corps, on doit conclure qu'on est mal renseigné sur le signe d'un quelconque des phénomènes qui se passent dans le tube. Le plus simple serait d'admettre que de la cathode partent des lignes de force, non pas négatives, mais remarquablement positives. »

Cette façon de raisonner paraîtra sans doute peu convaincante.

4° Enfin les lignes de force électrique ne peuvent pas affecter n'importe quelle configuration. Si elles sont rectilignes, elles doivent d'abord être normales à un système de surfaces qui sont les surfaces équipotentielles. Cette première condition sera remplie par les rayons cathodiques qui sont normaux à la surface de la cathode et à toutes les surfaces parallèles.

Mais ce n'est pas tout; les surfaces équipotentielles normales à un système de droites devront être des *surfaces parallèles* entre elles.

Elles doivent en outre être *isothermes*, à cause de l'équation :

$$\Delta V = 0.$$

Soit S_0 une des surfaces équipotentielles. Sur les normales à cette surface portons un segment de longueur constante l; le lieu des extrémités de ces segments est une surface S qui est aussi équipotentielle.

Le potentiel V sera fonction de l seulement et la force électrique

$$\frac{dV}{dl} = F(l)$$

sera aussi fonction de l seulement.

Considérons un tube de force quelconque; soit $d\sigma_0$ l'élément de surface qu'il découpe sur S_0, $d\sigma$ celui qu'il découpe sur S; on devra avoir en vertu du théorème du flux de force :

$$d\sigma_0\, F(0) = d\sigma\, F(l),$$

c'est-à-dire que le rapport $\frac{d\sigma}{d\sigma_0}$ ne devra dépendre que de l.

Mais d'après une propriété connue des surfaces parallèles :

$$\frac{d\sigma}{d\sigma_0} = \left(1 + \frac{l}{R_1}\right)\left(1 + \frac{l}{R_2}\right).$$

R_1 et R_2 étant les deux rayons de courbure principaux de la surface S_0 au centre de gravité de l'élément $d\sigma_0$.

Pour que cette expression soit fonction de l seulement, il faut que les deux rayons de courbure R_1 et R_2 soient constants.

Or les seules surfaces qui satisfassent à cette condition sont la sphère et le cylindre de révolution.

Pour qu'un champ électrique ait ses lignes de force rectilignes, il faut donc que ces lignes de force soient normales à une sphère ou à un cylindre de révolution.

Mais il y a bien d'autres cas où les rayons cathodiques sont nettement rectilignes.

Prenons pour cathode un fil fin courbé en forme de circonférence; les rayons cathodiques seront normaux à une série de tores.

Donc dans ce cas ils ne suivent pas les lignes de force *à moins qu'on n'admette qu'il y a des charges électriques notables et constantes non seulement à la surface du verre, mais dans l'intérieur du tube dans l'air raréfié.*

La théorie de M. Jaumann ne supporte donc pas l'examen et j'ai peut-être trop longuement insisté sur sa réfutation; je ne le regrette pas, toutefois, puisque cela m'a été une occasion d'appeler l'attention sur des expériences intéressantes, qui, convenablement complétées et variées, contribueront peut-être un jour à nous faire connaître la vérité.

L'ÉNERGIE MAGNÉTIQUE

D'APRÈS MAXWELL ET D'APRÈS HERTZ

L'Éclairage électrique, t. 18, p. 361-367 (11 mars 1899).

Je voudrais comparer les équations données par Maxwell et Hertz pour l'électrodynamique des corps en mouvement, ainsi que les expressions qu'ils proposent pour l'énergie magnétique et pour les forces mécaniques produites par un champ magnétique. Il y a en effet quelques divergences que je voudrais expliquer et faire disparaître.

Les équations de Hertz traduites dans les notations de Maxwell peuvent s'écrire :

$$(1)\quad \frac{d\mu\alpha}{dt} = \frac{dQ}{dz} - \frac{dR}{dy} + \left[\frac{d}{dy}\mu(\beta\xi - \alpha\eta) - \frac{d}{dz}\mu(\alpha\zeta - \gamma\xi)\right] - \xi\left(\frac{d\mu\alpha}{dx} + \frac{d\mu\beta}{dy} + \frac{d\mu\gamma}{dz}\right)$$

et

$$(2)\quad \frac{dKP}{dt} = \frac{d\beta}{dz} - \frac{d\gamma}{dy} + \left[\frac{d}{dy}K(Q\xi - P\eta) - \frac{d}{dz}K(P\zeta - R\xi)\right] - \xi\left(\frac{dKP}{dx} + \frac{dKQ}{dy} + \frac{dKR}{dz}\right) + 4\pi p.$$

Nous employons les notations de Maxwell, c'est-à-dire que nous représentons par α, β, γ; a, b, c; A, B, C; P, Q, R; p, q, r; ξ, η, ζ; les composantes de la force magnétique, de l'induction magnétique, de l'aimantation, de la force électrique, du courant de conduction et enfin de la vitesse de la matière; et par K et μ les pouvoirs inducteurs diélectrique et magnétique.

A chacune des équations (1) et (2) doivent être adjointes les deux équations qu'on en peut déduire par symétrie.

D'autre part, en combinant les équations de Maxwell, et tenant compte de la relation

$$\frac{da}{dx}+\frac{db}{dy}+\frac{dc}{dz}=0,$$

on trouve :

$$(3)\qquad \frac{da}{dt}=\frac{dQ}{dz}-\frac{dR}{dy}+\left[\frac{d}{dy}(b\xi-a\eta)-\frac{d}{dz}(a\zeta-c\xi)\right]-\xi\left(\frac{da}{dx}+\frac{db}{dy}+\frac{dc}{dz}\right)$$

qui diffère au moins par la forme de l'équation (1) de Hertz.

Il est à remarquer en effet que le vecteur que Hertz appelle induction magnétique n'est pas la même chose que celui que Maxwell désigne par le même nom. Le premier a pour composantes $\mu\alpha$, $\mu\beta$, $\mu\gamma$; le second $a=\alpha+4\pi A$, $b=\beta+4\pi B$, $c=\gamma+4\pi C$. Il n'y a identité entre les deux vecteurs que dans les corps dépourvus de magnétisme permanent, n'ayant par conséquent que du magnétisme induit ; car dans ces corps on a :

$$a=\mu\alpha.$$

Cependant les équations (1) et (3) peuvent à certaines conditions se ramener l'une à l'autre. Posons en effet :

$$a=\mu\alpha+4\pi A_0,\qquad b=\mu\beta+4\pi B_0,\qquad c=\mu\gamma+4\pi C_0;$$

A_0, B_0, C_0 représenteront les composantes de l'aimantation permanente tandis que $\frac{\mu-1}{4\pi}\alpha$, $\frac{\mu-1}{4\pi}\beta$, $\frac{\mu-1}{4\pi}\gamma$ seront les composantes de l'aimantation induite.

Si nous supposons alors que les corps qui possèdent de l'aimantation permanente sont des corps solides qui entraînent avec eux cette aimantation, nous trouverons aisément :

$$\frac{dA_0}{dt}=\frac{d}{dy}(B_0\xi-A_0\eta)-\frac{d}{dz}(A_0\zeta-C_0\xi)-\xi\left(\frac{dA_0}{dx}+\frac{dB_0}{dy}+\frac{dC_0}{dz}\right).$$

Multiplions cette équation par 4π et ajoutons-la à l'équation (1), nous retrouverons l'équation (3).

Les équations (1) et (3) cesseraient d'être équivalentes si les corps aimantés ne conservaient pas leur aimantation permanente, si par exemple ils étaient désaimantés par la chaleur. Si les corps aimantés ne sont pas des corps solides, mais se déplacent en se déformant, il n'y aura pas non plus équivalence entre les deux équations, à moins qu'on ne fasse des hypothèses particulières, sur l'influence de ces déformations sur l'aimantation.

Les divergences s'accentuent quand on arrive à l'expression de l'énergie magnétique. Maxwell, en divers chapitres de son Ouvrage, en a proposé deux formules différentes. La première qui paraît convenir quand il y a des aimants et pas de courants s'écrit :

$$(4) \qquad -\int \frac{A\alpha + B\beta + C\gamma}{2}\, d\tau$$

l'intégration étant étendue comme toutes celles dont il sera question dans la suite à tous les éléments de volume $d\tau$ de l'espace.

La seconde qui paraît convenir quand il y a des courants et pas d'aimants s'écrit :

$$(5) \qquad \int \frac{a\alpha + b\beta + c\gamma}{8\pi}\, d\tau.$$

Enfin Hertz a donné une troisième formule :

$$(6) \qquad \int \mu\, d\tau\, \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}{8\pi}.$$

S'il n'y a que des aimants et pas de courants, l'expression (5) est nulle, et l'expression (4) est égale à

$$(7) \qquad \int \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}{8\pi}\, d\tau.$$

Les intégrales (4) et (7) seront alors égales à l'intégrale (6) si $\mu = 1$, c'est-à-dire s'il y a du magnétisme permanent, mais pas de magnétisme induit.

S'il n'y a pas de magnétisme permanent, il vient $a = \mu\alpha$ et l'intégrale (5) est égale à l'intégrale (6). L'intégrale (4) est en général différente de (5) et de (6); elle est nulle s'il n'y a pas de magnétisme induit.

Pour discuter ces formules, il faut voir à quelles valeurs elles nous conduisent pour les forces mécaniques produites par le champ magnétique.

Hertz donne l'expression suivante pour l'énergie totale, tant magnétique qu'électrique :

$$J = \int \mu\, d\tau\, \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}{8\pi} + \int K\, d\tau\, \frac{P^2 + Q^2 + R^2}{8\pi}.$$

Soient (1 *bis*) et (1 *ter*) les équations que l'on peut déduire de (1) par symétrie, (2 *bis*) et (2 *ter*) celles qu'on peut déduire de (2).

Soient :

$$(\alpha), \quad (\beta), \quad (\gamma), \quad (P), \quad (Q), \quad (R)$$

les seconds membres de

(1), (1 *bis*), (1 *ter*), (2), (2 *bis*), (2 *ter*)

multipliés par 4π, il viendra :

$$(8) \quad \frac{dJ}{dt} = \int d\tau[\alpha(\alpha) + \beta(\beta) + \gamma(\gamma) + P(P) + Q(Q) + R(R)]$$
$$- \int \frac{d\mu}{dt} d\tau \frac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{8\pi} - \int \frac{dK}{dt} d\tau \frac{P^2+Q^2+R^2}{8\pi}.$$

Supposons d'abord que μ et K soient des constantes; pour cela il suffit qu'il n'y ait d'une part que du magnétisme permanent et pas de corps aimanté par induction, et qu'il n'y ait d'autre part d'autre diélectrique que l'air.

Le second membre de (8) se réduit alors à la première intégrale. Soit W l'expression sous le signe $\int$.

Nous observons que (α), (β), ..., sont des polynomes du premier degré par rapport à ξ, η, ζ et à leurs dérivées; il en est donc de même de W, ce qui permet d'écrire :

$$W = W_0 + W_1,$$

W_0 représentant l'ensemble des termes indépendants de ξ, η, ζ, et W_1, celui des termes qui sont du premier degré par rapport à ces quantités et à leurs dérivées. On aura alors :

$$\frac{dJ}{dt} = \int W_0\, d\tau + \int W_1\, d\tau.$$

La première intégrale représente, ainsi qu'il est aisé de le vérifier, l'énergie créée par la pile, moins celle qui disparaît sous forme de chaleur de Joule. La seconde intégrale représente le travail des forces mécaniques; elle va donc nous permettre de déterminer ces forces.

Voici comment; soit par exemple :

$$W_1 = \xi\varphi_1 + \eta\varphi_2 + \zeta\varphi_3 + \frac{d\xi}{dx}\varphi_4 + \ldots$$

L'intégration par parties nous donnera :

$$\int \frac{d\xi}{dx}\varphi_4\, d\tau = -\int \xi \frac{d\varphi_4}{dx}\, d\tau$$

puisque les intégrations sont étendues à tout l'espace et que toutes les fonctions

s'annulent à l'infini. Il vient donc

$$\int W_1\, d\tau = \int \xi\, d\tau\left(\varphi_1 - \frac{d\varphi_4}{dx} - \ldots\right) + \int \eta\, d\tau\,(\varphi_2 - \ldots) + \int \zeta\, d\tau\,(\varphi_3 - \ldots)$$

et comme cette intégrale doit être l'expression du travail des forces mécaniques, la force mécanique appliquée à l'élément $d\tau$ devra avoir pour composantes :

$$d\tau\left(\varphi_1 - \frac{d\varphi_4}{dx} - \ldots\right), \quad d\tau\,(\varphi_2 - \ldots), \quad d\tau\,(\varphi_3 - \ldots).$$

Pour appliquer cette règle, je distinguerai deux sortes de forces mécaniques, celles que je considérerai comme dues au champ magnétique, et celles que je considérerai comme dues au champ électrique. Je puis poser en effet :

$$W_1 = W'_1 + W''_1,$$

W'_1 représentant l'ensemble des termes qui proviennent de $\alpha(\alpha) + \beta(\beta) + \gamma(\gamma)$ et W''_1, l'ensemble des termes qui proviennent de $P(P) + Q(Q) + R(R)$. On a donc :

$$\int W_1\, d\tau = \int W'_1\, d\tau + \int W''_1\, d\tau.$$

La première intégrale du second membre représentera le travail des forces dues au champ magnétique, et la seconde le travail des forces dues au champ électrique. Comme je veux déterminer d'abord les forces de la première catégorie, je n'envisagerai que la première intégrale. De plus, afin d'avoir la première composante de la force, je n'y considérerai que les termes qui dépendent de ξ et de ses dérivées, ou, ce qui revient au même, j'y ferai $\eta = \zeta = 0$.

Si l'on fait $\eta = \zeta = 0$ (et $\mu = 1$ conformément à l'hypothèse faite plus haut), il vient :

$$4\pi(\alpha) = \frac{dQ}{dz} - \frac{dR}{dy} + \frac{d\beta\xi}{dy} + \frac{d\gamma\xi}{dz} - \xi\left(\frac{d\alpha}{dx} + \frac{d\beta}{dy} + \frac{d\gamma}{dz}\right),$$

$$4\pi(\beta) = \frac{dR}{dx} - \frac{dP}{dz} - \frac{d\beta\xi}{dx},$$

$$4\pi(\gamma) = \frac{dP}{dy} - \frac{dQ}{dx} - \frac{d\gamma\xi}{dx},$$

d'où :

$$4\pi W'_1 = \alpha\frac{d\beta\xi}{dy} + \alpha\frac{d\gamma\xi}{dz} - \beta\frac{d\beta\xi}{dx} - \gamma\frac{d\gamma\xi}{dx} - \alpha\xi\left(\frac{d\alpha}{dx} + \frac{d\beta}{dy} + \frac{d\gamma}{dz}\right).$$

L'intégration par parties donne :

$$4\pi \int W_1\, d\tau = \int \xi\, d\tau \left[\beta \left(\frac{d\beta}{dx} - \frac{d\alpha}{dy} \right) - \gamma \left(\frac{d\alpha}{dz} - \frac{d\gamma}{dx} \right) - \alpha \left(\frac{d\alpha}{dx} + \frac{d\beta}{dy} + \frac{d\gamma}{dz} \right) \right].$$

Si alors nous posons :

$$\frac{d\gamma}{dy} - \frac{d\beta}{dz} = 4\pi u_0; \qquad \frac{d\alpha}{dz} - \frac{d\gamma}{dx} = 4\pi v_0; \qquad \frac{d\beta}{dx} - \frac{d\alpha}{dy} = 4\pi w_0;$$

$$\frac{d\alpha}{dx} + \frac{d\beta}{dy} + \frac{d\gamma}{dz} = 4\pi m;$$

on sait que u_0, v_0, w_0 représente le courant *total*, en y comprenant le courant de conduction, le courant de déplacement et les différentes sortes de courant de convection et que m représente la densité du magnétisme.

Il vient alors :

$$\int W_1\, d\tau = \int \xi\, d\tau (\beta w_0 - \gamma v_0 - \alpha m)$$

de sorte que les trois composantes de la force mécanique exercée sur l'élément $d\tau$ par le champ magnétique sont :

$$(\gamma v_0 - \beta w_0 + \alpha m)\, d\tau,$$
$$(\alpha w_0 - \gamma u_0 + \beta m)\, d\tau,$$
$$(\beta u_0 - \alpha v_0 + \gamma m)\, d\tau.$$

Je change les signes parce que notre intégrale représente non le travail de cette force elle-même, mais celui de la force qu'il faudrait appliquer à l'élément $d\tau$ pour l'équilibrer.

Les deux premiers termes de chaque parenthèse représentent évidemment l'action du champ sur le courant total u_0, v_0, w_0 et le dernier représente l'action du champ sur la masse magnétique $m\, d\tau$.

Le calcul des forces dues au champ électrique serait tout à fait analogue. On le trouverait (exprimé dans les notations de Hertz) dans le dernier chapitre de mon Ouvrage sur les *Oscillations électriques*.

Supposons maintenant qu'il y ait du magnétisme induit; ne supposons plus par conséquent que μ soit égal à 1.

Reprenons l'équation (3), équivalente comme nous l'avons vu à l'équation (1), et transformons-la en remplaçant partout a, b, c par $\alpha + 4\pi A$, $\beta + 4\pi B$,

$\gamma + 4\pi C$, il viendra :

$$\frac{d\alpha}{dt} + 4\pi\frac{dA}{dt} = \frac{dQ}{dz} - \frac{dR}{dy} + \left[\frac{d}{dy}(\beta\xi - \alpha\eta) - \frac{d}{dz}(\alpha\zeta - \gamma\xi)\right]$$

$$- \xi\left(\frac{d\alpha}{dx} + \frac{d\beta}{dy} + \frac{d\gamma}{dz}\right) + 4\pi\left[\frac{d}{dy}(B\xi - A\eta) - \frac{d}{dz}(A\zeta - C\xi)\right]$$

(9) $$- 4\pi\xi\left(\frac{dA}{dx} + \frac{dB}{dy} + \frac{dC}{dz}\right).$$

Je représenterai par $4\pi[\alpha]$ et $4\pi[A]$ la première et la seconde ligne du second membre de l'équation (9). J'appellerai (9 *bis*) et (9 *ter*) les équations que l'on peut déduire de (9) par symétrie, et je représenterai leurs seconds membres par $4\pi[\beta] + 4\pi[B]$ et $4\pi[\gamma] + 4\pi[C]$.

Nous avons posé :

$$a = \alpha + 4\pi A = \mu\alpha + 4\pi A^0;$$

on en tire :

$$\mu\alpha^2 = \alpha^2 + \frac{16\pi^2(A - A_0)^2}{\mu - 1}.$$

Posons pour abréger :

$$M^2 = (A - A_0)^2 + (B - B_0)^2 + (C - C_0)^2.$$

M est alors l'intensité absolue de l'aimantation induite.

L'expression de l'énergie magnétique d'après Hertz deviendra :

(10) $$\int\frac{d\tau}{8\pi}(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) + \int\frac{2\pi M^2\,d\tau}{\mu - 1}.$$

Elle se décompose ainsi en deux termes dont j'indiquerai plus loin la signification. On a ainsi :

(11) $$\frac{dJ}{dt} = \int\frac{d\tau}{4\pi}\left(\alpha\frac{d\alpha}{dt} + \beta\frac{d\beta}{dt} + \gamma\frac{d\gamma}{dt}\right) + \frac{d}{dt}\int\frac{2\pi M^2\,d\tau}{\mu - 1} + \int K\,d\tau\,\frac{P^2 + Q^2 + R^2}{4\pi}.$$

C'est sur la seconde intégrale que je veux attirer l'attention. Je suppose que tous les corps aimantés soit par induction, soit d'une manière permanente, soient des corps solides; alors les éléments de volume pour lesquels l'aimantation n'est pas nulle, seront invariables; nous pourrons donc écrire indifféremment le second terme du second membre de

$$\frac{d}{dt}\int\frac{2\pi M^2\,d\tau}{\mu - 1} = \int 2\pi\,d\tau\,\frac{d}{dt}\,\frac{M^2}{\mu - 1} = \int 2\pi\,d\tau\,\frac{\partial}{\partial t}\,\frac{M^2}{\mu - 1}.$$

Voici le sens de ces deux notations; je représente par $\frac{dU}{dt}\,dt$, l'accroissement

de la fonction U quand le temps augmente de dt et qu'on reste en un même point de l'espace et par $\frac{\partial U}{\partial t}\,dt$ l'accroissement de la fonction U quand le temps augmente de dt et qu'on suit une molécule matérielle; on aura donc :

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{dU}{dt} + \xi\frac{dU}{dx} + \eta\frac{dU}{dy} + \zeta\frac{dU}{dz}.$$

Soient $[A_0]$, $[B_0]$, $[C_0]$ ce que deviennent les expressions $[A]$, $[B]$, $[C]$ quand on y remplace A, B, C par A_0, B_0, C_0; soient $[A - A_0]$, ..., ce qu'elles deviennent quand on y remplace A, B, C par $A - A_0$, $B - B_0$, $C - C_0$.

L'équation (9) peut alors s'écrire :

$$\frac{d\alpha}{dt} + 4\pi\frac{d(A - A_0)}{dt} + 4\pi\frac{dA_0}{dt} = 4\pi[\alpha] + 4\pi[A - A_0] + 4\pi[A_0]$$

et comme nous avons trouvé plus haut en supposant que l'aimantation permanente soit entraînée par les corps solides aimantés :

$$\frac{dA_0}{dt} = [A_0],$$

il viendra :

$$\frac{d\alpha}{dt} + 4\pi\frac{d(A - A_0)}{dt} = 4\pi[\alpha] + 4\pi[A - A_0]$$

et de même :

$$\frac{d\beta}{dt} + 4\pi\frac{d(B - B_0)}{dt} = 4\pi[\beta] + 4\pi[B - B_0],$$

$$\frac{d\gamma}{dt} + 4\pi\frac{d(C - C_0)}{dt} = 4\pi[\gamma] + 4\pi[C - C_0].$$

Multiplions ces trois équations respectivement par :

$$\frac{\alpha}{4\pi} = \frac{A - A_0}{\mu - 1}, \qquad \frac{\beta}{4\pi} = \frac{B - B_0}{\mu - 1}, \qquad \frac{\gamma}{4\pi} = \frac{C - C_0}{\mu - 1},$$

nous trouverons :

$$\sum \frac{\alpha}{4\pi}\frac{d\alpha}{dt} + \frac{4\pi}{\mu - 1}\sum (A - A_0)\frac{d(A - A_0)}{dt} = \sum \alpha[\alpha] + \frac{4\pi}{\mu - 1}\sum (A - A_0)[A - A_0].$$

Rappelons-nous que tous les corps aimantés ont été supposés solides; par conséquent partout où l'on n'a pas :

$$A = A_0 = B = B_0 = C = C_0 = 0$$

on aura :

$$\frac{d\xi}{dx} = \frac{d\eta}{dy} = \frac{d\zeta}{dz} = \frac{d\xi}{dy} + \frac{d\eta}{dx} = \frac{d\eta}{dz} + \frac{d\zeta}{dy} = \frac{d\zeta}{dx} + \frac{d\xi}{dz} = 0.$$

on aura donc partout l'identité

$$\begin{aligned}(A - A_0)[A - A_0] + (B - B_0)[B - B_0] + (C - C_0)[C - C_0] \\ = -\xi M \frac{dM}{dx} - \eta M \frac{dM}{dy} - \zeta M \frac{dM}{dz}.\end{aligned}$$

D'autre part :

$$\sum (A - A_0)\frac{d(A - A_0)}{dt} = M\frac{dM}{dt},$$

ce qui nous permet d'écrire :

$$\sum \frac{\alpha}{4\pi}\frac{d\alpha}{dt} + \frac{2\pi}{\mu - 1}\left[\frac{d(M^2)}{dt} + \xi\frac{d(M^2)}{dx} + \eta\frac{d(M^2)}{dy} + \zeta\frac{d(M^2)}{dz}\right] = \Sigma\alpha[\alpha].$$

ou :

$$\sum \frac{\alpha}{4\pi}\frac{d\alpha}{dt} + \frac{2\pi}{\mu - 1}\frac{d(M^2)}{dt} = \alpha[\alpha] + \beta[\beta] + \gamma[\gamma].$$

Or comme le pouvoir inducteur μ d'un des corps solides aimantés doit être regardé comme invariable on aura :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\mu - 1}\right) = 0$$

et par conséquent :

$$\sum \frac{\alpha}{4\pi}\frac{d\alpha}{dt} + 2\pi\frac{d}{dt}\left(\frac{M^2}{\mu - 1}\right) = \alpha[\alpha] + \beta[\beta] + \gamma[\gamma].$$

On a donc :

$$\frac{dJ}{dt} = \int d\tau(\alpha[\alpha] + \beta[\beta] + \gamma[\gamma] + P[P] + Q[Q] + R[R]).$$

Or $4\pi[\alpha]$ est ce que devient le second membre de (1) quand on y fait $\mu = 1$; c'est donc précisément ce que nous appelions $4\pi(\alpha)$ dans le cas examiné plus haut et où l'on supposait $\mu = 1$.

L'expression de $\frac{dJ}{dt}$ *est donc encore la même que dans le cas où l'on supposait* $\mu = 1$.

L'expression des forces mécaniques sera donc encore la même et en particulier, les composantes de l'action du champ magnétique sur l'élément $d\tau$ seront :

$$(12)\quad \begin{cases}(\gamma v_0 - \beta w_0 + \alpha m)\,d\tau, \\ (\alpha w_0 - \gamma u_0 + \beta m)\,d\tau, \\ (\beta u_0 - \alpha v_0 + \gamma m)\,d\tau.\end{cases}$$

Ce résultat doit nous suggérer les réflexions suivantes :

1° L'expression qu'il convient d'adopter pour l'énergie magnétique est celle de Hertz et non aucune de celles de Maxwell.

2° Maxwell donne pour la première composante de cette force :

$$(cv_0 - bw_0 + \alpha m)\,d\tau$$

mais c'est l'expression (12) seule compatible avec la conservation de l'énergie, qu'il convient d'adopter.

3° La même analyse qui nous a permis de passer du cas de $\mu = 1$, au cas de μ quelconque, nous permettrait également, dans le calcul des forces dues au champ électrique de passer du cas de K constant au cas de K variable, c'est-à-dire du cas où l'on n'a qu'un seul diélectrique à celui où l'on a plusieurs diélectriques différents.

4° Tout ce que nous venons de dire s'applique seulement aux cas où les corps aimantés sont des corps solides qui se déplacent sans se déformer, en conservant leur pouvoir inducteur μ et en entraînant avec eux leur aimantation permanente. S'il y avait des corps magnétiques fluides ou déformables, on ne pourrait faire le calcul sans faire des hypothèses au sujet de l'influence de la déformation sur le coefficient μ et sur la distribution du magnétisme permanent. D'autre part le principe de la conservation de l'énergie ne pourrait plus être appliqué sous la même forme; car ces déformations et les variations qui en résulteraient pour μ et pour l'aimantation permanente pourraient entraîner des dégagements de chaleur.

5° Revenons à la formule (10) et cherchons à nous rendre compte de la signification de ses deux termes.

On doit se représenter les corps aimantés comme parcourus par d'innombrables petits courants particulaires. Dans les aimants permanents la direction de ces petits courants est invariable; dans les aimants induits leur orientation peut varier; mais il faut admettre que si un de ces petits courants est écarté par une cause quelconque de son orientation naturelle, il y a une certaine force élastique qui tend à l'y ramener.

Quand il n'y a pas de champ magnétique, les petits courants sont indifféremment orientés dans tous les sens et l'aimantation résultante est nulle. Sous l'action d'un champ magnétique extérieur, ces petits courants tendent à se

rapprocher d'une orientation commune, et l'aimantation induite apparaît. Si l'on supprime le champ, la force élastique dont je viens de parler ramène les courants à leur orientation primitive et l'aimantation induite disparaît.

Nous devons donc distinguer deux sortes d'énergie magnétique : l'énergie électrocinétique des courants particulaires et l'énergie due à la force élastique dont je viens de parler. Le premier terme de l'expression (10) représente l'énergie électrocinétique et le second terme représente cette énergie élastique particulière.

Maxwell dans son raisonnement sur les aimants, a calculé seulement le travail des forces magnétiques proprement dites ; c'est pour cela qu'il est arrivé à un résultat qui est en désaccord avec le principe de la conservation de l'énergie et même avec les résultats qu'il a obtenus lui-même dans une autre partie de son Ouvrage.

SUR LES EXCITATEURS

ET

RÉSONATEURS HERTZIENS

(A PROPOS D'UN ARTICLE DE M. JOHNSON).

L'Éclairage électrique, t. 29, p. 305-307 (30 novembre 1901).

M. Johnson a publié dans le numéro du 3 août (t. XXVIII, p. 178), sur la télégraphie sans fil, un article dont les conclusions sont tout à fait paradoxales. Il suffit de les lire pour voir qu'elles ne peuvent être acceptées, mais l'erreur de son raisonnement pourrait échapper à quelques lecteurs.

L'auteur adresse d'abord à la théorie de Hertz plusieurs objections qui me paraissent mal fondées; les plus importantes ne sont que la reproduction des critiques anciennes de MM. Hagenbach et Zehuder, déjà plusieurs fois réfutées.

M. Johnson propose ensuite un essai de théorie où je distinguerai deux parties : une théorie de l'excitateur et une théorie du résonateur.

La première partie mérite de fixer un instant l'attention. D'après les idées reçues, dès que la différence de potentiel des deux moitiés de l'excitateur est assez grande, l'étincelle éclate, la résistance de la distance explosive est brusquement supprimée et les oscillations commencent; pendant un certain temps, les conducteurs de l'excitateur sont parcourus par des courants alternatifs et la distance explosive par une étincelle oscillante.

D'après M. Johnson, les choses se passeraient tout autrement. Quand l'étincelle éclate, une certaine quantité d'électricité est transportée d'une des

moitiés de l'excitateur sur l'autre; mais immédiatement après la distance explosive redevient isolante. Mais des courants oscillants naissent dans les deux moitiés de l'excitateur, qui vibrent chacune pour leur compte.

Il résulte des calculs de M. Johnson que, si le petit condensateur formé par les deux boules de l'excitateur a une capacité suffisamment grande, les oscillations des deux moitiés de l'excitateur auront même période, et que cette période est celle qu'aurait l'oscillateur entier si la distance explosive était devenue conductrice. Cela resterait vrai si même les deux parties de l'excitateur n'étaient pas identiques.

L'hypothèse de M. Johnson n'est pas absurde par elle-même; mais elle se trouve contredite par les expériences de M. Décombe et de M. le lieutenant de vaisseau Tissot qui ont pu dissocier l'étincelle par un miroir tournant et ont montré ainsi qu'il y avait une série d'étincelles et non une étincelle unique de durée très courte comme le voudrait M. Johnson.

Cette hypothèse mérite néanmoins de retenir notre attention à deux points de vue.

Il n'est pas impossible que quand les oscillations ont cessé de passer à travers la distance explosive, elles continuent dans les deux moitiés de l'excitateur, sans que la période change beaucoup; il n'est pas probable qu'il en soit ainsi avec les excitateurs les plus employés, mais on peut se demander si cela ne pourrait pas se produire avec certains types d'excitateurs à très courte longueur d'onde.

Ensuite si le phénomène ne semble pas devoir être constaté dans les excitateurs, il se produit probablement dans les résonateurs ouverts. On constate que la longueur d'onde de ces résonateurs dépend surtout de leur longueur et peu de la position du micromètre à étincelles. On peut se demander comment cela peut se faire, puisque, avant l'explosion de l'étincelle, chacune des parties du résonateur vibre pour elle-même, tandis qu'après l'explosion le résonateur vibre comme un tout. Il semble qu'il y a dans la remarque de M. Johnson les éléments d'une explication; cette explication est d'ailleurs la même que j'ai développée ailleurs dans un volume de la collection Scientia.

C'est avec la théorie du résonateur que le paradoxe commence. D'après les calculs de M. Johnson, le résonateur (pourvu que la résonance soit parfaite) répondrait aussi bien quel que soit le coefficient d'induction mutuelle, c'est-à-dire quelle que soit la distance. L'auteur prétend expliquer par là les merveilleux effets de distance de la télégraphie sans fil. L'explication ne serait

guère satisfaisante, puisque justement, dans la télégraphie sans fil, la résonance est très imparfaite.

En tout cas l'énoncé est trop paradoxal pour ne pas exciter notre méfiance. Nous observerons d'abord que M. Johnson fait le calcul en supposant l'emploi d'un électromètre ; or, en télégraphie sans fil, on ne se sert pas d'électromètre mais de récepteurs qui fonctionnent suivant des lois essentiellement différentes.

Il est clair cependant que ce n'est pas là l'explication du paradoxe, car personne n'admettra qu'il suffise de se servir d'un électromètre pour communiquer avec l'étoile Sirius.

L'auteur ne paraît pas tenir compte des courants de déplacement qui, dans nos idées actuelles devraient jouer un rôle prépondérant. Ce n'est pas là non plus l'explication, car il est évident que l'énoncé de M. Johnson n'aurait pas semblé moins paradoxal avant Maxwell qu'aujourd'hui.

Il faut qu'il y ait là une simple faute de calcul et c'est en effet ce que l'on constate. Si, comme M. Johnson, nous supposons que

$$C_1 L_1 = C_2 L_2, \qquad C_1 R_1 = C_2 R_2$$

et si, passant à la limite (pour une distance infinie) nous faisons $\mu = 0$, il viendra $\rho = 0$, le rapport $\frac{\mu}{\rho}$ restant d'ailleurs fini. D'autre part, on aura [équations (13)] :

$$p_1 = p_2, \qquad q_1 = q_2$$

et par conséquent [équations (12 a)] :

$$X_1 + X_2 = Y_1 + Y_2 = 0$$

et l'expression de E_2 deviendra :

$$E_2 = (X_1 + X_2) e^{-q_1 t} \sin p_1 t + (Y_1 + Y_2) e^{-q_1 t} \cos p_1 t = 0.$$

On devrait donc trouver

$$\mathcal{J} = 0.$$

Or l'expression de $\mathcal{J}$, telle qu'elle est imprimée, ne conduit pas à ce résultat. Il y a des fautes d'impression évidentes, mais, même en les corrigeant, on voit que c'est dans le calcul de cette expression que M. Johnson s'est trompé. Il suffit d'ailleurs d'observer que $\mathcal{J}$ doit être nul pour comprendre que les conclusions sont erronées.

SUR

L'INDUCTION UNIPOLAIRE

L'Éclairage électrique, t. 23, p. 41-53 (14 avril 1900).

I. M. le Colonel de Nicolaïeve a dernièrement communiqué à l'Académie des Sciences (¹) diverses expériences curieuses sur la rotation continue d'un aimant soumis à l'action de divers systèmes de courants.

Le caractère paradoxal de ces expériences et d'autres analogues avait frappé plusieurs personnes qui avaient été jusqu'à se demander si le principe de l'égalité de l'action et de la réaction restait applicable dans toutes les circonstances.

D'autre part la question de l'induction unipolaire a donné lieu dans ces derniers mois à de nombreuses discussions et ici même (²) M. Raveau a exprimé à ce sujet des idées fort justes dans un article qui a été très remarqué.

Cependant toutes ces expériences sont susceptibles d'une explication des plus simples et elles ne présentent rien de mystérieux. Il suffit pour s'en rendre compte d'en revenir aux principes fondamentaux de l'électrodynamique.

Dans toutes ces expériences, l'appareil se compose :

1° D'un aimant présentant la forme d'un solide de révolution; cet aimant peut être fixe ou tourner autour de son axe; dans tous les cas le champ magnétique dû à cet aimant est invariable; car à cause de la forme symétrique de l'aimant, la rotation de l'aimant ne peut rien changer à ce champ.

2° D'un circuit voltaïque dont une partie est fixe, et l'autre susceptible de tourner autour de l'axe de l'aimant.

(¹) *C. R. Acad. Sc.*, t. 129, 24 juillet et 18 septembre 1899; *L'Éclairage électrique*, t. XX, p. 348 et t. XXI, p. 66.

(²) *L'Éclairage électrique*, t. XXII, 3 février 1900, p. 161.

Le courant passe de la partie fixe du circuit à la partie mobile par un contact mobile; mais deux cas sont à distinguer.

Si le contact se trouve sur l'axe de révolution du système, c'est toujours le *même* point du circuit fixe qui se trouve en contact avec le *même* point du circuit mobile; nous avons alors un *contact sans glissement*. Si, au contraire, le contact ne se trouve pas sur l'axe de révolution, un point du circuit fixe vient successivement en contact avec différents points du circuit mobile ou inversement, nous aurons ce que j'appellerai un *contact glissant*, soit que le glissement se fasse entre conducteurs solides, soit qu'une pointe métallique plonge dans un godet de mercure.

Nous ne tarderons pas à voir l'importance de cette distinction.

Considérons un système électrodynamique quelconque soumis à l'action d'un champ magnétique extérieur; envisageons un circuit voltaïque faisant partie de ce système; multiplions l'intensité du courant qui parcourt ce circuit par le flux d'induction magnétique dû au champ extérieur qui traverse le circuit; je désigne par T la somme des produits ainsi obtenus pour tous les circuits du système.

Cette somme représentera l'énergie électrodynamique due à l'action mutuelle du système électrodynamique et du champ extérieur.

(Je rappellerai en passant, pour éviter toute confusion, que si l'on voulait calculer l'énergie électrodynamique due à l'action d'un système électrodynamique sur *lui-même*, il faudrait après avoir fait la somme des produits obtenus par la règle ci-dessus, diviser cette somme par deux.)

Les attractions électrodynamiques ont toujours pour effet d'augmenter T et pour un déplacement infiniment petit du système, le travail de ces attractions est précisément δT. Pour savoir si un système électrodynamique va se mettre en mouvement, il faut chercher si un déplacement compatible avec les liaisons peut avoir pour effet d'augmenter T.

Telle est la règle que l'on peut déduire des principes généraux de l'électrodynamique; mais pour appliquer cette règle correctement, il faut bien en comprendre le sens.

Prenons d'abord un exemple un peu grossier.

Supposons un système formé de deux circuits. Dans une première position, le premier circuit est fermé et parcouru par un courant d'intensité i, le second circuit est ouvert et n'est parcouru par aucun courant; de plus les flux d'induction qui traversent les deux circuits sont respectivement A et B. Dans

ces conditions on a :

$$T = iA.$$

Le système passe dans une seconde position où les deux flux deviennent respectivement $A + \delta A$ et $B + \delta B$. Par conséquent l'énergie électrodynamique devient :

$$T + \delta T = i(A + \delta A).$$

Mais je suppose qu'en même temps un commutateur entre en jeu, ouvre le premier circuit où l'intensité devient nulle et ferme le second circuit où l'intensité devient j. L'énergie électrodynamique devient alors :

$$j(B + \delta B).$$

De sorte que cette énergie a subi deux accroissements différents; le premier

$$\delta T = i\,\delta A$$

dû directement au déplacement des circuits, et le second

$$\delta' T = j(B + \delta B) - i(A + \delta A),$$

dû à la mise en jeu du commutateur.

Il est bien clair dans ce cas que le travail des forces électrodynamiques sera égal à δT et non à $\delta T + \delta' T$ et qu'on n'a pas à se préoccuper dans le calcul de ces forces des variations que l'énergie T peut subir par suite du jeu du commutateur.

Supposons maintenant un système comprenant deux de ces contacts glissants dont je parlais tout à l'heure. A un moment donné, le courant suit à l'intérieur de la partie fixe du système le chemin ABC et dans la partie mobile le chemin DEF, C étant en contact avec D et F avec A. Dans un instant ultérieur, D et F cessent d'être en contact avec C et A par suite du mouvement de l'appareil et viennent respectivement en contact avec deux points C' et A appartenant à la partie fixe du système. Par conséquent le courant suivra toujours dans la partie mobile le chemin DEF, mais dans la partie fixe il suivra un chemin nouveau $A'B'C'$.

Soit AMC une ligne quelconque joignant les points A et C, nous regarderons cette ligne comme fixe et comme appartenant à la partie fixe du système.

Soit FND une ligne invariablement liée à la partie mobile du système et coïncidant avec AMC dans la première position de l'appareil. Soit enfin $A'M'C'$ la ligne fixe qui coïncide avec FND dans la seconde position de l'appareil.

Soient APA′, CQC′ les arcs lieux des points de la partie fixe qui se trouvent successivement en contact avec F et avec D.

J'aurai à envisager les circuits ABCMA, A′B′C′M′A′, CMAPA′M′C′QC, appartenant à la partie fixe et le circuit DEFND appartenant à la partie mobile. Soient φ_1, φ_2, φ_3, φ_4 les flux d'induction magnétique qui traversent ces quatre circuits, dans la première position et $\varphi_1 + \delta\varphi_1$, $\varphi_2 + \delta\varphi_2$, $\varphi_3 + \delta\varphi_3$, $\varphi_4 + \delta\varphi_4$, les flux qui les traversent dans la deuxième position.

Soit i l'intensite du courant, que dans ce genre de calcul il convient de considérer comme constante.

Dans la première position, on aura :

$$T = i(\varphi_1 + \varphi_4),$$

et dans la deuxième

$$T = i(\varphi_2 + \delta\varphi_2 + \varphi_4 + \delta\varphi_4).$$

Cela veut-il dire que le travail des forces électrodynamiques soit egal à la différence

$$\Delta T = i(\varphi_2 + \delta\varphi_2 - \varphi_1 + \delta\varphi_4)\,?$$

Évidemment non. Si la communication métallique n'avait pas ete rompue entre A et F et entre C et D, et si elle n'avait pas été établie entre A′ et F et entre C′ et D, le courant au lieu de suivre (dans la deuxième position) le chemin A′B′C′DEF, aurait suivi le chemin ABCQC′DEA′PA (comme si deux fils métalliques fictifs CQC′ et A′PA avaient maintenu la communication entre A et F d'une part, entre C et D d'autre part) et l'on aurait eu

$$T = i(\varphi_1 + \delta\varphi_1 + \varphi_3 + \varphi_4 + \delta\varphi_4),$$

de sorte que l'énergie aurait subi un accroissement

$$\delta T = i(\delta\varphi_1 + \delta\varphi_4 + \varphi_3 + \delta\varphi_3).$$

Le contact glissant en ouvrant de nouvelles communications métalliques et en en fermant d'autres a joué le rôle d'un commutateur ; le travail des forces électrodynamiques est égal à δT et non à ΔT et nous n'avons pas plus à tenir compte de la différence $\Delta T - \delta T$ que nous ne tenions compte tout à l'heure de la variation d'énergie due au jeu du commutateur.

Ainsi la condition pour qu'il se produise un mouvement, c'est que δT soit positif ; peu importe que ΔT soit nul.

S'il n'y avait que des contacts sans glissement, il n'y aurait ni rupture, ni

ouverture de communications métalliques et l'on aurait $\delta T = \Delta T$. On entrevoit déjà l'importance du rôle des contacts glissants.

Dans le cas qui nous occupe, le champ est invariable, de sorte que

$$\delta\varphi_1 = \delta\varphi_2 = 0,$$

puisque les deux premiers circuits sont fixes; de plus le champ est de révolution et le quatrième circuit est animé d'un mouvement de rotation autour de l'axe. On a donc :

$$\delta\varphi_4 = 0.$$

Dans la première position, le troisième circuit s'évanouit parce que les points A et A', C et C' se confondent. Donc

$$\varphi_3 = 0.$$

Nous pouvons admettre enfin à cause de la symétrie de l'appareil qu'on peut passer de la ligne ABC à la ligne A'B'C' par une simple rotation de sorte que

$$\varphi_2 = \varphi_1.$$

(En tout cas on retrouverait cette égalité après une révolution complète.)

On voit alors que

$$\Delta T = 0, \qquad \delta T = i\,\delta\varphi_3.$$

On en conclut tout de suite que s'il n'y a pas de contact glissant, il ne saurait y avoir de mouvement.

Cherchons maintenant le travail des forces électrodynamiques pendant une révolution complète, ce sera :

$$\int \delta T = i \int \delta\varphi_3.$$

Pendant cette révolution, la ligne AMC engendrera une certaine surface de révolution et $\int \delta\varphi_3$ est le flux d'induction qui traverse cette surface.

Cette surface de révolution forme la surface latérale d'une sorte de cylindre dont les deux bases sont les deux cercles limités par les circonférences décrites par les deux contacts glissants D et F. Comme le flux d'induction qui traverse une surface fermée quelconque est nul, le flux d'induction $\int \delta\varphi_3$ qui traverse la surface latérale doit être égal au signe près à la somme algébrique des flux d'induction qui traversent ces deux cercles de base.

D'où la règle suivante :

En multipliant l'intensité du courant par la somme algébrique des flux d'induction qui traversent les circonférences décrites par les différents contacts glissants dans leur rotation, on aura une quantité proportionnelle au travail des forces électromagnétiques dans une révolution complète et par conséquent au couple moteur.

Le seul énoncé de cette règle montre pourquoi il ne peut pas y avoir de rotation sans contact glissant.

2. Soit H la partie fixe de notre système; M la partie mobile du circuit, K l'aimant. D'après ce que nous venons de voir, M se mettra à tourner. Si M est rendu solidaire de l'aimant K, il l'entraînera dans sa rotation. Mais si K est indépendant de M, il ne tournera pas, car H et M font agir sur lui deux couples égaux et de sens contraire.

Si H, M et K pouvaient tous trois tourner autour de l'axe du système et si ces trois pièces étaient indépendantes, K ne bougerait pas, H et M tourneraient l'un dans un sens, l'autre dans l'autre.

Si H et M étaient rendues solidaires, la rotation s'arrêterait; il n'y aurait plus alors de contact glissant, car les deux pièces H et M ne pourraient plus glisser l'une sur l'autre.

Si H et M redevenant indépendantes, on rendait K solidaire soit de H, soit de M, l'aimant K serait entraîné soit dans la rotation de H, soit dans celle de M et tournerait par conséquent soit dans un sens, soit dans l'autre.

Tous ces faits n'ont rien de mystérieux et sont conformes au principe de l'égalité de l'action et de la réaction.

On voit que la rotation de l'aimant n'est qu'un fait pour ainsi dire secondaire; l'aimant tourne s'il est entraîné par une pièce tournante, comme le serait n'importe quel corps inerte rendu solidaire d'une pièce tournante.

Il est vrai que dans beaucoup de ces expériences, dans celle d'Ampère, par exemple, l'aimant est lui-même traversé par le courant; il est alors soumis directement à un couple, mais s'il tourne, ce n'est pas en tant qu'aimant, c'est en tant que conducteur.

3. On peut se demander maintenant si, quand on fera tourner les diverses

parties de l'appareil les unes par rapport aux autres, il se développera des forces électromotrices d'induction.

Si le flux d'induction qui traverse un circuit quelconque augmente de $\delta\varphi$ dans le temps δt, il en résulte dans ce circuit une force électromotrice égale à $\frac{\delta\varphi}{\delta t}$, que la variation du flux soit due à la variation du champ, ou au déplacement du circuit. Mais, si par suite de l'intervention d'un commutateur ou d'un contact glissant, le courant après avoir parcouru un certain circuit, vient à parcourir un circuit différent et si les flux qui traversent ces deux circuits ne sont pas les mêmes, il ne se produit pas une force électromotrice d'induction égale à l'accroissement du flux.

Reprenons nos notations et supposons que H soit de nouveau fixe, M et K susceptibles de tourner.

Le courant parcourt d'abord le circuit ABCDEFA qui est traversé par le flux $\varphi_1 + \varphi_4$. La partie mobile se déplace; si les communications métalliques n'étaient pas altérées par le jeu du contact glissant, le courant parcourrait le circuit ABCQC'DEFA'PA qui est traversé par le flux

$$(\varphi_1 + \delta\varphi_1) + (\varphi_4 - \delta\varphi_4) - (\varphi_4 - \delta\varphi_3) = \varphi_1 + \delta\varphi_3 + \varphi_4.$$

Mais à cause du contact glissant, il parcourt le circuit A'B'C'DEFA' qui est traversé par le flux

$$(\varphi_2 + \delta\varphi_2) + (\varphi_4 - \delta\varphi_2) = \varphi_2 + \varphi_4.$$

Or nous devons calculer la force électromotrice d'induction comme si le contact glissant n'avait pas agi. Cette force sera donc proportionnelle à

$$(\varphi_1 + \delta\varphi_3 + \varphi_4) - (\varphi_1 + \varphi_4) = \delta\varphi_3$$

et non à

$$(\varphi_2 + \varphi_4) - (\varphi_1 + \varphi_4) = \varphi_2 - \varphi_1 = 0.$$

Cette force sera donc proportionnelle à ce que nous appelions tout à l'heure $\int \delta\varphi_3$, ou ce qui revient au même :

La force électromotrice d'induction est proportionnelle à la somme algébrique des flux d'induction magnétique qui traversent les circonférences décrites par les contacts glissants dans leur rotation.

On remarquera que cette force est développée par la rotation de la partie M et qu'elle reste la même, soit que l'aimant demeure immobile, soit qu'il soit

entraîne dans la rotation de M. La rotation de l'aimant ne fait rien à l'affaire; celle du conducteur seule importe.

4. Dans ces conditions que doit-on penser de cette question? les lignes de force sont-elles entraînées dans la rotation de l'aimant?

Elle n'a par elle-même aucun sens puisque ces lignes de force ne sont qu'une création de notre esprit. Elle ne peut signifier qu'une chose; en appliquant la règle des lignes de force arrive-t-on à un résultat exact en les supposant fixes et à un résultat inexact en les supposant mobiles, ou bien est-ce le contraire?

Or nous allons voir que, en ce qui concerne les courants fermés, le résultat est le même, qu'on suppose ces lignes fixes ou mobiles; ce résultat est d'ailleurs exact.

Supposons que nous fassions tourner l'aimant K en même temps que la partie M du système, la partie H restant fixe. Si les lignes de force sont fixes, la partie H du circuit n'en coupera aucune, mais la partie M en coupera un certain nombre.

Si au contraire les lignes de force sont entraînées dans la rotation de K et de M, la partie M tournant avec les lignes de force, n'en coupera aucune; mais la partie H en coupera.

Dans les deux cas, le nombre total des lignes de force coupées par le circuit total H + M sera le même.

En effet, pour calculer le nombre de lignes de force coupées dans un petit mouvement quelconque, nous pouvons décomposer ce mouvement en deux parties; nous pouvons faire tourner M en laissant K immobile; et ensuite faire tourner K en laissant M immobile.

Dans la première partie, les lignes de force doivent être regardées comme fixes dans les deux hypothèses, puisque l'aimant est fixe. Nous n'avons donc à nous occuper que de la seconde partie du mouvement.

Dans cette seconde partie, si nous supposons les lignes de force fixes, comme le circuit H + M reste fixe, il ne coupe aucune ligne de force. Supposons maintenant les lignes de force entraînées par l'aimant, je dis que le nombre total des lignes de force coupées par le circuit fermé sera nul. En effet, le champ étant de révolution, le flux d'induction qui traverse le circuit H + M sera constant. Or la variation de ce flux est égale au nombre de lignes de force coupées par le circuit; ce nombre est donc nul.

Entendons-nous bien cependant. Je n'ai employé le mot de lignes de force que pour me conformer à l'usage, j'aurais dû dire *lignes d'induction magnétique*. La force magnétique est identique à l'induction magnétique à l'extérieur des aimants, et c'est à l'extérieur des aimants qu'on a le plus souvent à l'envisager, de sorte qu'aucune confusion n'est à craindre. Mais à l'intérieur des aimants, il est nécessaire de faire cette distinction.

Précisons donc : la force électromotrice d'induction cherchée dépend du nombre des lignes d'induction magnétique coupées et non du nombre des lignes de force. C'est donc le nombre de ces lignes d'induction qu'il convient de considérer. Le nombre des lignes d'induction coupées est égal à la variation du flux magnétique qui traverse le circuit : on le démontrerait à l'aide de la relation :

$$\frac{da}{dx} + \frac{db}{dy} + \frac{dc}{dz} = 0.$$

C'est ce nombre des lignes d'induction coupées par le circuit total qui reste le même, que ces lignes soient supposées fixes, ou qu'on les suppose entraînées par la rotation de l'aimant.

Or la seule chose que l'expérience puisse atteindre dans le cas des courants fermés, c'est la force électromotrice totale développée dans le circuit, c'est-à-dire le nombre total des lignes coupées par le circuit fermé.

On n'a donc aucun moyen de décider entre les deux hypothèses.

D'autre part l'observation des rotations magnétiques ne peut non plus rien nous apprendre, puisque la force électrodynamique qui agit sur un élément de courant est proportionnelle au parallélogramme construit sur cet élément et sur la force magnétique, sans qu'on ait à s'inquiéter de savoir si le champ est constant ou variable et par conséquent si la ligne de force magnétique est en repos ou en mouvement.

5. Il semble que la considération des circuits ouverts doit permettre de résoudre la question que les expériences sur les circuits fermés laissent indécise.

A défaut d'expériences à ce sujet, voyons ce que les principales théories proposées, celles de Hertz et de Lorentz, peuvent nous faire prévoir.

Imaginons un système comprenant : 1° un aimant; 2° divers conducteurs; 3° divers diélectriques. L'aimant est de révolution comme nous l'avons toujours supposé jusqu'ici et les diverses parties du système sont les unes fixes, les autres susceptibles de tourner autour de l'axe du système.

D'après la théorie de Hertz, si l'on appelle X, Y, Z, les composantes de la force électrique, l'intégrale

$$\int (X\,dx + Y\,dy + Z\,dz),$$

prise le long d'un contour fermé C, est égale à la dérivée du flux d'induction magnétique qui traverse ce contour. Dans le calcul de cette dérivée, il faut supposer que le contour est entraîné par le mouvement de la matière.

Si alors le contour fermé C est contenu tout entier dans une partie fixe du système, la variation du flux est nulle; car le champ, étant de révolution, demeure invariable que l'aimant tourne ou ne tourne pas. Notre intégrale est donc nulle.

Si le contour fermé C est contenu tout entier dans une partie tournante du système, cette variation sera encore nulle; car le champ est invariable et de révolution et le contour n'a d'autre déplacement qu'une rotation autour de l'axe de révolution. Notre intégrale est donc encore nulle.

L'expression

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz$$

est donc une différentielle exacte tant à l'intérieur des parties fixes qu'à l'intérieur des parties tournantes.

On aura donc soit dans les parties fixes, soit dans les parties tournantes :

$$X = \frac{dV}{dx}, \qquad Y = \frac{dV}{dy}, \qquad Z = \frac{dV}{dz},$$

V étant un potentiel.

Seulement la fonction V pourra subir une discontinuité quand on passera d'une partie fixe à une partie tournante ou inversement.

Soient P et P' deux parties du système en contact l'une avec l'autre et tournant respectivement avec des vitesses angulaires ω et ω'; je supposerai que la surface de séparation est une surface de révolution.

Soit ABCDA un contour fermé passant de l'une à l'autre et traversant la surface de séparation aux points A et C; la partie ABC du contour est dans P, la partie CDA dans P'. Quand on traverse la surface de séparation en passant de P en P', la fonction V subit une variation brusque que j'appelle δV; soit δV_1 la valeur de δV au point A et δV_2 la valeur de δV au point C. L'intégrale

$$\int (X\,dx + Y\,dy + Z\,dz)$$

prise le long du contour ABCDA sera évidemment :

$$\delta V_1 - \delta V_2.$$

Quelle sera d'autre part la variation du flux d'induction ; la partie ABC du contour, tournant avec la vitesse ω viendra au bout du temps 1 en $A'B'C'$; la partie CDA, tournant avec la vitesse ω' viendra en $C''D''A''$; de sorte que le contour ABCDA deviendra $A'B'C'C''D''A''A'$, les deux parties du contour étant après leur déplacement raccordées par deux arcs de cercle $C'C''$ et $A''A'$.

Joignons les points C et A par une ligne quelconque CQA appartenant à la surface de séparation ; joignons de même C' et A', C'' et A'' par des lignes $C'Q'A'$, $C''Q''A''$ qui s'obtiennent en faisant tourner CQA d'un angle ω ou d'un angle ω'. Nous aurons évidemment en désignant par la notation (flux ABCDA) le flux d'induction magnétique qui traverse le circuit ABCDA :

$$\text{flux ABCDA} = \text{flux ABCQA} + \text{flux CDAQC},$$
$$\text{flux } A'B'C'C''D''A''A' = \text{flux } A'B'C'Q'A' + \text{flux } C''D''A''Q''C'' + \text{flux } C'C''Q''A''A'Q'C',$$
$$\text{flux ABCQA} = \text{flux } A'B'C'Q'A',$$
$$\text{flux CDAQC} = \text{flux } C''D''A''Q''C'',$$

d'où :

$$\text{flux } A'B'C'C''D''A''A' - \text{flux ABCDA} = \text{flux } C'C''Q''A''A'Q'C',$$

d'où enfin :

$$\delta V_1 - \delta V_2 = \text{flux } C'C''Q''A''A'Q'C'.$$

Mais le second membre de cette dernière égalité est égal à $\frac{\omega' - \omega}{2\pi}\Phi$, Φ étant le flux qui traverse la portion de la surface de séparation (laquelle est de révolution, comme nous le savons) comprise entre le parallèle décrit par le point C et le parallèle décrit par le point A.

Ce flux Φ lui-même est égal à la différence des flux Φ_1 et Φ_2 qui traversent les deux cercles limités respectivement par le parallèle du point A et par le parallèle du point C. On a donc :

$$\delta_1 V - \delta V_2 = \frac{\omega' - \omega}{2\pi}(\Phi_1 - \Phi_2).$$

Si nous observons que V n'est déterminé qu'à une constante près et que nous avons le droit d'attribuer à cette constante deux valeurs différentes dans P et dans P', nous voyons que nous pouvons nous donner arbitrairement la valeur de δV en un point de la surface de séparation. Nous avons donc le droit de

prendre :

(1) $$\delta V_1 = \frac{\omega - \omega_1}{2\pi}\Phi_1; \qquad \delta V_2 = \frac{\omega - \omega_2}{2\pi}\Phi_2.$$

et nous aurions ainsi une règle très simple pour déterminer δV en un point quelconque de la surface de séparation de deux parties tournant avec des vitesses différentes.

Cela posé, il est facile de voir comment on devra calculer V ; ce potentiel se composera :

1° Du potentiel d'une double couche dont la densité sera $\frac{\delta V}{4\pi}$ et qui sera répandue sur les surfaces de séparation des diverses parties du système qui tourneront avec des vitesses de rotations différentes ;

2° Du potentiel de simples couches répandues à la surface des conducteurs ;

3° Du potentiel de simples couches répandues à la surface de séparation de deux diélectriques dont le pouvoir diélectrique est différent.

(Dans ce dernier cas, je parle de l'électrisation apparente de la surface des diélectriques par suite de la polarisation de ces diélectriques, ou en d'autres termes de ce que Hertz appelle l'électricité libre par opposition à l'électricité vraie.)

La densité des doubles couches est donnée par ce qui précède ; voyons comment se détermine la densité des simples couches.

Nous supposerons qu'aucun conducteur ne se compose de deux parties contiguës tournant avec des vitesses différentes ; sans cela l'équilibre ne serait pas possible, le conducteur serait continuellement parcouru par un courant, nous retomberions en somme sur le cas des circuits fermés que nous avons traité plus haut.

Si aucun conducteur ne se compose de deux parties en rotation relative, l'intégrale

$$\int (X\,dx + Y\,dy + Z\,dz)$$

prise le long d'un contour intérieur à ce conducteur sera nulle ; il ne s'établira donc pas à l'intérieur du conducteur de courant continu et l'équilibre ne tardera pas à être atteint. La condition de cet équilibre, c'est qu'on ait à l'intérieur du conducteur :

(2) $$X = Y = Z = 0, \qquad V = \text{const.}$$

D'autre part à la surface de séparation de deux diélectriques dont les pouvoirs diélectriques sont respectivement ε et ε' on devra avoir

$$(3) \qquad \varepsilon N = \varepsilon' N',$$

N et N' désignant la composante normale de la force électrique de part et d'autre de la surface de séparation.

Les relations (2) et (3) sont celles que l'on rencontre dans tous les problèmes d'électrostatiques; elles permettront de déterminer la densité des simples couches, celle des doubles couches étant connue par la relation (1).

Donc les simples couches seront celles qui se développent *par influence* à la surface des conducteurs et des diélectriques, sous l'action des doubles couches, d'après les règles ordinaires de l'électrostatique.

Ces doubles couches étant connues par l'équation (1), le problème peut être regardé comme entièrement résolu et cette analyse nous permettra en particulier de calculer la charge électrique qui se portera aux différents points de la surface des condensateurs.

6. Après avoir examiné la théorie de Hertz, voyons ce que donne celle de Lorentz.

Dans la théorie de Lorentz, si l'on désigne par f, g, h, les composantes du déplacement électrique; celles de la force électrique seront :

$$\frac{4\pi f}{K_0}, \quad \frac{4\pi g}{K_0}, \quad \frac{4\pi h}{K_0},$$

où K_0 est l'inverse du carré de la vitesse de la lumière. L'intégrale :

$$\int \frac{4\pi}{K_0}(f\,dx + g\,dy + h\,dz)$$

prise le long d'un contour fermé est encore égale à la variation du flux d'induction magnétique qui traverse ce contour, mais en supposant ce contour fixe et non pas entraîné dans le mouvement de la matière.

Il semble donc que nous allons être conduits à d'autres résultats que dans le paragraphe précédent.

Mais si nous posons :

$$X = \frac{4\pi f}{K_0} + \zeta b - \eta c,$$

$$Y = \frac{4\pi g}{K_0} + \xi c - \zeta a,$$

$$Z = \frac{4\pi h}{K_0} + \eta a - \xi b,$$

en désignant par a, b, c les composantes de l'induction magnétique et par ξ, η, ζ celles de la vitesse de la lumière, on trouve que l'intégrale

$$\int (X\,dx + Y\,dy + Z\,dz)$$

est égale à la variation du flux d'induction magnétique qui traverse le contour, le contour étant supposé entraîné dans le mouvement de la matière.

Donc cette intégrale aura même valeur que dans l'analyse de Hertz.

On aura donc tant à l'intérieur des parties fixes qu'à l'intérieur des parties tournantes

$$X = -\frac{dV}{dx}, \qquad Y = -\frac{dV}{dy}, \qquad Z = -\frac{dV}{dz};$$

et quand on passera d'une partie fixe à une partie tournante ou inversement, la fonction V subira un saut brusque δV qui sera donné par la formule (1).

D'après la théorie de Lorentz la force qui tend à mettre en mouvement un électron dans un conducteur a des composantes proportionnelles à

$$\frac{4\pi f}{K_0} + \zeta\beta - \eta\gamma,$$

$$\frac{4\pi f}{K_0} + \xi\gamma - \zeta\alpha,$$

$$\frac{4\pi f}{K_0} + \eta\alpha - \xi\beta.$$

En dehors de l'aimant, la force magnétique α, β, γ se confond avec l'induction magnétique a, b, c, de sorte que la force qui agit sur l'électron a ses composantes proportionnelles à

$$X, \quad Y, \quad Z.$$

Pour l'équilibre on doit donc avoir à l'intérieur du conducteur

$$X = Y = Z = 0, \qquad \text{d'où} \qquad V = \text{const}.$$

Quant à la densité de l'électricité à la surface du conducteur, elle est proportionnelle à la variation brusque que subit, en traversant cette surface, la composante normale du déplacement électrique f, g, h. D'autre part α, β, γ ne subissent pas de variations brusques et ξ, η, ζ n'en subissent pas non plus, si l'on suppose, pour plus de simplicité, que la surface du conducteur ne coïncide pas avec la surface de séparation de deux parties en rotation relative.

La densité de l'électricité est donc proportionnelle à la variation brusque éprouvée par la composante normale de la force X, Y, Z. Elle est donc, comme dans l'électrostatique ordinaire, proportionnelle à $\frac{dV}{dn}$ (dérivée du potentiel estimée suivant la normale à la surface du conducteur du côté extérieur au conducteur).

Nous retombons sur les mêmes conditions que dans la théorie de Hertz.

Enfin à la surface de séparation de deux diélectriques de pouvoir diélectrique différent, une analyse plus compliquée nous conduirait encore à la relation (3).

En résumé, pour tout ce qui est accessible à l'expérience, la théorie de Lorentz conduit aux mêmes résultats que celle de Hertz.

7. Particularisons un peu nos hypothèses pour fixer nos idées. La partie fixe du système se composera d'un condensateur dont les deux armatures seront deux plateaux annulaires métalliques; le centre de chacun de ces deux anneaux se trouvera sur l'axe de révolution du système (cet axe sera regardé comme vertical).

J'appellerai D la distance des deux plateaux, R et r le rayon extérieur et le rayon intérieur des anneaux.

Ces deux armatures seront réunies par un fil métallique.

Entre les deux plateaux métalliques, se trouvera un plateau annulaire d'ébonite susceptible de tourner autour de l'axe du système. J'appellerai e l'épaisseur de ce plateau et je supposerai que les rayons extérieur et intérieur de l'anneau sont encore R et r. La lame isolante du condensateur se compose ainsi d'une épaisseur d'ébonite e et d'une épaisseur d'air $D - e$.

L'aimant sera de révolution et pourra rester immobile ou tourner autour de l'axe du système. L'aimant sera un barreau cylindrique dont une extrémité, le pôle N par exemple, s'engagera à moitié dans le trou qui est au centre des trois plateaux annulaires de façon que cette extrémité vienne à peu près à la hauteur du plan horizontal médian du plateau d'ébonite.

Imprimons au plateau d'ébonite une vitesse ω.

Considérons une droite verticale traversant la lame isolante du condensateur, coupant en A l'armature supérieure, en B la base supérieure du plateau tournant d'ébonite, en C la base inférieure de ce plateau, en E l'armature inférieure du condensateur.

La fonction V a même valeur en A et en E puisque les deux armatures sont

reliées par un fil métallique; elle subit un saut brusque δV_1 en B et un autre saut brusque $-\delta V_2$ en C. Partout ailleurs on a :

$$\frac{dV}{dz} = Z,$$

on a donc

(4)
$$\int_A^E Z\,dz = \delta V_2 - \delta V_1.$$

Si j'appelle ρ la densité de l'électricité au point A à la surface du condensateur, on aura en ce point

$$4\pi\rho = Z.$$

D'autre part, si les lignes de force électrique peuvent être considérées comme se réduisant à des droites verticales, et les tubes de force comme des cylindres, le flux d'induction électrique qui traverse les diverses sections droites de l'un de ces cylindres peut être regardé comme constant.

En un point quelconque de la droite AE, on aura donc dans l'air : $4\pi\rho = Z$, et dans l'ébonite : $4\pi\rho = \varepsilon Z$; ε étant le rapport du pouvoir diélectrique de l'ébonite à celui de l'air. L'équation (4) devient donc :

$$4\pi\rho\left(\frac{e}{\varepsilon} + D - e\right) = \delta V_2 - \delta V_1.$$

Il est aisé de déduire de là la charge totale des armatures. Cette formule montre que la densité au point A est proportionnelle à $\delta V_2 - \delta V_1$, c'est-à-dire au flux d'induction magnétique qui traverse le cylindre de révolution dont le rayon est égal à la distance du point A à l'axe, ou plutôt la partie de ce cylindre qui est à l'intérieur du plateau d'ébonite.

On remarquera que ce flux d'induction magnétique diminuant rapidement quand le rayon du cylindre augmente, il n'y aura guère d'électricité que près du bord intérieur des anneaux.

8. Revenons alors à la question que nous nous étions posée; les lignes de force tournent-elles ou ne tournent-elles pas avec l'aimant?

Pour qu'on pût la résoudre, il faudrait que la règle des lignes de force appliquée dans une hypothèse donnât des résultats exacts et qu'elle en donnât d'inexacts dans l'hypothèse contraire.

Mais que veut-on dire quand on dit qu'on applique la règle des lignes de

force à un circuit ouvert? On sous-entend évidemment qu'on envisagera les lignes de force qui coupent la partie métallique du circuit, sans s'occuper de celles qui coupent la partie diélectrique, le diélectrique étant regardé comme inerte conformément aux idées des anciens électriciens.

Or il est clair, à ce compte, que la règle donnera des résultats inexacts dans l'une et l'autre hypothèse.

1° D'abord si l'on faisait tourner le plateau d'ébonite, en laissant l'aimant immobile, le condensateur se chargerait. Or d'après la règle des lignes de force, il ne devrait pas se charger, et cela dans aucune des deux hypothèses, puisque la partie métallique du circuit est fixe, et que l'aimant étant fixe, les lignes de force doivent dans les deux hypothèses être regardées comme fixes.

2° On pourrait presque dire que la charge prise par le condensateur ne dépend que de la rotation de l'ébonite et nullement de celle de l'aimant et qu'elle restera la même si l'aimant tourne et s'il ne tourne pas. Cela ne serait pas tout à fait vrai (car si l'aimant tourne, tout se passera comme si sa surface était recouverte d'une double couche fictive calculée comme je l'ai expliqué plus haut, et cette double couche chargera le condensateur par influence). Cela toutefois serait presque vrai (car la charge développée sur le condensateur par l'influence de la double couche fictive qui recouvre l'aimant serait, dans les conditions où nous nous sommes supposés placés, beaucoup plus petite que celle qui serait développée par l'influence de la double couche fictive qui recouvre l'ébonite); cela serait vrai en définitive dans la mesure où on a le droit de regarder les tubes de force électrique, entre les armatures du condensateur comme des cylindres à génératrices verticales.

3° Enfin la charge du condensateur dépend du pouvoir diélectrique des diverses parties du diélectrique et de leur vitesse de rotation. D'après la règle des lignes de force, quelle que soit l'hypothèse adoptée, elle n'en devrait pas dépendre.

Quelle sera donc notre conclusion?

Un aimant en rotation entraîne-t-il avec lui ses lignes de force?

Aussi bien dans le cas des circuits ouverts que dans le cas des circuits fermés, la question ne peut être résolue parce qu'elle n'a pas de sens.

SUR LES PROPRIÉTÉS

DES

ANNEAUX A COLLECTEURS

L'Éclairage électrique, t. 30, p. 77-81 (18 janvier 1902).

On se rappelle les articles qui ont paru sous ce même titre dans les numéros des 26 octobre, 23 et 30 novembre 1901 et la polémique à laquelle ont pris part MM. Leblanc, Latour et Heyland (¹). On se rappelle également quel était le dispositif adopté par M. Latour.

Bien que l'expérience semble avoir définitivement prononcé et avoir donné raison à M. Latour, il ne sera peut-être pas sans intérêt de revenir en quelques mots sur la question et d'examiner de plus près les raisonnements de M. Leblanc.

Je suppose que l'on ait p balais que je numérote 1, 2, ..., p; qu'il y ait pn lames du collecteur que je numérote de même de 1 à pn. Je numéroterai de même de 1 à pn les spires ou sections de l'induit, la spire 1 étant celle qui joint la lame 1 à la lame 2, la spire 2 celle qui va de la lame 2 à la lame 3, etc.

Je diviserai le temps en *périodes* et j'entends par période, *non pas la période des courants polyphasés qui alimentent l'appareil, mais l'intervalle de temps qui s'écoule depuis le moment où un balai quitte le contact d'une des lames du collecteur jusqu'au moment où il quitte le contact de la lame suivante.*

Alors pendant la période 1, le balai 1 sera en connexion avec les lames 1 et 2, le balai 2 avec les lames $n+1$ et $n+2$, le balai q avec les lames $(q-1)n+1$

(¹) *Voir* t. XXIX : M. Leblanc, p. 113; M. Latour, p. 244; A. Heyland, p. 328 et p. CLXXII; ainsi que p. CXIV.

et $(q-1)n+2$, et enfin le balai p avec les lames $(p-1)n+1$ et $(p-1)n+2$. Pendant la période 2, le balai 1 sera en connexion avec les lames pn et 1 et le balai q avec les lames $(q-1)n$ et $(q-1)n+1$. Pendant la période 3 le balai 1 sera en connexion avec les lames $pn-1$ et pn et le balai q avec les lames $(q-1)n-1$ et $(q-1)n$ et ainsi de suite.

Nous envisagerons, d'autre part, divers circuits que je définirai comme il suit : Le circuit C_1 ira du balai 1 au balai 2 à travers la lame 1, les spires 1, 2, 3, ..., n et la lame $n+1$. Plus généralement le circuit C_q ira du balai q au balai $q-1$ par la lame $(q-1)n+1$, les spires $(q-1)n+1$ à $(q-1)n+n$ et la lame $qn+1$. Le circuit C'_1 (court-circuit) ira du balai 1 au balai 1 à travers la lame 1, la spire 1 et la lame 2 et le circuit C'_q ira du balai q au balai q à travers la lame $(q-1)n+1$, la spire $(q-1)n+1$ et la lame $(q-1)n+2$.

Il résulte de ces définitions que le circuit C_1, par exemple, reste fermé pendant les deux périodes 1 et 2, puisque pendant ces deux périodes la connexion subsiste entre le balai 1 et la lame 1, et entre le balai 2 et la lame $n+1$. Il en est de même des autres circuits C_q. Au contraire les courts-circuits C'_1, C'_2, et C'_p ne resteront fermés que pendant la période 1.

Nous pourrons alors regarder les courants qui règnent dans l'induit comme la superposition de courants I_1, I_2, ..., I_p circulant dans les circuits C_1, C_2, ..., C_p et de courants i_1, i_2, ..., i_p circulant dans les circuits C'_1, C'_2, ..., C'_p.

Dans ces conditions,	l'intensité totale sera :
Dans la spire 1 :	I_1+i_1
Dans les spires 2, 3, ..., n :	I_1
Dans la spire $n+1$:	I_2+i_2
Dans les spires $n+2$, ..., $2n$:	I_2
Dans la lame 1 ... :	$I_1+i_1-I_p$
Dans la lame 2 ... :	$-i_1$
Dans les lames 3, 4, ..., n :	0
Dans la lame $n+1$:	$I_2+i_2-I_1$
Dans la lame $n+2$:	i_2.

J'appelle V_q le potentiel au balai q : E_q la force électromotrice entre le balai q et le balai $q+1$; J_q le courant qui arrive de l'extérieur au balai q ; de telle façon que l'on ait :

$$E_1 = V_1 - V_2; \qquad E_q = V_q - V_{q+1}; \qquad J_1 = I_1 - I_p; \qquad J_q = I_q - I_{q-1}.$$

J'appelle R la résistance d'une spire; j'appelle ρ_q la résistance de la lame q en y comprenant la résistance au contact de la touche correspondante du collecteur avec le balai. De cette façon, pendant la période 1, les résistances ρ_3, ρ_4, ..., ρ_n doivent être regardées comme infinies puisque les touches 3, 4, ..., n ne sont au contact d'aucun balai.

J'appelle u_q le flux magnétique qui traverse la spire q et je pose

$$U_1 = u_1 + u_2 + \ldots + u_n,$$

$$U_{q+1} = u_{q+1} + u_{q+2} + \ldots + u_{q+n}.$$

Nous aurons alors les équations suivantes qu'il nous reste à discuter :

$$(1) \qquad E_1 = \frac{dU_1}{dt} + (n-1)RI_1 + R(I_1 + i_1) + \rho_1(I_1 + i_1 - I_p) + \rho_{n+1}(I_1 - i_2 - I_2),$$

$$(2) \qquad 0 = \frac{du_1}{dt} + R(I_1 + i_1) + \rho_1(I_1 + i_1 - I_p) + \rho_2 i_1.$$

L'équation (1) se rapporte au circuit C_1 et l'équation (2) au circuit C'_1. Dans le second membre de (1) nous avons cinq termes : le premier représente la force électromotrice induite, le second se rapporte à la résistance des $n-1$ spires 2, 3, ..., n, le troisième à la résistance de la spire 1, le quatrième à celle de la lame 1, le cinquième à celle de la lame $n+1$. Dans le second membre de (2) nous avons quatre termes, le premier représente la force électromotrice induite, et les trois autres se rapportent à la résistance de la spire 1, de la lame 1 et de la lame 2.

Pour montrer que les critiques de M. Leblanc sont mal fondées, je pourrai me contenter de l'approximation suivante : je suppose que le nombre n soit grand, c'est ce que M. Leblanc suppose également; alors dans le second membre de (1), le second terme sera beaucoup plus grand que les trois suivants et en négligeant

$$Ri_1 + \rho_1(I_1 + i_1 - I_p) + \rho_{n+1}(I_1 - i_2 - I_2)$$

devant nRI_1 nous pourrons écrire :

$$(1\ bis) \qquad E_1 = \frac{dU_1}{dt} + nRI_1.$$

Supposons que les balais tournent avec une vitesse convenable pour qu'il y ait synchronisme, *le champ magnétique deviendra alors fixe dans l'espace;* cela n'est pas tout à fait exact comme l'a fait observer M. Leblanc, la direction du champ variera pendant la durée d'une période, mais *à la fin de chaque*

période, il redeviendra identique à ce qu'il était au commencement de cette période.

Donc u_1, u_2, ... et U_1 auront même valeur au commencement de la période 1 et au commencement de la période 2.

Nous aurons

$$\int E_1\,dt = nR\int I_1\,dt + \int dU_1$$

en étendant les intégrations à la période 1 tout entière. Je viens de dire que U_1 a même valeur au commencement de la période 1 et au commencement de la période 2. Donc

$$\int dU_1 = 0.$$

Nous avons donc

$$\int E_1\,dt = nR\int I_1\,dt,$$

ce qui veut dire que l'intensité moyenne pendant la période 1, est égale à la force électromotrice moyenne pendant la période 1, divisée par la résistance nR, comme s'il n'y avait pas de self-induction.

Comme, si le nombre n est grand, nos périodes sont très courtes, nous pouvons dire que tout se passe comme s'il n'y avait pas de self-induction. Nous retombons donc sur les conclusions de M. Latour.

Quel est donc le vice du raisonnement de M. Leblanc?

Dans chaque période nous devons distinguer deux phases : la phase normale pendant laquelle les balais restent au contact des mêmes touches du collecteur, et la phase de commutation. D'après M. Leblanc, pendant la phase normale, le champ, loin de rester fixe tourne avec la même vitesse que si les balais étaient immobiles; car tout se passe comme si le courant était amené par des bagues et non par des balais. Pendant la phase de commutation, qui est extrêmement courte, le champ est brusquement ramené en arrière à sa direction primitive.

Si alors nous divisons la période 1 en deux phases, la phase normale 1 *bis* suivie de la phase de commutation 1 *ter*, si nous appelons u'_q, u''_q et u'''_q les valeurs de u_q (et U'_1, U''_1, U'''_1 les valeurs de U_1), au commencement de la période 1, à la fin de la phase 1 *bis*, et enfin à la fin de la phase 1 *ter*, c'est-à-dire au commencement de la période 2, nous devrions avoir d'après M. Leblanc et dans l'hypothèse du synchronisme :

$$u'_q = u'''_q, \qquad u''_q = u'_{q-1}.$$

En effet à la fin de la période le champ a repris sa direction primitive. Donc la valeur finale u_q doit être égale à la valeur initiale u'_q. D'un autre côté au moment de la commutation la section $q-1$ prend brusquement la place de la section q, le flux $u''_{q-1} = u'_{q-1}$ doit donc être égal au flux u''_q.

Il viendrait ainsi :

$$U'''_1 - U''_1 = u''_{n+1} - u''_1$$

et comme u'_{n+1} n'est pas égal à u''_1 :

$$(3) \qquad U'''_1 - U''_1 \gtrless 0.$$

Or d'autre part si nous intégrons l'équation (1) par rapport au temps en étendant l'intégration à toute la phase de commutation (1 *ter*), nous trouvons :

$$U'''_1 - U''_1 = \int [E_1 - (n-1)RI_1 - R(I_1 + i_1) - \rho_1(I_1 + i_1 - i_p) + \rho_{p+1}(I_1 - I_2 - i_2)]\,dt.$$

La force électromotrice E_1 et les intensités restent finies, les résistances R et ρ restent finies puisque le circuit C_1 n'est pas rompu au moment de la commutation 1 *ter*. La fonction sous le signe $\int$ reste donc finie et comme la durée de la phase 1 *ter* est excessivement petite, l'intégrale peut être regardée comme nulle et l'on a :

$$U'''_1 - U''_1 = 0,$$

contrairement à l'inégalité (3).

L'hypothèse de M. Leblanc doit donc être rejetée. On aura toujours $u'_q = u'''_q$, puisque c'est là la définition même du synchronisme. Mais alors on ne pourra avoir $u''_q = u'_{q-1}$. Il n'est donc pas vrai que, pendant la phase normale 1 *bis*, tout se passe comme si le courant était amené non par des balais, mais par des bagues. Pendant cette phase, les balais *restent* en contact avec les mêmes touches du collecteur; mais il ne s'ensuit pas que tout se passe comme si les balais *étaient toujours restés* en contact avec ces mêmes touches, c'est-à-dire comme dans l'hypothèse des bagues. Le régime qui se produirait dans l'hypothèse des bagues, n'a pas le temps de s'établir dans le cas qui nous occupe; il est certain tout au moins qu'il ne peut s'établir immédiatement. Par conséquent, au moins pendant la première partie de la phase normale 1 *bis* (et à ce que je crois, pendant presque toute la durée de cette phase), les phénomènes sont tout différents de ce qu'ils seraient dans l'hypothèse des bagues. Tel est le défaut du raisonnement de M. Leblanc.

Il ne faudrait pas croire qu'en intégrant l'équation (2) comme nous avons intégré l'équation (1), on pourrait démontrer que

$$u_1''' - u_1'' = 0.$$

En effet, nous avons dans le second membre la résistance ρ_2 qui devient très grande, puis infinie pendant la phase de commutation parce que le contact de la lame 2 avec le balai 1 est rompu. Ainsi la différence $u_1''' - u_1''$ n'est pas nulle, mais quand on s'arrange pour avoir une bonne commutation elle est très petite.

J'ai fait plus haut une approximation en supposant n très grand. Je ne crois pas utile de démontrer que nos conclusions ne seraient pas modifiées par un calcul plus précis.

Cette polémique m'avait inspiré une série de réflexions et je les avais d'abord rédigées pour en faire la préface de cet article. Mais j'ai craint par trop de discours de dissimuler la simplicité du raisonnement qui précède. Je préfère donc différer la publication de ces réflexions et en faire l'objet d'un second article.

SUR LES PROPRIÉTÉS

DES

ANNEAUX A COLLECTEURS

L'Éclairage électrique, t. 30, p. 301-310 (1er mars 1902).

J'ai publié récemment [1], sous ce même titre, un article relatif à l'appareil de M. Latour. J'avais d'abord rédigé, pour servir d'introduction à cet article, une suite de réflexions se rapportant à des sujets connexes. J'ai ensuite jugé, ainsi que je l'ai expliqué à la fin de cet article, que ces réflexions pouvaient distraire l'attention du lecteur et lui dissimuler la simplicité du raisonnement, qu'en conséquence il valait mieux les séparer de l'article principal.

Néanmoins il ne sera peut-être pas inutile de reproduire ici ces réflexions, qui, pour la plupart se rapportent aux dynamos à courants continus.

1. Soient $C_1, C_2, \ldots, C_n$, un certain nombre de circuits fermés; I_k l'intensité du courant qui circule dans C_k; soit U_k le flux de force qui traverse le circuit C_k; soit L_k la self-induction et R_k sa résistance; E_k la force électromotrice qui règne dans ce circuit; soit $M_{jk} = M_k$ le coefficient d'induction mutuelle de C_k et de C_j, on aura les équations bien connues :

$$(1)\qquad \left\{ \begin{aligned} &\frac{dU_k}{dt} + R_k I_k = E_k; \\ &U_k = L_k I_k + \Sigma M_{kj} I_j. \end{aligned} \right.$$

[1] *L'Éclairage électrique*, t. XXX, 18 janvier 1902, p. 77. Ce tome, p. 37[illegible].

Qu'arrivera-t-il si l'un des circuits, le circuit C_1 par exemple vient à être rompu brusquement? La résistance R_1 va augmenter très rapidement pour devenir infinie au bout d'un temps très court; les autres résistances R_k resteront finies. Si nous écrivons l'équation (1) sous la forme :

$$U_k = L_k I_k + \Sigma M_{kj} I_j - \int (E_k - R_k I_k)\, dt + \text{const.},$$

et que nous étendions l'intégration à l'intervalle de temps très court pendant lequel dure la rupture, l'intégrale du second membre sera très petite pour $k = 2, 3, \ldots, n$, parce que la quantité sous le signe $\int$ est finie et que l'intervalle d'intégration est très petit; mais cela ne sera plus vrai pour $k = 1$, parce que la quantité sous le signe $\int$ est très grande.

Soient donc

$$J'_1, \quad J'_2, \quad \ldots, \quad J'_n,$$

les valeurs de $I_1, I_2, \ldots, I_n$ avant la rupture et U'_k la valeur correspondante de U_k et

$$J''_1, \quad J''_2, \quad \ldots, \quad J''_n,$$

leurs valeurs après la rupture et U''_k la valeur correspondante de U_k; on aura :

$$L_k J''_k + \Sigma M_{kj} J''_j = L_k J'_k + \Sigma M_{kj} J'_j \qquad (k = 2, 3, \ldots, n), \tag{2}$$

et d'autre part,

$$J''_1 = 0. \tag{3}$$

Ces équations (2) et (3) nous donnent les valeurs des courants après la rupture, quand on connaît leurs valeurs avant la rupture. Soit

$$T = \frac{1}{2} \Sigma L_k I_k^2 + \Sigma M_{kj} I_k I_j,$$

l'énergie électrocinétique totale; avant la rupture, sa valeur était

$$T' = \frac{1}{2} \Sigma L_k J'^2_k + \Sigma M_{kj} J'_k J'_j.$$

Elle sera après la rupture :

$$T'' = \frac{1}{2} \Sigma L_k J''^2_k + \Sigma M_{kj} J''_k J''_j.$$

Nous aurons evidemment :

$$\frac{dT}{dJ_k} = U_k,$$

et de même :

$$\frac{dT'}{dJ'_k} = U'_k = L_k J'_k + \Sigma M_{kj} J'_j; \qquad U''_k = L_k J''_k + \Sigma M_{kj} J''_j = \frac{dT''}{dJ''_k}.$$

Nous aurons évidemment :

$$2T = \Sigma J_k U_k, \qquad 2T' = \Sigma J'_k U'_k, \qquad 2T'' = \Sigma J''_k U''_k,$$

et d'autre part :

$$\Sigma J''_k U'_k = \Sigma J'_k U''_k.$$

Je dis que nous avons :

$$2T'' = \Sigma J''_k U'_k = \Sigma J'_k U''_k.$$

Il vient en effet, pour toutes les valeurs de k

$$J''_k U''_k = J''_k U'_k,$$

car pour $k > 1$, on a $U'_k = U''_k$ et pour $k = 1$, $J'' = 0$.

On aura donc :

$$2(T'' - T') = \Sigma J'_k (U''_k - U'_k)$$

ou puisque $U'_k = U_k$ pour $k > 1$:

$$2(T'' - T') = J'_1 (U''_1 - U'_1);$$

c'est là une première expression de la perte d'énergie due à la rupture.

Pour obtenir une seconde expression, j'observe que T' est une forme quadratique par rapport aux J'; que $U'_2, U'_3, \ldots, U'_n$ sont des fonctions linéaires des J'. Donc inversement $J'_2, J'_3, \ldots, J'_n$ seront des fonctions linéaires de

$$J'_1, \quad U'_2, \quad U'_3, \quad \ldots, \quad U'_n,$$

et par conséquent T' sera un polynome homogène du second degré par rapport à ces variables :

$$T' = P(J'_1, U'_2, U'_3, \ldots, U'_n).$$

Supposons que l'on donne à J'_1 une valeur déterminée, et qu'on cherche ensuite quel est le minimum de la fonction T' quand J'_1 est assujetti à conserver cette valeur. La fonction T' (qui est une forme définie positive) a certainement un minimum, puisqu'elle ne peut devenir négative.

Pour trouver ce minimum quand on prend pour variables les J', on a à résoudre les équations

(5) $$\frac{dT'}{dJ'_2} = \frac{dT'}{dJ'_3} = \ldots = \frac{dT'}{dJ'_n} = 0 \quad \text{ou} \quad U'_2 = U'_3 = \ldots = U'_n = 0.$$

Quand on prend pour variables $J'_1, U'_2, U'_3, \ldots, U'_n$, on a à résoudre :

(6) $$\frac{dP}{dU'_2} = \frac{dP}{dU'_3} = \ldots = \frac{dP}{dU'_n} = 0.$$

Les équations (6) sont donc équivalentes aux équations (5), c'est-à-dire que les dérivées $\frac{dP}{dU'}$ ne dépendent que des U' et pas de J'_1 ; on a :

$$\frac{d^2 P}{dU'_k\, dJ'_1} = 0 \qquad (k = 2, 3, \ldots, n),$$

c'est-à-dire que

$$T' = \frac{A_1 J'^2_1}{2} + \Phi(U'_2, U'_3, \ldots, U'_n),$$

Φ étant un polynome entier homogène par rapport aux U'. On aura de même :

$$T'' = \frac{A_1 J''^2_1}{2} + \Phi(U''_2, U''_3, \ldots, U''_n),$$

et à cause des équations (2) et (3), c'est-à-dire de $U'_k = U''_k$, $J''_1 = 0$:

$$T'' = \Phi(U'_2, U'_3, \ldots, U'_n);$$

d'où enfin :

(7) $$T' - T'' = \frac{A_1 J'^2_1}{2}.$$

Je suppose que c'est cette expression que M. Leblanc appelle, dans son article, l'énergie intrinsèque du circuit C_1 (?).

Remarquons que le coefficient A_1 est toujours plus petit que la self-induction L_1. Si en effet nous faisons

$$J'_2 = J'_3 = \ldots = J'_n = 0,$$

nous trouvons :

$$T' = \frac{L_1 J'^2_1}{2};$$

et si nous faisons ;

$$U'_2 = U'_3 = \ldots = U'_n = 0,$$

nous trouvons :

$$T' = \frac{A_1 J_1'^2}{2}.$$

Or nous venons de voir que c'est dans ce second cas que l'énergie T atteint son minimum.

Le sens physique de ce coefficient A_1 est d'ailleurs facile à saisir. Je suppose que l'on mette tous les courants C_2, C_3, ..., C_n en court-circuit, de façon que

$$E_2 = E_3 = \ldots = E_n = 0,$$

puis qu'on soumette le circuit C_1 à une force électromotrice E_1 d'alternance très rapide. A cause de cette rapidité d'alternance, nous pourrons négliger les résistances $R_k I_k$ devant les forces d'induction et écrire :

$$\frac{dL_1 I_1}{dt} + \sum \frac{dM_{1j}}{dt} = E_1, \qquad \frac{dL_k I_k}{dt} + \sum \frac{dM_{kj} I_j}{dt} = 0 \qquad (k = 2, 3, \ldots, n).$$

Alors les équations précédentes s'écrivent :

$$\frac{dU_1}{dt} = E_1, \qquad \frac{dU_k}{dt} = 0.$$

Donc les U_k sont des constantes qui doivent être nulles, puisque nous partons du repos :

$$U_k = 0 \qquad (k = 2, 3, \ldots, n).$$

On a alors :

$$T = \frac{A_1 I_1^2}{1} + \Phi(U_2, U_3, \ldots, U_k) = \frac{A_1 I_1^2}{2},$$

et

$$U_1 = \frac{dT}{dI_1} = A_1 I_1 = \sum \frac{d\Phi}{dU_k} \frac{dU_k}{dt} = A_1 I_1;$$

et en effet les dérivées de Φ par rapport aux U_k sont des fonctions linéaires des U_k qui s'annulent avec ces variables.

Notre équation devient donc :

$$\frac{dA_1 I_1}{dt} = E_1,$$

de sorte que notre coefficient A_1 n'est autre chose que la self-induction apparente du circuit C_1 quand les autres circuits sont placés en court-circuit.

Remarquons maintenant que A_1 est proportionnel au discriminant de la forme quadratique T. Ce discriminant ne sera jamais nul, mais quand il sera

très petit, le coefficient A_1 et par conséquent l'énergie perdue par la rupture seront également très petits.

Voyons sur un exemple simple comment cette circonstance pourra se présenter; supposons deux circuits seulement C_1 et C_2; on aura :

$$2T = L_1 I_1^2 + 2 M I_1 I_2 + L_2 I_2^2 = \left(L_1 - \frac{M^2}{L_2} \right) I_1^2 + \frac{U_2^2}{L_2},$$

$$U_2 = M I_1 + L_2 I_2.$$

On aura donc :

$$A_1 = L_1 - \frac{M^2}{L_2}.$$

Le discriminant et A_1 seront très petits quand $L_1 L_2 - M^2$ sera très petit, c'est-à-dire quand l'ensemble des deux circuits sera assimilable à un transformateur *sans perte magnétique sensible*. Si alors C_2 est mis en court-circuit et qu'on fasse passer un courant alternatif dans C_1, les flux magnétiques primaire et secondaire se compenseront sensiblement et la self-induction apparente, que nous avons appelée A_1, sera presque nulle.

2. Envisageons maintenant le cas inverse et supposons que le circuit C_1, d'abord ouvert, soit brusquement fermé. Un courant prendra naissance dans le circuit ainsi fermé.

Mais il ne faudrait pas croire que cette fermeture du courant a nécessairement pour conséquence l'augmentation de l'énergie électrocinétique T; elle peut tout aussi bien amener une diminution de cette énergie et cette remarque, comme on va le voir bientôt, est très importante.

Supposons, par exemple, pour prendre un cas simple, des forces électromotrices constantes et des circuits fixes, de sorte que les coefficients L et M soient constants.

Supposons pour simplifier encore deux circuits seulement, dont un seulement est d'abord fermé, l'autre étant rompu, et qu'on ferme ensuite l'un et l'autre.

On part d'un état de régime où l'on a :

$$I_1 = \frac{E_1}{R_1}, \qquad I_2 = 0,$$

et par conséquent :

$$T = \frac{L_1}{2} \left(\frac{E_1}{R_1} \right)^2;$$

et il tend à s'établir un nouveau régime où l'on a :

$$I_1 = \frac{E_1}{R_1}, \qquad I_2 = \frac{E_2}{R_2}, \qquad T = \frac{L_1}{2}\left(\frac{E_1}{R_1}\right)^2 + M\frac{E_1}{R_1}\frac{E_2}{R_2} + \frac{L_2}{2}\left(\frac{E_2}{R_2}\right)^2;$$

et il n'y a aucune raison pour que la seconde valeur de T soit plus grande que la première. Tout dépend des signes et des valeurs de M et de E_2.

D'autre part, il peut se faire qu'au moment où le nouveau circuit est brusquement fermé, on n'ait pas encore atteint un état de régime, parce que le régime antérieur aura été troublé pour une cause quelconque, et que la perturbation n'aura pas encore cessé au moment de la fermeture du courant.

Par exemple, reprenons l'ensemble de n circuits envisagé dans le paragraphe précédent; nous partons d'un état de régime où, si les forces électromotrices sont constantes et les circuits fixes, les intensités des courants sont

$$J_k = \frac{E_k}{R_k}.$$

Après la rupture du circuit C_1, les nouvelles intensités J' seraient données par nos équations :

$$J'_1 = 0, \qquad U'_k = U_k.$$

Mais l'état ainsi obtenu ne serait pas définitif, et au bout d'un certain temps les intensités seraient devenues :

$$I_1 = 0, \qquad I_k = \frac{E_k}{R_k}.$$

Il n'y a d'ailleurs aucune raison pour que l'énergie électrocinétique soit toujours plus grande (ou toujours plus petite) quand le régime sera établi, qu'immédiatement après la rupture.

J'ai voulu seulement appeler l'attention sur ces points; parce que, sans cela, quelques lecteurs auraient pu se laisser entraîner à tirer des conclusions hâtives. Et si nous ne pouvons rien affirmer dans les cas les plus simples que nous venons d'examiner, il est clair que dans les cas les plus complexes où les forces électromotrices sont variables et les circuits mobiles, nous ne pourrons rien affirmer non plus et que nous ne pouvons savoir d'avance si l'énergie électrocinétique T va augmenter ou diminuer quand on établira de nouvelles connexions.

3. Avant d'aller plus loin, rappelons la forme que prend en électrodynamique

l'équation de la conservation de l'énergie. L'énergie cinétique est égale à :

$$T^* = \frac{1}{2}\sum L_k I_k^2 + \sum M_{kj} I_k I_j = \frac{1}{2}\sum I_k U_k^*,$$

ou en supprimant les astérisques devenues inutiles :

$$(1) \qquad T = \frac{1}{2}\sum L_k I_k^2 + \sum M_{kj} I_k I_j = \frac{1}{2}\sum I_k U_k.$$

$$U_k = \frac{dT}{dI_k}.$$

Les équations de l'électricité s'écrivent :

$$(2) \qquad \frac{dU_k}{dt} + R_k I_k = E_k.$$

Dans la dérivée $\frac{dU_k}{dt}$ nous devons distinguer deux parties : celle qui provient de la variation des intensités et que j'appellerai ΔU_k, à savoir

$$\Delta U_k = L_k \frac{dI_k}{dt} + \sum M_{kj} \frac{dI_j}{dt}$$

et celle qui provient de la variation des coefficients L et M, c'est-à-dire du mouvement des circuits; je l'appellerai DU_k de sorte que :

$$DU_k = I_k \frac{dL_k}{dt} + I_j \frac{dM_{kj}}{dt} \qquad \text{et} \qquad \frac{dU_k}{dt} = \Delta U_k + DU_k.$$

De même dans la dérivée de T, nous distinguerons la partie qui provient de la variation des intensités, que j'appellerai ΔT, de sorte que :

$$\Delta T = \sum \frac{dT_k}{dI_k}\frac{dI_k}{dt} = \sum U_k \frac{dI_k}{dt} = \sum I_k \Delta U_k.$$

et la partie qui provient de la variation de L et M, et que j'appellerai $DT = \frac{d\tau}{dt}$, de sorte que :

$$DT = \frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{2}\sum I_k DU_k;$$

$$\frac{dT}{dt} = \Delta T + \frac{d\tau}{dt}.$$

On voit aisément que $d\tau$ représente alors le travail élémentaire des forces électrodynamiques. Si alors je multiplie les équations (2) par I_k et que j'ajoute;

il vient :

$$(5)\qquad \sum I_k \frac{dU_k}{dt} + \sum R_k I_k^2 = \sum E_k I_k.$$

$\sum R_k I_k^2 dt$ représente (en joules) l'énergie perdue sous forme de chaleur de Joule; je l'appelle dQ; $\sum E_k I_k dt$ représente l'énergie électrique empruntée à l'extérieur; je l'appelle dH :

$$\sum E_k I_k = \frac{dH}{dt}, \qquad \sum R_k I_k^2 = \frac{dQ}{dt}.$$

L'équation (3) devient donc :

$$\Delta T + 2\frac{d\tau}{dt} + \frac{dQ}{dt} = \frac{dH}{dt}$$

ou

$$\frac{dT}{dt} + \frac{d\tau}{dt} + \frac{dQ}{dt} = \frac{dH}{dt}.$$

Cette équation signifie que l'énergie dH empruntée à la source électrique se retrouve sous trois formes : 1° d'accroissement dT de l'énergie électrocinétique; 2° de travail mécanique $d\tau$; 3° de chaleur de Joule dQ.

4. Nous allons appliquer l'équation que nous venons de trouver :

$$dT + d\tau + dQ = dH,$$

aux différents problèmes qui nous occupent, mais auparavant pour la mieux faire comprendre, je voudrais en montrer l'application à un cas bien connu, celui des dynamos à courant continu. Le mouvement de la dynamo sera partagé en périodes toutes semblables; le commencement de chaque période étant marqué par le moment où le balai quitte l'une des lames du collecteur et la fin par le moment où il quitte la lame suivante.

Dans la chaleur de Joule dQ, nous distinguerons celle qui se produit dans les spires et que nous appellerons dQ', et celle qui se produit aux balais au moment de la rupture et que nous désignerons par dQ''.

$$dQ = dQ' + dQ''.$$

Cette chaleur dQ'', que l'on réduit par le décalage des balais, représente précisément la perte d'énergie qui se produit du fait de la rupture et que nous avons appelée $T' - T''$ au paragraphe 1.

Supposons pour fixer les idées, que la dynamo fonctionne comme moteur.

Pendant la durée d'une période, nous pourrons supposer que les coefficients L et M varient uniformément, de telle sorte que l'on ait :

$$\frac{dL_k}{dt} = \text{const.}, \qquad \frac{dM_{kj}}{dt} = \text{const.}$$

Si un régime s'établissait, les courants I_k deviendraient constants et leurs valeurs se déduiraient des équations linéaires :

$$I_k \frac{dL_k}{dt} + \sum I_j \frac{dM_{kj}}{dt} + R_k I_k = E_k.$$

Telles seraient les valeurs qu'atteindraient les intensités, si le régime avait le temps de s'établir.

Dans ces conditions on aurait :

$$\frac{dI_k}{dt} = 0, \qquad \Delta T = 0.$$

Nous négligerons dQ' (ainsi que les pertes dues à l'hystérésis). D'ailleurs dQ'' est nul sauf au moment de la commutation, de sorte qu'on devrait avoir :

$$2d\tau = dH = dT + d\tau.$$

ce qui voudrait dire que l'énergie électrique empruntée à l'extérieur se partagerait en deux parties égales; une des moitiés serait convertie en travail mécanique et l'autre servirait à augmenter l'énergie électrocinétique T.

Si donc les courants avaient une valeur constante pendant toute la période, la moitié de l'énergie empruntée à l'extérieur serait employée à augmenter T. Mais à la fin d'une période, T doit reprendre la même valeur, il faut donc que pendant la commutation, l'énergie T diminue brusquement et juste autant qu'elle a augmenté pendant le reste de la période.

Pendant la durée très courte de la rupture, on peut admettre que l'on a :

$$d\tau = dH = dQ' = 0.$$

Il resterait donc :

$$-dT = dQ''.$$

Ce qui voudrait dire que la diminution de l'énergie électrocinétique T se retrouverait dans la chaleur de l'étincelle de rupture. Or cette diminution serait égale à l'augmentation de T pendant le reste de la période, c'est-à-dire à la

moitié de l'énergie empruntée à l'extérieur. Ainsi le rendement de notre moteur serait seulement de $\frac{1}{2}$ et la moitié de l'énergie extérieure serait employée à démolir le collecteur.

Cette conséquence est inadmissible, et au contraire on se place dans des conditions telles que dQ'' soit très petit. Il est donc impossible d'admettre que les intensités des courants sont les mêmes qu'elles le seraient dans le régime.

Nous ne pouvons admettre non plus qu'il y a une phase d'établissement relativement très courte suivie d'une longue phase de régime. On aurait encore dans la phase du régime :

$$dT = d\tau = \frac{dH}{2}.$$

Pendant la phase d'établissement, le travail total $\int d\tau$ devrait être très faible, à cause de la courte durée de cette phase, on aura donc

$$\int dT = \int dH.$$

Si donc je désigne par T_1, τ_1, H_1 les intégrales T, τ, H pendant la phase de régime, par T_2, τ_2, H_2 les mêmes intégrales pendant la phase d'établissement, on aurait :

$$T_1 = \tau_1 = \frac{H_1}{2}; \qquad T_2 = H_2.$$

D'autre part, on a pendant la rupture

$$\int dT = -\int dQ';$$

et si la commutation est parfaite

$$\int dT = 0,$$

l'intégration étant étendue à la durée de la rupture.

Comme cette même intégrale $\int dT$ est nulle quand on l'étend à toute une période, parce que T doit reprendre la même valeur après une période, on devrait avoir

$$T_1 + T_2 = 0,$$

et par conséquent :

$$H_2 = -\frac{H_1}{2};$$

ce qui voudrait dire que l'on restituerait à la source extérieure pendant la phase d'établissement, la moitié de l'énergie qu'on lui aurait empruntée pendant la phase de régime.

C'est encore là une conséquence fantastique, et il faut admettre que les courants varient, principalement dans les parties en court-circuit, pendant toute la durée de la période.

Alors T subit une double variation, la première ΔT due aux variations des intensités, la seconde $d\tau$ due au déplacement des circuits. Les deux intégrales $\int \Delta T$, $\int d\tau$, étendues à toute la durée d'une période sont égales et de signe contraire.

Quelles que soient d'ailleurs ces variations, la résistance apparente du système n'en est pas affectée.

5. Supposons deux balais seulement, et $2n$ lames; je suppose que pendant la période considérée le premier balai est au contact des lames 1 et 2, le second au contact des lames $n+1$ et $n+2$; que pendant la période suivante, le premier balai est au contact des lames $2n$ et 1, et le second des lames n et $n+1$.

Le circuit C_1 sera formé des spires 1, 2, ..., n, en appelant spire 1 celle qui va de la lame 1 à la lame 2; le circuit C_2 se composera des spires $n+1$, $n+2$, ..., $2n$.

Nous avons en outre les circuits C_3, C_4 et C_5 formés des spires en court-circuit 1 et $n+1$ et du circuit d'excitation.

Soit u_k le flux qui traverse la spire k, nous aurons :

$$U_1 = u_1 + u_2 + \ldots + u_n, \qquad U_2 = u_{n+1} + \ldots + u_{2n};$$

de sorte que

$$U_1 + U_2 = \Sigma u$$

($U_1 + U_2$ est le plus souvent nul, mais nous ne nous servirons pas de cela).

Or

$$E_1 = R_1 I_1 + \frac{dU_1}{dt}, \qquad E_2 = R_2 I_2 + \frac{dU_2}{dt}, \qquad R_1 = R_2.$$

Donc :

$$E_1 + E_2 = R_1(I_1 + I_2) + \frac{d(U_1 + U_2)}{dt}$$

et

$$\int (E_1 + E_2)\,dt = R_1 \int (I_1 + I_2)\,dt + \int d(U_1 + U_2).$$

L'intégrale $\int d(U_1 + U_2)$ étendue à toute la durée d'une période est nulle ; non seulement parce que $U_1 + U_2$ est le plus souvent nul, mais parce que après une période, chaque spire ayant pris la place de la précédente, Σu ne peut avoir changé. On a donc :

$$\int (E_1 + E_2)\,dt = R_1 \int (I_1 + I_2)\,dt,$$

ce qui veut dire que le rapport de la force électromotrice *moyenne* à l'intensité *moyenne* est égal à la résistance.

Je termine ici ces réflexions qui me semblent montrer combien les phénomènes dans une dynamo continue s'écartent d'un régime régulier. On comprendra mieux ensuite, que dans l'appareil de M. Latour qui faisait l'objet de l'article cité, les phénomènes devaient également être tout à fait différents de ce qu'ils auraient été dans un régime régulier.

A PROPOS
DES EXPÉRIENCES DE M. CRÉMIEU

Revue générale des Sciences pures et appliquées, t. 12, p. 994-1007 (30 novembre 1901).

La *Revue* a rendu compte des récentes expériences de M. Crémieu ([1]), qui, si elles étaient confirmées par des recherches ultérieures, bouleverseraient complètement nos idées sur l'Électrodynamique.

Pour faire comprendre à quel point les idées de Crémieu sont révolutionnaires, il est nécessaire d'abord de résumer succinctement toute l'histoire de l'Électrodynamique et de remonter aux origines, c'est-à-dire à Ampère.

Je suivrai dans cette exposition un ordre *logique*, qui ne sera pas absolument d'accord avec l'ordre historique.

I. — Théorie d'Ampère.

Quand Ampère a étudié expérimentalement les actions mutuelles des courants, il n'a opéré et il ne pouvait opérer que sur des courants fermés.

Ce n'est pas qu'il niât la possibilité des courants ouverts. Si deux conducteurs sont chargés d'électricité de nom contraire et si on les met en communication par un fil, il s'établit un courant allant de l'un à l'autre et qui dure jusqu'à ce que les deux potentiels soient devenus égaux. Dans les idées qui régnaient du temps d'Ampère, c'était là un courant ouvert; on voyait bien le courant aller du premier conducteur au second, on ne le voyait pas revenir du second au premier.

([1]) Voyez à ce sujet la *Revue* du 15 novembre 1901, t. XII, p. 981.

Ainsi, Ampère considérait comme ouverts les courants de cette nature, par exemple les courants de décharge des condensateurs; mais il ne pouvait en faire l'objet de ses expériences, parce que la durée en est trop courte.

On peut imaginer aussi une autre sorte de courant ouvert. Je suppose deux conducteurs, A et B, reliés par un fil AMB. De petites masses conductrices en mouvement se mettent d'abord en contact avec le conducteur B, lui empruntent une charge électrique, quittent le contact de B, se mettent en mouvement en suivant le chemin BNA, et, en transportant avec elles leur charge, viennent au contact de A et lui abandonnent leur charge, qui revient ensuite en B en suivant le fil AMB.

On a bien là en un sens un circuit fermé, puisque l'électricité décrit le circuit fermé BNAMB; mais les deux parties de ce courant sont très différentes, dans le fil AMB, l'électricité se déplace *à travers* un conducteur fixe, à la façon d'un courant voltaïque, en surmontant une résistance ohmique et en développant de la chaleur; on dit qu'elle se déplace *par conduction;* dans la partie BNA, l'électricité est *transportée* par un conducteur mobile; on dit qu'elle se déplace *par convection*

Si, alors, le courant de convection est considéré comme tout à fait analogue au courant de conduction, le circuit BNAMB est fermé; si, au contraire, le courant de convection n'est pas « un vrai courant » et, par exemple, n'agit pas sur les aimants, il ne reste plus que le courant de conduction AMB, qui est *ouvert*.

Par exemple, si l'on réunit par un fil les deux pôles d'une machine de Holtz, le plateau tournant chargé transporte d'un pôle à l'autre par convection de l'électricité, qui revient au premier pôle par conduction à travers le fil.

Mais des courants de cette espèce sont très difficiles à réaliser avec une intensité appréciable. Avec les moyens dont disposait Ampère, on peut dire que c'était impossible.

En résumé, Ampère pouvait concevoir l'existence de deux espèces de courants ouverts, mais il ne pouvait opérer ni sur les uns ni sur les autres, parce qu'ils étaient trop peu intenses ou parce qu'ils duraient trop peu de temps.

L'expérience ne pouvait donc lui montrer que l'action d'un courant fermé sur un courant fermé, ou à la rigueur, l'action d'un courant fermé sur une portion de courant, parce que l'on peut faire parcourir à un courant un circuit *fermé* composé d'une partie mobile et d'une partie fixe. On peut alors étudier les déplacements de la partie mobile sous l'action d'un autre courant fermé.

En revanche, Ampère n'avait aucun moyen d'étudier l'action d'un courant ouvert, soit sur un courant fermé, soit sur un autre courant ouvert.

1. *Cas des courants fermés.* — Dans le cas de l'action mutuelle de deux courants fermés, l'expérience révéla à Ampère des lois remarquablement simples.

Je rappelle rapidement ici celles qui nous seront utiles dans la suite :

1° *Si l'intensité des courants est maintenue constante*, et si les deux circuits, après avoir subi des déplacements et des déformations quelconques, reviennent finalement à leurs positions initiales, le travail total des actions électrodynamiques sera nul.

En d'autres termes, il y a un *potentiel électrodynamique* des deux circuits proportionnel au produit des intensités et dépendant de la forme et de la position relative des circuits; le travail des actions électrodynamiques est égal à la variation de ce potentiel.

2° L'action d'un solénoïde fermé est nulle.

3° L'action d'un circuit C sur un autre circuit voltaïque C′ ne dépend que du « champ magnétique » développé par ce circuit C. En chaque point de l'espace, on peut, en effet, définir en grandeur et direction une certaine force appelée *force magnétique* et qui jouit des propriétés suivantes :

a. La force exercée par C sur un pôle magnétique est appliquée à ce pôle; elle est égale à la force magnétique multipliée par la masse magnétique du pôle;

b. Une aiguille aimantée très courte tend à prendre la direction de la force magnétique, et le couple qui tend à l'y ramener est proportionnel au produit de la force magnétique, du moment magnétique de l'aiguille et du sinus de l'angle d'écart;

c. Si le circuit C′ se déplace, le travail de l'action électrodynamique exercée par C sur C′ sera égal à l'accroissement du « flux de force magnétique » qui traverse ce circuit.

2. *Action d'un courant fermé sur une portion de courant.* — Supposons que le circuit C′ se compose de deux parties, l'une fixe, l'autre mobile; sur la figure 1, la partie fixe sera représentée, par exemple, par la ligne DBFMEAH,

tandis que la partie mobile AB se déplacera de façon que ses deux extrémités A et B glissent en s'appuyant sur les deux fils EAH et FBD.

Si un semblable circuit est soumis à l'action d'un courant fermé C, la partie mobile se déplacera comme si elle subissait l'action d'une force. Ampère *admet* que la force apparente à laquelle cette partie mobile AB semble ainsi soumise,

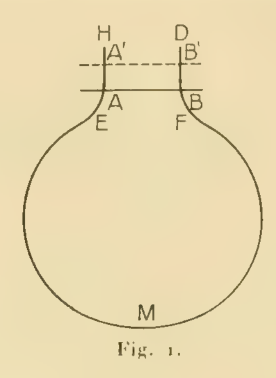


Fig. 1.

représentant l'action de C sur la portion AB du courant, est la même que si AB était parcouru par un courant ouvert qui s'arrêterait en A et en B, au lieu de l'être par un courant fermé qui, après être arrivé en B, revient en A par le chemin BFMEA à travers la partie fixe du circuit.

Cette hypothèse peut sembler assez naturelle; néanmoins, *elle ne s'impose pas*, puisque nous verrons plus tard que Helmholtz l'a rejetée. Quoi qu'il en soit, elle permit à Ampère, bien qu'il n'ait jamais pu réaliser un courant ouvert, d'énoncer les lois de l'action d'un courant fermé sur un courant ouvert, ou même sur un élément de courant.

Les lois restent simples :

1° La force qui agit sur un élément de courant est appliquée à cet élément; elle est normale à l'élément et à la force magnétique et proportionnelle à la composante de cette force magnétique qui est normale à l'élément;

2° L'action d'un solénoïde fermé sur un élément de courant reste nulle.

Mais il n'y a plus de potentiel électrodynamique, c'est-à-dire que, quand un courant fermé et un courant ouvert, dont les intensités ont été maintenues constantes, reviennent à leurs positions initiales, le travail total n'est pas nul.

3. *Rotations continues.* — Parmi les expériences électrodynamiques, les plus curieuses sont celles où l'on a pu réaliser des rotations continues et qu'on

appelle quelquefois expériences d'*induction unipolaire*. Un aimant peut tourner autour de son axe ; un courant parcourt d'abord un fil fixe, entre dans l'aimant par le pôle N par exemple, parcourt la moitié de l'aimant, en sort par un contact glissant et rentre dans le fil fixe.

L'aimant entre alors en rotation continue sans pouvoir jamais atteindre une position d'équilibre. C'est l'expérience de Faraday.

Comment cela est-il possible ? Si l'on avait affaire à deux circuits de forme invariable, l'un fixe C, l'autre C' mobile autour d'un axe, ce dernier ne pourrait jamais prendre de rotation continue ; en effet, il existe un potentiel électrodynamique ; il y aura donc forcément une position d'équilibre, ce sera celle où ce potentiel sera maximum.

Les rotations continues ne sont donc possibles que si le circuit C' se compose de deux parties : l'une fixe, l'autre mobile autour d'un axe, comme cela a lieu dans l'expérience de Faraday. Encore convient-il de faire une distinction. Le passage de la partie fixe à la partie mobile ou inversement peut se faire, soit par un contact simple (le même point de la partie mobile restant constamment en contact avec le même point de la partie fixe), soit par un contact glissant (le même point de la partie mobile venant successivement en contact avec divers points de la partie fixe).

C'est seulement dans le second cas qu'il peut y avoir rotation continue. Voici ce qui arrive alors : le système tend bien à prendre une position d'équilibre ; mais, quand elle va être atteinte, le contact glissant met la partie mobile en communication avec un nouveau point de la partie fixe ; elle change les connexions, elle change donc les conditions d'équilibre, de sorte que, la position d'équilibre fuyant, pour ainsi dire, devant le système qui cherche à l'atteindre, la rotation peut se poursuivre indéfiniment.

Ampère admet que l'action du circuit sur la partie mobile de C' est la même que si la partie fixe de C' n'existait pas et si, par conséquent, le courant qui circule dans la partie mobile était ouvert.

Il conclut donc que l'action d'un courant fermé sur un courant ouvert, ou inversement celle d'un courant ouvert sur un courant fermé, peut donner lieu à une rotation continue.

Mais cette conclusion dépend de l'hypothèse que je viens d'énoncer et qui, ainsi que je l'ai dit plus haut, n'est pas admise par Helmholtz.

On peut se rendre compte d'une autre manière des rotations continues qui doivent se produire dans la théorie d'Ampère.

Envisageons l'action mutuelle d'un aimant rectiligne et d'un élément de courant E. Cette force mutuelle sera appliquée à l'élément E et non pas sur l'axe de l'aimant ; son moment par rapport à cet axe ne sera donc pas nul. Si, en particulier, l'aimant est indéfini dans un sens, de telle façon que, l'un des pôles étant très éloigné, l'action de l'aimant se réduise à celle de l'autre pôle, nous pourrons dire que la force mutuelle qui s'exerce entre un pôle magnétique et un élément de courant n'est pas appliquée au pôle, mais à l'élément.

Si, au lieu d'un élément isolé, nous avions affaire à un courant fermé, l'action du courant fermé serait la résultante des actions de ses divers éléments. Chacune des composantes serait appliquée à l'élément correspondant, mais la résultante serait appliquée au pôle, de sorte que son moment par rapport à l'axe de l'aimant serait nul.

4. *Action mutuelle de deux courants ouverts.* — En ce qui concerne l'action mutuelle de deux courants ouverts et, en particulier, celle de deux éléments de courant, toute expérience fait défaut. Ampère a recours à l'hypothèse. Il suppose : 1° que l'action mutuelle de deux éléments se réduit à une force dirigée suivant la droite qui les joint ; 2° que l'action de deux courants fermés est la résultante des actions mutuelles de leurs divers éléments, lesquelles sont, d'ailleurs, les mêmes que si ces éléments étaient isolés.

Ce qui est remarquable, c'est qu'Ampère fait ces deux hypothèses sans s'en apercevoir, puisque, par une singulière illusion, il intitule son immortel Ouvrage : *Théorie des phénomènes électrodynamiques, uniquement fondée sur l'expérience.*

Quoi qu'il en soit, ces deux hypothèses, jointes aux expériences sur les courants fermés, suffisent pour déterminer complètement la loi de l'action mutuelle de deux éléments.

Mais alors, la plupart des lois simples que nous avons rencontrées dans le cas des courants fermés ne sont plus vraies.

D'abord, il n'y a pas de potentiel électrodynamique ; il n'y en avait d'ailleurs pas non plus, comme nous l'avons vu, dans le cas d'un courant fermé agissant sur un courant ouvert.

Ensuite, il n'y a plus, à proprement parler, de force magnétique.

Et, en effet, nous avons donné plus haut de cette force trois définitions différentes :

1° Par l'action subie par un pôle magnétique;

2° Par le couple directeur qui oriente l'aiguille aimantée;

3° Par l'action subie par un élément de courant.

Or, dans le cas qui nous occupe maintenant, non seulement ces trois définitions ne concordent plus, mais chacune d'elles est dépourvue de sens, et en effet :

1° Un pôle magnétique n'est plus simplement soumis à une force unique appliquée à ce pôle. Nous avons vu, en effet, que la force due à l'action d'un élément de courant sur un pôle n'est pas appliquée au pôle, mais à l'élément; elle peut, d'ailleurs, être remplacée par une force appliquée au pôle et par un couple;

2° Le couple qui agit sur l'aiguille aimantée n'est plus un simple couple directeur; car son moment par rapport à l'axe de l'aiguille n'est pas nul. Il se décompose en un couple directeur proprement dit et un couple supplémentaire qui tend à produire la rotation continue dont j'ai parlé plus haut;

3° Enfin, la force subie par un élément de courant n'est pas normale à cet élément.

En d'autres termes, *l'unité de la force magnétique a disparu.*

Voici en quoi consiste cette unité. Deux systèmes qui exercent la même action sur un pôle magnétique, exerceront aussi la même action sur une aiguille aimantée infiniment petite, ou sur un élément de courant, placés au même point de l'espace où était ce pôle.

Eh bien, cela est vrai si ces deux systèmes ne contiennent que des courants fermés; cela ne serait plus vrai, d'après Ampère, si ces systèmes contenaient des courants ouverts.

Il suffit de remarquer, par exemple, que, si un pôle magnétique est placé en A et un élément en B, la direction de l'élément étant sur le prolongement de la droite AB, cet élément, qui n'exercera aucune action sur ce pôle, en exercera une, au contraire, soit sur une aiguille aimantée placée au point A, soit sur un élément de courant placé au point A.

5. *Induction.* — On sait que la découverte de l'induction électrodynamique ne tarda pas à suivre les immortels travaux d'Ampère.

Tant qu'il ne s'agit que de courants fermés, il n'y a aucune difficulté, et Helmholtz a même remarqué que le principe de la conservation de l'énergie pouvait suffire pour déduire les lois de l'induction des lois électrodynamiques d'Ampère.

Le même principe permet encore cette déduction dans le cas des courants ouverts, quoique, bien entendu on ne puisse soumettre le résultat au contrôle de l'expérience, puisque l'on ne peut réaliser de pareils courants.

Si l'on veut appliquer ce mode d'analyse à la théorie d'Ampère sur les courants ouverts, on arrive à des résultats bien faits pour nous surprendre.

D'abord, l'induction ne peut se déduire de la variation du champ magnétique d'après la formule bien connue des savants et des praticiens et, en effet, comme nous l'avons dit, il n'y a plus à proprement parler de champ magnétique.

Mais il a plus. Si un circuit C est soumis à l'induction d'un système voltaïque variable S; si ce système S se déplace et se déforme d'une manière quelconque, que l'intensité des courants de ce système varie suivant une loi quelconque, mais qu'après ces variations, le système revienne finalement à sa situation initiale, il semble naturel de supposer que la force électromotrice *moyenne* induite dans le circuit C est nulle.

Cela est vrai si le circuit C est fermé et si le système S ne renferme que des courants fermés. Cela ne serait plus vrai, si l'on accepte la théorie d'Ampère, dès qu'il y aurait des courants ouverts. De sorte que, non seulement l'induction ne sera plus la variation du flux de force magnétique dans aucun des sens habituels de ce mot, mais elle ne pourra pas être représentée par la variation de quoi que ce soit.

II. — Théorie de Helmholtz.

J'ai insisté sur les conséquences de la théorie d'Ampère et de sa façon de comprendre l'action des courants ouverts.

Il est difficile de méconnaître le caractère paradoxal et artificiel des propositions auxquelles on est ainsi conduit; on est amené à penser que « ça ne doit pas être ça ».

On conçoit donc que Helmholtz ait été amené à chercher autre chose.

Helmholtz rejette l'hypothèse fondamentale d'Ampère, à savoir que l'action

mutuelle de deux éléments de courant se ramène à une force dirigée suivant la droite qui les joint.

Il admet qu'un élément de courant n'est pas soumis à une force unique, mais à une force et à un couple. C'est même ce qui a donné lieu à la polémique célèbre de Bertrand et d'Helmholtz.

Helmholtz remplace l'hypothèse d'Ampère par la suivante : deux éléments de courant admettent toujours un potentiel électrodynamique, dépendant uniquement de leur position et de leur orientation, et le travail des forces qu'ils exercent l'un sur l'autre est égal à la variation de ce potentiel.

Dans le cas des courants fermés, seul accessible à l'expérience, les deux théories concordent; dans tous les autres cas, elles diffèrent.

D'abord, contrairement à ce que supposait Ampère, la force à laquelle semble soumise la portion mobile d'un courant fermé n'est pas la même que cette portion mobile subirait si elle était isolée et constituait un courant ouvert.

Revenons à la figure 1 ; dans la seule expérience réalisable, la portion mobile AB n'est pas isolée, mais fait partie d'un circuit fermé ABFMEA. Quand elle vient en A′B′, le potentiel électrodynamique total varie pour deux raisons : 1° il subit un premier accroissement parce que le potentiel de A′B′ par rapport au circuit C n'est pas le même que celui de AB; 2° il subit un second accroissement, parce qu'il faut l'augmenter des potentiels des éléments AA′ et B′B par rapport à C.

C'est ce *double* accroissement qui représente le travail de la force à laquelle la portion AB semble soumise.

Si, au contraire, AB était isolée, le potentiel ne subirait que le premier accroissement, et c'est ce premier accroissement seulement qui mesurerait le travail de la force qui agit sur AB.

En second lieu, il ne peut pas y avoir de rotation continue sans contact glissant; et, en effet, c'est là, comme nous l'avons vu à propos des courants fermés, une conséquence immédiate de l'existence d'un potentiel électrodynamique.

Dans l'expérience de Faraday, si l'aimant est fixe et si la partie du courant extérieure à l'aimant parcourt un fil mobile, cette partie mobile pourra subir une rotation continue. Mais cela ne veut pas dire que si l'on supprimait les contacts du fil avec l'aimant et qu'on fît parcourir le fil par un courant *ouvert*, le fil prendrait encore un mouvement de rotation continue.

Je viens de dire, en effet, qu'un élément *isolé* ne subit pas la même action qu'un élément mobile faisant partie d'un circuit fermé.

Autre différence : L'action d'un solénoïde fermé sur un courant fermé est nulle d'après l'expérience et d'après les deux théories; son action sur un courant ouvert serait nulle d'après Ampère; elle ne serait pas nulle d'après Helmholtz.

D'où une conséquence importante. Nous avons donné plus haut trois définitions de la force magnétique; la troisième n'a ici aucun sens puisqu'un élément de courant n'est plus soumis à une force unique. La première n'en a pas non plus. Qu'est-ce, en effet, qu'un pôle magnétique? C'est l'extrémité d'un aimant linéaire indéfini. Cet aimant peut être remplacé par un solénoïde indéfini. Pour que la définition de la force magnétique eût un sens, il faudrait que l'action exercée par un courant ouvert sur un solénoïde indéfini ne dépendît que de la position de l'extrémité de ce solénoïde, c'est-à-dire que l'action sur un solénoïde fermé fût nulle. Or, nous venons de voir que ce n'était pas vrai.

En revanche, rien n'empêche d'adopter la deuxième définition, celle qui est fondée sur la mesure du couple directeur qui tend à orienter une aiguille aimantée.

Mais, si on l'adopte, ni les effets d'induction ni les effets électrodynamiques ne dépendront uniquement de la distribution des lignes de force de ce champ magnétique.

III. — Difficultés soulevées par ces théories.

La théorie de Helmholtz est un progrès sur celle d'Ampère; il s'en faut cependant que toutes les difficultés soient aplanies. Dans l'une comme dans l'autre, le mot de champ magnétique n'a pas de sens, ou, si on lui en donne un par une convention plus ou moins artificielle, les lois ordinaires, si familières à tous les électriciens, ne s'appliquent plus; c'est ainsi que la force électromotrice induite dans un fil n'est plus mesurée par le nombre des lignes de force rencontrées par ce fil.

Et nos répugnances ne proviennent pas seulement de ce qu'il est difficile de renoncer à des habitudes invétérées de langage et de pensée. Il y a quelque chose de plus. Si nous ne croyons pas aux actions à distance, il faut expliquer

les phénomènes électrodynamiques par une modification du milieu. C'est précisément cette modification que l'on appelle champ magnétique, et alors les effets électrodynamiques ne devraient dépendre que de ce champ.

Toutes ces difficultés proviennent de l'hypothèse des courants ouverts.

On peut même présenter l'objection sous une autre forme : Peut-il exister des courants ouverts? Cela dépend de la définition que l'on donne du courant. Si par courant on entend seulement courant de conduction, il est clair qu'il existe des courants ouverts; nous en avons cité des exemples. Mais si l'on appelle courant *ce qui agit sur le galvanomètre*, tous les courants sont fermés par définition.

Et, en effet, si l'on décrit un petit contour entourant le fil parcouru par le courant, celui-ci sera égal *par définition* à la force magnétique mesurée par la déviation de l'aiguille aimantée, ou plutôt à la valeur moyenne de cette force le long de ce contour.

Donc, si l'on a une aire quelconque, la somme algébrique des intensités des courants qui traversent cette aire sera proportionnelle au travail de la force magnétique le long du contour qui limite cette aire. Ce sera là la définition même du courant.

Imaginons alors qu'il existe un courant ouvert AMB (*fig.* 2), et soit B une de ses extrémités. Soit CPDQ un volume quelconque en forme de lentille.

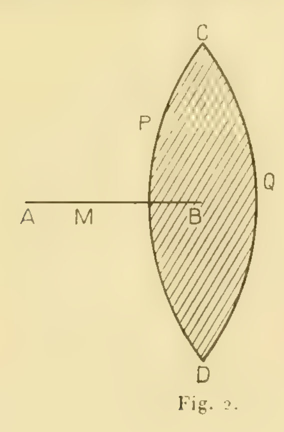


Fig. 2.

contenant B à son intérieur. Sur la figure, j'aurai en CPD la section d'une des faces de la lentille et en CQD la section de l'autre face.

La courbe qui sert de contour commun à ces deux faces coupe le plan de la figure en C et en D.

Alors, le travail de la force magnétique le long de cette courbe CD sera proportionnel à la somme des courants qui traversent la face CPD limitée par cette courbe. Il ne sera donc pas nul, puisque cette face est traversée par le courant AMB. D'autre part, ce travail sera proportionnel à la somme des courants qui traversent la face CQD limitée également par cette courbe. Il sera donc nul, puisque cette face n'est traversée par aucun courant.

Il y a donc contradiction, et, si l'on définit le courant par le galvanomètre, il ne peut y avoir de courant ouvert, et il ne s'agit pas de savoir si le courant se ferme, mais *comment il se ferme*. On peut appliquer cela en particulier à la théorie de Helmholtz, et l'on voit alors que cette théorie revient en somme à admettre que les courants de conduction ouverts sont fermés par certains courants auxiliaires dont l'expression est assez simple, et qui ne sont pas sans analogie avec les courants de déplacement de Maxwell.

IV. — **Théorie de Maxwell.**

Telles étaient les difficultés soulevées par les théories régnantes quand parut Maxwell, qui, d'un trait de plume, les fit toutes disparaître. Dans ses idées, en effet, il n'y a plus que des courants fermés.

Maxwell admet que, si, dans un diélectrique, le champ électrique vient à varier, ce diélectrique devient le siège d'un phénomène particulier agissant sur le galvanomètre comme un courant et qu'il appelle *courant de déplacement*.

Si alors deux conducteurs portant des charges contraires sont mis en communication par un fil, il règne dans ce fil pendant la décharge un courant de conduction ouvert; mais il se produit en même temps, dans le diélectrique ambiant, des courants de déplacement qui ferment ce courant de conduction.

On sait que la théorie de Maxwell conduit à l'explication des phénomènes optiques, qui seraient dus à des oscillations électriques extrêmement rapides.

Au bout de vingt ans, les idées de Maxwell reçurent la confirmation de l'expérience. Hertz parvint à produire des systèmes d'oscillations électriques qui reproduisent toutes les propriétés de la lumière et n'en diffèrent que par la longueur d'onde, c'est-à-dire comme le violet diffère du rouge. Il fit en quelque sorte la synthèse de la lumière.

On pourrait dire que Hertz n'a pas démontré directement l'idée fondamentale de Maxwell, l'action du courant de déplacement sur le galvanomètre. C'est vrai

dans un sens, et ce qu'il a montré directement, en somme, c'est que l'induction électromagnétique ne se propage pas instantanément comme on le croyait, mais avec la vitesse de la lumière.

Seulement, supposer qu'il n'y a pas de courant de déplacement et que l'induction se propage avec la vitesse de la lumière; ou bien, supposer que les courants de déplacement produisent des effets d'induction et que l'induction se propage instantanément, *cela est la même chose.*

C'est ce qu'on ne voit pas au premier abord, mais ce que l'on démontre par une analyse que je ne puis même songer à résumer ici.

V. — **Expériences de Rowland.**

Mais, je l'ai dit plus haut, il y a deux sortes de courants de conduction ouverts : Il y a d'abord les courants de décharge d'un condensateur ou d'un conducteur quelconque.

Il y a aussi les cas où des charges électriques décrivent un contour fermé, en se déplaçant par conduction dans une partie du circuit et par convection dans l'autre partie.

Pour les courants ouverts de la première sorte, la question pouvait être regardée comme résolue : ils étaient fermés par les courants de déplacement.

Pour les courants ouverts de la deuxième sorte, la solution paraissait encore plus simple; si le courant était fermé, ce ne pouvait être, semblait-il, que par le courant de convection lui-même. Pour cela, il suffisait d'admettre qu'un « courant de convection », c'est-à-dire un conducteur chargé en mouvement, pouvait agir sur le galvanomètre.

Mais la confirmation expérimentale manquait. Il paraissait difficile, en effet, d'obtenir une intensité suffisante, même en augmentant autant que possible la charge et la vitesse des conducteurs.

Ce fut Rowland, un expérimentateur extrêmement habile, qui le premier triompha ou parut triompher de ces difficultés. Un disque recevait une forte charge électrostatique et une très grande vitesse de rotation. Un système magnétique astatique, placé à côté du disque, subissait des déviations.

L'expérience fut faite deux fois par Rowland : une fois à Berlin, une fois à Baltimore; elle fut ensuite reprise par Himstedt. Ces physiciens crurent même pouvoir annoncer qu'ils avaient pu effectuer des mesures quantitatives.

En fait, depuis une vingtaine d'années, la loi de Rowland était admise sans contestation par tous les physiciens.

Tout, d'ailleurs, paraissait la confirmer. L'étincelle produit certainement un effet magnétique; or, ne semble-t-il pas vraisemblable que la décharge par étincelle est due à des particules arrachées à l'une des électrodes et transportées sur l'autre électrode avec leur charge? Le spectre même de l'étincelle, où l'on reconnaît les raies du métal de l'électrode n'en est-il pas une preuve? L'étincelle serait alors un véritable courant de convection.

D'un autre côté, on admet aussi que, dans un électrolyte, l'électricité est convoyée par les ions en mouvement. Le courant dans un électrolyte serait donc aussi un courant de convection; or, il agit sur l'aiguille aimantée.

De même pour les rayons cathodiques; Crookes attribuait ces rayons à l'effet d'une matière très subtile, chargée d'électricité négative, et animée d'une très grande vitesse; il les regardait, en d'autres termes, comme des courants de convection. Or, ces rayons cathodiques sont déviés par l'aimant. En vertu du principe de l'action et de la réaction, il doivent à leur tour dévier l'aiguille aimantée.

Il est vrai que Hertz crut avoir démontré que les rayons cathodiques ne convoient pas d'électricité négative et qu'ils n'agissent pas sur l'aiguille aimantée. Mais Hertz se trompait; d'abord Perrin a pu recueillir l'électricité transportée par ces rayons et dont Hertz niait l'existence; le savant allemand paraît avoir été trompé par des effets dus à l'action des rayons X, qui n'étaient pas encore découverts. Ensuite, et tout récemment, on a mis en évidence l'action des rayons cathodiques sur l'aiguille aimantée.

Ainsi, tous ces phénomènes regardés comme des courants de convection, étincelles, courants électrolytiques, rayons cathodiques, agissent de la même manière sur le galvanomètre et conformément à la loi de Rowland.

VI. — Théorie de Lorentz.

On ne tarda pas à aller plus loin. D'après la théorie de Lorentz, les courants de conduction eux-mêmes seraient de véritables courants de convection : l'électricité resterait indissolublement attachée à certaines particules matérielles appelées *électrons*; ce serait la circulation de ces électrons à travers les corps qui produirait les courants voltaïques, et ce qui distinguerait les conducteurs

des isolants, c'est que les uns se laisseraient traverser par ces électrons, tandis que les autres arrêteraient leurs mouvements.

La théorie de Lorentz est très séduisante, elle donne une explication très simple de certains phénomènes dont les anciennes théories, même celle de Maxwell sous sa forme primitive, ne pouvaient rendre compte d'une façon satisfaisante, par exemple, l'aberration de la lumière, l'entraînement partiel des ondes lumineuses, la polarisation magnétique, l'expérience de Zeeman.

Quelques objections subsistaient encore. Les phénomènes dont un système est le siège semblaient devoir dépendre de la vitesse absolue de translation du centre de gravité de ce système, ce qui est contraire à l'idée que nous nous faisons de la relativité de l'espace. A la soutenance de M. Crémieu, M. Lippmann a mis cette objection sous une forme saisissante. Supposons deux conducteurs chargés, animés d'une même vitesse de translation. Il sont en repos relatif; cependant, chacun d'eux équivalant à un courant de convection, ils doivent s'attirer, et l'on pourrait, en mesurant cette attraction, mesurer leur vitesse absolue.

Non, répondaient les partisans de Lorentz; ce que l'on mesurerait ainsi, ce n'est pas leur vitesse absolue, mais leur vitesse relative *par rapport à l'éther*, de sorte que le principe de relativité est sauf.

Quoi qu'il en soit de ces dernières objections, l'édifice de l'Électrodynamique semblait, au moins dans ses grandes lignes, définitivement construit; tout se présentait sous l'aspect le plus satisfaisant; les théories d'Ampère et de Helmholtz, faites pour les courants ouverts qui n'existaient plus, ne semblaient plus avoir qu'un intérêt purement historique, et l'on avait à peu près oublié les complications inextricables auxquelles ces théories conduisaient.

VII. — Premières expériences de M. Crémieu.

C'est cette quiétude que les expériences de M. Crémieu sont venues troubler. Ce jeune physicien débuta par une expérience fort intéressante, dont je ne parlerai pas ici parce qu'elle ne se rapporte à notre sujet qu'indirectement et que cet article est déjà trop long, mais qui le mit sur la voie de ses recherches ultérieures en lui inspirant des doutes sur les résultats de Rowland.

Dans les expériences de Rowland, l'appareil astatique magnétique doit-être très sensible et placé tout près du disque tournant; on peut craindre dans ces conditions des perturbations, soit électrostatiques, à cause des fortes charges que porte ce disque, soit mécaniques, à cause des courants d'air dus à sa rotation rapide.

D'un autre côté, si un courant de convection produit un champ magnétique, il doit produire également des effets d'induction; et, au lieu d'observer la déviation d'une aiguille astatique, on peut observer les courants induits par un courant de convection variable dans un circuit voisin.

Pour mesurer ces courants induits, il faudra naturellement encore une aiguille astatique; mais on pourra l'éloigner autant qu'on voudra du disque tournant et, par conséquent, des causes perturbatrices.

Dans ces conditions, les résultats obtenus furent négatifs.

Le dispositif, toutefois, différait beaucoup de celui de Rowland, et, avant d'aller plus loin, il importait de reprendre les expériences du savant américain dans des conditions identiques ou aussi peu différentes que possible. Les résultats restèrent négatifs *en général*, mais il faut reconnaître qu'ils furent beaucoup plus capricieux. Dans certaines séries, on constata des déviations de l'appareil astatique. Ces déviations purent souvent être attribuées avec certitude à une cause perturbatrice déterminée; d'autres fois elles restèrent sans explication satisfaisante.

Si l'on considère toutefois que les résultats ont été constamment négatifs dans de nombreuses séries où le disque tournant était à découvert (au moins dans la partie voisine de l'aiguille aimantée), pourvu que cette aiguille fût mise à l'abri des perturbations électrostatiques par un tube de cuivre formant écran; que, dans d'autres circonstances où l'on avait observé une déviation de la plaque de mica portant les aiguilles aimantées, *cette déviation subsistait encore quand les aiguilles aimantées étaient enlevées*, ce qui prouvait bien son origine électrostatique, on sera frappé de l'importance de ces perturbations électrostatiques et l'on sera porté à accorder plus de confiance à la première forme de l'expérience où ces perturbations sont complètement écartées.

Remarquons pourtant que Rowland avait eut soin d'enfermer son aiguille aimantée dans un tube métallique formant écran et que les résultats avaient été positifs.

Les expériences de Crémieu peuvent sembler convaincantes à ceux qui les ont vues; mais on ne peut oublier pourtant que Rowland était un expéri-

mentateur tout aussi habile, qu'il a montré ses résultats à plusieurs savants éminents et que ces savants ont été également convaincus.

Dans ces conditions, on hésite à se prononcer et l'on en vient à désirer qu'une sorte de tiers arbitre tranche définitivement la question. Quelques personnes avaient commencé des recherches en Angleterre, mais elles ne paraissent pas les avoir poussées jusqu'au bout.

De son côté, Rowland s'était remis au travail et voulait reprendre les expériences de Crémieu et les siennes. C'est alors malheureusement que la mort est venue le surprendre. Certes, à n'importe quel moment la mort d'un physicien aussi éminent aurait été une perte cruelle pour la Science, mais elle est pour nous aujourd'hui doublement fâcheuse. Qui pouvait mieux que lui découvrir la cause des divergences entre les résultats du savant français et les siens? Celui qui voudra les chercher maintenant, eût-il même l'habileté de Rowland, ne pourra connaître aussi bien que lui les détails de son appareil et la façon dont il a opéré autrefois.

VIII. — **Critiques diverses.**

Les critiques de Crémieu ont généralement suivi une autre voie; ils n'ont pas contesté les résultats expérimentaux; ils ont cherché plutôt à montrer qu'on aurait pu les prévoir; que, loin d'être contraires à la loi de Rowland, ils en étaient une confirmation indirecte.

La plupart de ces critiques se sont trop pressés; la thèse de M. Crémieu vient seulement de paraître, et jusque-là on ne connaissait que quelques Notes succinctes insérées aux *Comptes rendus*; il en résulte que beaucoup des observations qu'on avait cru pouvoir faire, ou bien ne se rapportaient pas exactement aux expériences qui avaient été réellement faites, ou bien étaient réfutées d'avance par d'autres formes de ces mêmes expériences.

Quelques-unes de ces objections ont cependant plus de portée; je ne puis les discuter ici en détail, mais je voudrais, au moins, en indiquer l'esprit et faire voir d'une façon générale ce qu'on peut en tirer.

On sait que Faraday a substitué le premier aux anciennes idées classiques sur l'électricité une façon entièrement différente d'envisager les choses. Pour lui, la réalité véritable, ce n'est plus un fluide électrique circulant dans des conducteurs, mais une certaine modification du diélectrique qui cesse d'être

purement inerte et devient le siège du phénomène principal. Ce qui joue le premier rôle, c'est donc le « champ électrique », « le champ magnétique » et la distribution des « lignes de force ».

Ces conceptions, considerées d'abord comme paradoxales, sont aujourd'hui familières à tout le monde, aux praticiens comme aux théoriciens. C'est de Faraday que Maxwell procède directement; les théories qui sont sorties de celle de Maxwell, par exemple celles de Hertz et de Lorentz, dérivent donc des idées de Faraday. Mais cela ne veut pas dire qu'il y a identité entre la pensée de Faraday et celle de Lorentz.

La théorie de Lorentz est sortie de celle de Faraday, mais beaucoup d'autres en auraient pu sortir. La pensée de Faraday n'était qu'une forme encore vague et indéterminée, une sorte de pâte molle, qui pouvait se préciser de bien des manières. C'est justement ce qui en a fait la fécondité.

En ce qui concerne la question de la convection qui nous occupe maintenant, les partisans de Faraday n'admettront pas qu'on identifie à un courant voltaïque un conducteur chargé en mouvement; cela serait croire que l'électricité est quelque chose; cela serait, à leurs yeux, un matérialisme grossier. Mais il diront qu'un champ magnétique doit se produire si les lignes de force électrique sont en mouvement.

Les lignes de force, pour eux, ne sont pas, en effet, de simples entités mathématiques; ce sont des objets réels, et c'est pourquoi ils croient s'entendre eux-mêmes quand ils disent que ces objets sont en repos ou en mouvement, de même que les anciens électriciens croyaient s'entendre eux-mêmes quand ils parlaient du mouvement de l'électricité, qui pour eux était une chose.

Mais cela ne suffit pas; pour que cette considération puisse servir à quelque chose, il faut savoir reconnaître si ces lignes sont en mouvement. Elles peuvent se mouvoir, soit; mais comment saurons-nous si elles se meuvent?

Le problème s'est posé d'abord à propos des lignes de force magnétique, et a donné lieu à de longues polémiques. Les lignes de force émanées d'un aimant qui tourne, tournent-elles avec cet aimant ou restent-elles immobiles? Selon la réponse à cette question, il semblait, à en croire beaucoup d'auteurs, que certains phénomènes, et en particulier ceux de « l'induction unipolaire », devaient être très différents. J'ai montré ailleurs qu'il n'en était rien et que la question n'a pas de sens.

En ce qui concerne les lignes de force électrique, au contraire, la question ne peut être éludée et, suivant la solution qu'on lui donnera, on arrivera à des

conséquences absolument différentes. Un courant voltaïque circule dans un fil. Admettrons-nous que les lignes de force qui aboutissent à ce fil se déplacent de façon que leurs extrémités se meuvent le long de ce fil, dans le sens du courant; ou même devrons-nous admettre deux systèmes de lignes de force, les unes positives, les autres négatives et se déplaçant en sens contraire ? Il le faut bien, si nous voulons rendre compte des effets magnétiques du courant voltaïque, et si nous croyons qu'un champ magnétique ne peut être dû qu'au mouvement des lignes de force électrique.

Supposons maintenant un disque chargé tournant; entraînera-t-il les lignes de force dans sa rotation, ou resteront-elles immobiles? Aucune de ces deux hypothèses ne peut être regardée comme en contradiction avec les idées de Faraday; et cependant, dans un cas, la loi de Rowland est vraie; dans l'autre, elle est fausse.

Ce qui est gênant, c'est que chacune de ces interprétations contradictoires peut, à son tour, apparaître comme la seule naturelle, suivant le point de vue où l'on se place.

Faraday, Maxwell lui-même avaient beaucoup laissé dans le vague. Leurs successeurs ont cherché à préciser ; quelques-uns croyaient y être parvenus, et deux théories complètes s'étaient édifiées, celle de Hertz et celle de Lorentz.

Chacune de ces deux théories prétendait prévoir ce qui se passerait dans un cas quelconque. Elle nous prédisait, en particulier, et sans ambiguïté, ce que devaient donner les différentes expériences de Crémieu; or, ce n'est pas ce qu'elles ont donné. Donc, ou bien Crémieu s'est trompé, ce que des expériences nouvelles pourront seules nous apprendre, ou bien la théorie de Lorentz, comme celle de Hertz sont fausses.

Mais, répond-on, laissons Hertz et Lorentz de côté, et revenons à Faraday. Le résultat de Crémieu est ce que la doctrine de Faraday nous permettait de prévoir. Cela est possible, car cette doctrine est plastique et peut prendre bien des formes, mais à ce compte elle permettait également de prévoir le résultat contraire.

Il y aurait sans doute beaucoup à tirer des écrits dont je parle. Mais à une condition : il aurait fallu que l'auteur commencât par distinguer entre les différentes interprétations possibles des vues de Faraday, qu'il les définit avec précision, puis qu'il s'attachât à discerner celles que l'expérience de Crémieu confirme et celles qu'elle contredit.

Loin de là, la plupart du temps, il se borne à constater, avec satisfaction, qu'elles ne sont pas toutes contredites.

Ce qu'il n'a pas fait, il faut donc que le lecteur le fasse pour lui. A ce prix, il pourra tirer du fruit de sa lecture; il n'en tirera aucun, au contraire, s'il conclut simplement : « Ah ! oui, ce que Crémieu a trouvé était facile à prévoir », et s'il croit ainsi que toutes les façons contradictoires de comprendre Faraday sont confirmées en bloc, celles de Hertz et de Lorentz comme les autres.

On comprend aisément la préoccupation qui a guidé ces critiques, dont beaucoup sont Anglais. Évidemment, les publications de Crémieu ont jeté l'alarme parmi les admirateurs de Maxwell; et alors ceux-ci s'efforcent de démontrer que nous ne serons pas réduits à abandonner les conquêtes de Faraday et de Maxwell. Cela, je l'espère bien, mais ce n'est pas de cela qu'il s'agit.

J'ai cru devoir insister sur ces observations, parce qu'il serait à craindre que ces critiques, mal comprises, ne fissent regarder comme inutiles ces expériences nouvelles qui, selon moi, sont nécessaires.

I. *Influence des écrans.* — D'après ce qui précède, on comprend pourquoi ces polémiques n'ont pas donné tous les fruits qu'on en aurait pu attendre. Je m'arrêterai seulement sur un point.

Dans une des nombreuses séries d'expériences qu'il a exécutées, M. Crémieu, qui continuait à avoir des résultats exclusivement négatifs quand l'appareil était enfermé dans une boîte métallique entièrement close, obtenait, au contraire, des déviations de l'aiguille aimantée quand il supprimait cette boîte.

A la vérité, ces déviations semblaient bien trop faibles pour pouvoir être attribuées à l'effet Rowland. Mais ce qui était remarquable, c'est qu'elles disparaissaient quand on interposait un écran métallique.

Cette série où se sont produits ces effets inexpliqués, reste le point faible de l'œuvre de Crémieu. L'explication donnée par M. Crémieu lui-même ne tient pas debout; celles que j'ai proposées moi-même, étincelles, etc., demeurent problématiques.

Quoi qu'il en soit, ces anomalies ont particulièrement attiré l'attention de MM. Poddington et Wilson, qui ont cherché à démontrer :

1° Que l'effet Rowland doit se produire toujours en l'absence d'écran métallique, et ne disparaît que par suite de l'interposition d'un écran;

2° Que si les déviations observées par Crémieu sont plus faibles que les déviations prévues, c'est par suite d'erreurs d'expérience;

3° Enfin, que cette disparition de l'effet Rowland par l'interposition d'un écran est un phénomène tout naturel et prévu par la théorie.

En ce qui concerne le premier point, M. Crémieu répond qu'il a fait aussi plusieurs séries d'expériences où le disque chargé tournant était entièrement nu et sans aucune espèce d'écran métallique, et que les résultats ont été nettement négatifs. Telles sont les expériences relatées à la fin de sa thèse et celles dont je parlerai plus loin sous la rubrique : *Réalisation des courants ouverts*.

Mais examinons le troisième point. Pourquoi ces auteurs considèrent-ils la disparition de l'effet Rowland comme un phénomène prévu par la théorie? C'est parce qu'ils supposent qu'il doit se produire dans l'écran un courant de conduction dont l'effet contre-balance exactement celui du courant de convection.

Mais est-ce bien cela que prévoit la théorie ?

Pour moi, cette question a un sens précis; par « la théorie », j'entends celle de Hertz ou celle de Lorentz; parce que, si la pensée de Faraday peut revêtir beaucoup d'autres formes, il n'y en a pas jusqu'ici d'autre qu'on ait développée complètement et mise sur ses pieds.

Que prévoit donc la théorie de Hertz ? (Car, pour cette question particulière, celle de Lorentz conduirait au même résultat.)

Si nous avions un écran derrière lequel des charges positives se déplaceraient par convection, *dans un mouvement rectiligne de translation*, il est clair qu'elles induiraient sur l'écran des charges de nom contraire, qui se déplaceraient parallèlement, mais par conduction, de sorte qu'il y aurait compensation entre les deux sortes de courants.

C'est ainsi que raisonnent MM. Poddington et Wilson.

Mais si l'écran est *circulaire* et si les charges mobiles sont entraînées dans un mouvement de *rotation*, voici ce qui arrive : les charges induites sur l'écran restent toujours vis-à-vis des charges mobiles et se déplacent avec elles; ce déplacement se fait par conduction; mais ici ces charges induites peuvent aller d'une position à une autre par deux chemins, par le plus court et en fai-

sant le tour de la circonférence. Cela fera deux courants de conduction, l'un direct, l'autre inverse.

Or, le calcul montre qu'il y a compensation entre le courant de conduction direct et le courant de conduction inverse, de sorte que le courant de convection devrait rester seul, bien loin qu'il y ait compensation entre le courant de convection et les courants de conduction.

La théorie ne prévoit donc nullement la disparition de l'effet Rowland par l'interposition d'un écran. Si donc les résultats de Crémieu n'étaient pas contredits par des expériences nouvelles, ils auraient prouvé que la théorie est en défaut quand même ils n'auraient pas démontré la non-existence de l'effet Rowland.

2. *Objection et expérience de M. Pender.* — L'objection de M. Pellat, reprise par M. Pender, est beaucoup plus sérieuse. Dans la plupart des expériences, les secteurs mobiles comme les secteurs fixes étaient recouverts d'une couche de diélectrique (verre, caoutchouc ou ébonite). Si l'air interposé entre ces deux couches diélectriques, l'une fixe, l'autre mobile, n'était pas suffisamment isolant, il pourrait se faire que les surfaces de contact du diélectrique et de l'air prissent par influence des charges contraires à celles des surfaces de contact du diélectrique et du métal. Alors le disque, en tournant, entraînerait à la fois des charges positives et négatives dont les effets se neutraliseraient.

M. Crémieu dit avoir vérifié qu'il n'en était pas ainsi, mais il a fait cette vérification sur les disques au repos, et M. Pender se demande si cela est encore vrai quand ils sont en mouvement.

Les pages qui précèdent étaient déjà composées quand a paru, dans le numéro d'août du *Philosophical Magazine*, la relation d'une expérience de M. Pender, qui ne s'est pas borné à une critique purement théorique.

Nous avons donc la satisfaction d'apprendre que les expériences dont je signalais la nécessité sont déjà commencées, et mieux encore, que Rowland, avant de mourir, a pu en dresser le plan et assister aux premiers essais.

M. Pender a repris l'expérience de Crémieu sous sa première forme, c'est-à-dire qu'il a étudié les courants induits produits par la variation du champ magnétique dû aux courants de convection.

Seulement, il s'est servi d'un disque tournant analogue à celui qu'avait employé Rowland et non pas à ceux qu'a employés Crémieu. C'est-à-dire que ces disques n'étaient pas enfermés dans une boîte en fonte; que les parties

métalliques fixes et mobiles n'étaient pas recouvertes d'une couche de diélectrique et n'étaient séparées que par de l'air.

Il fallait, par conséquent, les éloigner l'une de l'autre, ce qui diminuait la capacité, et par conséquent l'intensité du courant de convection produit.

Dans ces conditions, les résultats ont été positifs, ce qui est contraire aux idées de Crémieu.

Il faut évidemment attendre ce que M. Crémieu répondra, et aussi de nouvelles expériences annoncées par M. Pender.

IX. — Le problème du courant ouvert.

De nouvelles expériences sont encore nécessaires.

M. Pender et M. Crémieu doivent les faire cet hiver, chacun de son côté.

Supposons qu'à la suite de ces expériences les idées de M. Crémieu viennent à triompher; sera-ce là une solution définitive? Non, la difficulté ne fera que commencer. Sur les ruines des anciennes théories, il faudra rebâtir.

Ce que j'ai dit au début fera comprendre aisément la nature de cette difficulté. Va-t-on être obligé de revenir à l'hypothèse des courants ouverts, et dans ce cas ne va-t-on pas se trouver aux prises avec les complications inextricables des théories, abandonnées, d'Ampère et de Helmholtz?

Dans les expériences où l'on fait simplement tourner un disque chargé, la contradiction n'apparaît pas encore. La répartition des charges demeure invariable, puisque chaque charge électrique, en quittant un point de l'espace, y est immédiatement remplacée par une autre charge égale.

Le champ électrique ne change pas; le courant de convection se ferme sur lui-même, il n'y a donc pas de courant ouvert.

La difficulté commencerait, au contraire, si nous avions affaire à une petite sphère isolée et chargée, entraînée dans un mouvement de translation ou de rotation, qui serait, par exemple, attachée sur la circonférence d'un disque tournant, isolant et sans charge. Alors, le point de l'espace où était la sphère chargée est occupé un instant après par de la matière isolante dépourvue de charge. La répartition des charges n'est plus invariable et la distribution des lignes de force change à chaque instant. Il y a dans le diélectrique ce que Maxwell appelle un courant de déplacement.

Dans la conception Maxwell-Rowland, le circuit complet, qui est fermé, se

composé de courants de déplacement et de courants de convection. Si maintenant nous admettons que les courants de convection sont sans action, il ne nous reste plus que des courants de déplacement *ouverts*.

Malheureusement, il est à peu près impossible d'opérer de la sorte, pour plusieurs raisons, et surtout parce que la capacité d'une pareille sphère serait beaucoup trop petite.

En revanche, on peut chercher à réaliser des circuits fermés, composés de courants de convection et de courants de conduction. Si les courants de convection sont regardés comme sans action, il restera alors un courant de conduction *ouvert*.

C'est la réalisation de ces courants ouverts qui constitue, à proprement parler, le paradoxe.

Et, comme c'est en allant au devant des difficultés qu'on peut espérer des résultats nouveaux, ce sont ces courants ouverts qu'il importait de réaliser. M. Crémieu a donc, sur mon conseil, fait deux tentatives dans ce sens :

1. *Première tentative.* — Dans un premier dispositif, on fait tourner un disque doré, dont la dorure est interrompue par une série de rainures circulaires; ces rainures, toutefois, ne règnent pas sur toute la circonférence, de sorte que toutes les parties de la dorure restent en communication entre elles et peuvent être mises au sol.

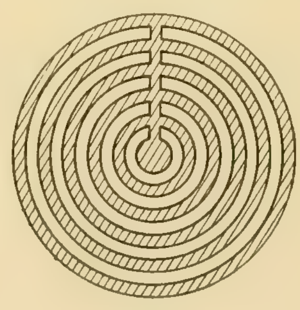


Fig. 3.

La figure 3 représente ce disque, les parties dorées étant couvertes de hachures. On voit que sur la plus grande partie du disque, il peut y avoir des courants circulaires, mais pas de courants radiaux.

Vis-à-vis de ce disque tournant, on place un secteur métallique fixe en

communication avec une batterie d'accumulateurs. Ce secteur et la dorure du disque tournant vont former les deux armatures d'un condensateur. Le secteur fixe va se charger positivement, par exemple, et le disque mobile se chargera négativement par influence. Seulement, ces charges négatives resteront toujours dans la partie du disque qui est vis-à-vis du secteur fixe; elles seront donc fixes dans l'espace; mais, comme le disque qui les porte est en mouvement, elles seront en mouvement relatif par rapport à ce disque.

Les charges positives, étant fixes dans l'espace et fixes par rapport au conducteur qui les porte, ne produiront aucune action magnétique. Qu'arrive-t-il maintenant dans le disque mobile?

Si les charges négatives étaient invariablement fixées au disque, elles seraient entraînées par le mouvement de ce disque, ce qui constituerait un courant de convection. Ce courant ne serait contrebalancé par rien si le disque était chargé, mais parfaitement isolant; ou encore s'il était formé d'un très grand nombre de conducteurs très petits et parfaitement isolés les uns des autres. Chacun de ces petits conducteurs conservera sa charge invariable et l'entraînera avec lui; seulement, quand l'un deux ne sera plus vis-à-vis du secteur fixe, sa capacité diminuera, et puisque sa charge n'a pas changé, son potentiel augmentera. Il se produira donc des différences de potentiel entre les différents petits conducteurs.

Supposons maintenant que l'isolement de ces petits conducteurs ne soit pas parfait; il se produira entre eux des courants de conduction qui tendront à diminuer la différence des potentiels, en ramenant les charges vis-à-vis du secteur fixe.

Les différences de potentiel qui pourront se maintenir ainsi, seront évidemment d'autant plus grandes que l'isolement sera meilleur; si nous passons enfin au cas de notre disque doré, la résistance opposée aux courants de conduction sera très faible, de sorte que ces différences seront extrêmement petites et que la distribution s'écartera très peu de la distribution statique.

Les charges négatives sont donc soumises, d'une part, à un courant de convection qui tend à les écarter de leur position normale, vis-à-vis du secteur fixe et, d'autre part, à des courants de conduction qui les y ramènent sans cesse.

Comment sont distribués ces courants de conduction? Les charges écartées de leur position normale peuvent y revenir par deux chemins, par le plus court, ou en faisant le tour du disque; c'est ce que j'appellerai le courant de conduction direct et le courant inverse.

Comme le premier chemin oppose beaucoup moins de résistance que le second, il est clair que le courant direct sera plus intense que le courant inverse. Si, par exemple, le secteur fixe occupe la sixième partie de la circonférence, le courant direct sera égal aux $\frac{5}{6}$ et le courant inverse au $\frac{1}{6}$ du courant de convection.

Dans les idées de Rowland, que doit-il se passer? Nous aurons le courant de convection dont l'intensité sera par exemple 1, qui sera compensé en partie par le courant de conduction direct dont l'intensité est $\frac{5}{6}$; l'intensité résultante sera $\frac{1}{6}$, nous aurons donc un effet sur l'aiguille aimantée, mais cet effet sera assez faible.

Dans les idées de Crémieu, au contraire, le courant de convection n'agit pas; il semble qu'il doit rester seulement le courant de conduction direct égal à $\frac{5}{6}$ et que l'effet produit doit être cinq fois plus grand que dans les idées anciennes.

Ces courants de conduction vont du bord *aval* (d'après le sens de la rotation) de la portion du disque mobile qui est vis-à-vis du secteur fixe, au bord amont de cette même portion; ce seraient donc des courants ouverts; de sorte qu'on aurait réalisé le courant de conduction ouvert et que Crémieu pouvait avoir l'espoir de vérifier ses vues par une expérience donnant un résultat positif (la déviation devant être cinq fois plus grande que dans l'hypothèse de Rowland), tandis qu'il n'avait eu jusque-là que des résultats négatifs.

A la vérité, cet espoir n'était pas grand; car Rowland avait déjà essayé un dispositif analogue. En fait, il n'y eût pas de déviation du tout, résultat également contraire à l'ancienne et à la nouvelle théorie.

Cela est resté jusqu'ici inexpliqué. Crémieu pense que les courants qui ramènent les charges à leurs positions normales ne sauraient être assimilés à de véritables courants de conduction, qu'ils ne produisent pas de chaleur de Joule, qu'il ne se produit pas, dans le disque, des différences de potentiel même très faibles; qu'enfin, c'est pour cela que ces courants n'ont pas d'effet magnétique : mais je ne saurais en aucune façon adopter cette manière de voir.

Cette première tentative pour obtenir des courants ouverts avait donc échoué; j'ajouterai cependant que M. Crémieu a, je crois, l'intention de la reprendre en modifiant les dispositions des rainures qui interrompent la dorure du disque.

2. *Réalisation des courants ouverts.* — Ce premier échec ne découragea pas M. Crémieu, qui, sur mon conseil, essaya un dispositif différent.

La figure 4 représente ce dispositif schématiquement. Elle est construite comme on le fait habituellement pour les schémas destinés à faire comprendre le fonctionnement des machines de Holtz ou de Wimshurst. Je veux dire que les disques tournants ou fixes sont supposés remplacés par des cylindres que la figure représente par leur section.

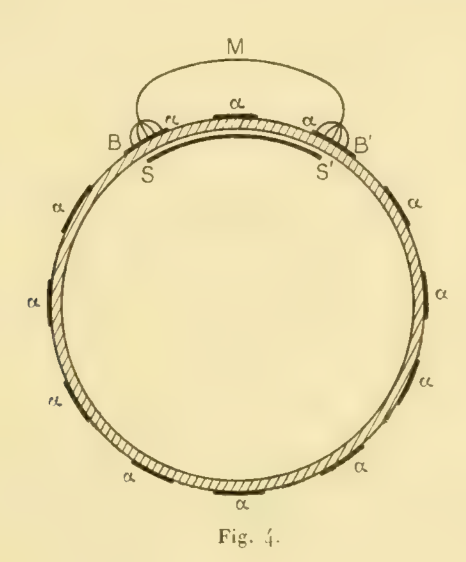


Fig. 4.

La partie essentielle de l'appareil est un plateau d'ébonite tournant; sur la figure, nous supposons ce plateau remplacé par un manchon cylindrique dont la section droite est représentée couverte de hachures. Ce plateau porte d'un côté des secteurs d'étain $\alpha\alpha$, isolés les uns des autres. Un secteur fixe SS′, placé près du disque tournant, est en communication avec une source d'électricité.

Vis-à-vis des deux bords de ce secteur fixe, deux balais B et B′ frottent sur les secteurs d'étain α et sur le plateau d'ébonite; ces deux balais sont reliés par un fil B′MB.

Le plateau tournant dans le sens de la flèche, le secteur SS′ est, par exemple, chargé positivement; le secteur α, sur lequel frotte le balai B, va se charger négativement par influence et sa charge négative lui viendra par le balai B et le fil B′MB. Ce secteur α, entraîné par le mouvement du disque, quittera le balai B et emportera sa charge.

Au bout d'un certain temps, il viendra au contact du balai B′ et, en même temps, il cessera d'être en face du secteur SS′, de sorte que sa charge négative cessera d'être retenue par l'influence de la charge positive de SS′. Le secteur α va donc abandonner sa charge au balai B′ et au fil B′MB.

Les secteurs α compris entre B et B′ seront donc chargés, les autres seront déchargés, les premiers entraîneront leur charge, ce qui constituera un courant de convection; les charges abandonnées au balai B' reviendront au balai B par le fil B′MB, de sorte que le circuit sera fermé par un courant de conduction.

En réalité, M. Crémieu a reconnu que les choses ne se passent pas d'une façon aussi simple, à cause du rôle important joué par la polarisation de l'ébonite; mais nous nous contenterons de cet aperçu.

L'expérience réussit parfaitement, beaucoup plus nettement que celles des séries précédentes. Il était facile de mesurer le courant de conduction B′MB au galvanomètre et de constater que le courant de convection n'agit pas sur l'aiguille aimantée; cette aiguille est déviée, au contraire, quand le fil de retour B′MB est placé tout contre le plateau tournant, tandis que, dans ce cas, il devrait, d'après les idées de Rowland, y avoir compensation entre l'effet du courant de convection et celui du courant de conduction.

M. Crémieu admet qu'il a réalisé un courant de conduction ouvert.

Pourquoi, maintenant, a-t-on réussi de cette manière et avait-on échoué avec le dispositif que j'ai d'abord décrit? C'est ce que M. Crémieu ne peut expliquer.

X. — Expérience de M. Carvalho.

Ainsi, le courant ouvert semble réalisé; nous sommes en face du paradoxe; il reste à le résoudre.

Nous ne pouvions croire à l'existence des courants ouverts, parce que nous n'arrivions pas à concevoir comment ils pourraient se comporter.

Maintenant, nous en avons un, ou nous croyons en avoir un; nous n'avons qu'à regarder comment il se comporte.

Va-t-il suivre les lois d'Ampère, ou bien celles de Helmholtz, ou d'autres encore?

D'après Ampère, nous l'avons vu, les courants ouverts doivent produire des rotations continues. C'est là un critérium précieux. M. Carvalho a proposé de soumettre un aimant, dans des conditions convenables, à l'action de ce que

Crémieu croit être un courant ouvert et de voir s'il tendra à prendre une rotation continue. M. Crémieu a commencé des essais dans ce sens. J'ai cru pouvoir sans indiscrétion dire un mot de ce projet, puisque tout le monde en parle parmi les personnes qui s'intéressent à la Physique.

Peut-être les difficultés techniques ne permettront-elles pas de faire l'expérience ; mais, si elle peut se faire, je serais étonné que l'aimant se mît à tourner ; j'en serais étonné même si j'étais sûr que l'effet Rowland n'existe pas.

J'ai dit plus haut, en effet, les invraisemblances auxquelles conduit la théorie d'Ampère.

Celle de Helmholtz pourrait être soumise à un critérium analogue. On pourrait chercher si un solénoïde fermé peut subir une action de la part de ces soi-disant courants ouverts.

Mais la théorie de Helmholtz, quoique plus satisfaisante que celle d'Ampère, est encore bien invraisemblable. Avec elle, je l'ai expliqué ci-dessus, il n'y a pas, à proprement parler, de champ magnétique.

Admettre cela, ce serait, pour le coup, renoncer à l'idée fondamentale de Faraday, à ce qu'elle contient d'essentiel et non plus seulement à l'une des nombreuses formes qu'on peut lui donner.

J'aime mieux rappeler une remarque que j'ai faite plus haut : on peut définir les courants par leur action sur le galvanomètre, et alors tous les courants sont fermés *par définition*. Il n'y a plus dès lors qu'à rechercher *comment* un courant se ferme. Dans le cas qui nous occupe, nous croyions le savoir ; mais, d'après M. Crémieu, ce ne serait pas comme cela. Il faut chercher autre chose ; on le trouvera en étudiant systématiquement les déviations de l'aiguille aimantée dans le voisinage de ces courants paradoxaux et, en particulier, près des points où cessent les courants de conduction. C'est aussi ce que M. Crémieu a le projet de faire.

Quels que soient les résultats de ces expériences, nous aurons un champ magnétique et des courants qui seront fermés ; cela est certain, puisqu'il n'y a là que des définitions.

Cela reste vrai dans toutes les hypothèses, aussi bien dans celles d'Ampère et de Helmholtz que dans les autres. Seulement, voici la différence : si nous restons fidèles aux idées de Faraday, l'action pondéromotrice subie par un élément de courant ne dépendra que de la force magnétique. Il n'en serait plus ainsi dans les vues d'Ampère ou de Helmholtz, et c'est pour cela que ces vues sont paradoxales.

J'arrêterai là ce trop long article, heureux si j'ai pu faire comprendre l'importance des problèmes soulevés par les recherches de M. Crémieu et la nature des questions engagées dans le débat. Va-t-on se trouver en face du paradoxe du courant ouvert; va-t-on être obligé de chercher une nouvelle explication des rayons cathodiques, des courants électrolytiques, de la polarisation magnétique, du phénomène de Zeeman? C'est ce que nous saurons bientôt.

SUR

LES EXPÉRIENCES DE M. CRÉMIEU

ET

UNE OBJECTION DE M. WILSON

L'Éclairage électrique, t. 31, p. 83-93 (19 avril 1902).

On sait que M. Pocklington (¹) et après lui M. Wilson (²) ont dirigé contre les expériences de M. Crémieu (³) diverses critiques et qu'ils ont prétendu, par exemple, que ces expériences, loin d'être en contradiction avec les théories régnantes, en étaient au contraire une confirmation indirecte, parce que l'effet des courants de convection devait être compensé par celui des courants de conduction régnant dans l'écran qui sépare l'appareil astatique du disque tournant.

(¹) H. C. Poklington, *Sur les équations de l'Électrodynamique et les expériences de Crémieu* (*Phil. Mag.*, 6ᵉ série, t. I, mars 1901, p. 325; *L'Éclairage électrique*, t. XXVII, 25 mars 1901, p. 304).

(²) H. A. Wilson, *Sur l'effet magnétique de la convection électrique et sur les expériences de Rowland et de Crémieu* (*Phil. Mag.*, 6ᵉ série, t. II, juillet 1901, p. 144; *L'Éclairage électrique*, t. XXVIII, 3 août 1901, p. 188). — *Ibid.* (*Phil. Mag.*, 6ᵉ série, t. II, septembre 1901, p. 319; *L'Éclairage électrique*, t. XXIX, 26 octobre 1901, p. 138).

(³) V. Crémieu, *Recherches sur l'existence du champ magnétique produit par le mouvement d'un corps électrisé* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 130, 1900, p. 1544; *L'Éclairage électrique*, t. XXIII, 16 juin 1900, p. 425). — *Recherches sur l'effet inverse du champ magnétique que devrait produire le mouvement d'un corps électrisé* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 131, 1900, p. 578; *L'Éclairage électrique*, t. XXV, 20 octobre 1900, p. 131). — *Sur les expériences de M. Rowland, relatives à l'effet magnétique de la convection électrique* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 131, 1900, p. 797; *L'Éclairage électrique*, t. XXV, 24 novembre 1900, p. 326). — *Nouvelles recherches sur la convection électrique* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 132, 1901, p. 327; *L'Éclairage électrique*, t. XXVI, 16 mars 1901, p. 419). — *Action magnétique des courants ouverts* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 132, 1901, p. 1103; *L'Éclairage électrique*, t. XXVII, 18 et 25 mai 1901, p. 272 et 310). — *Réponse à la Note de M. Wilson* (*L'Éclairage électrique*, t. XXVIII, 3 avril 1901, p. 191).

Récemment, M. Righi, dans un article du *Nuovo Cimento*, est revenu sur cette question et, sans adopter tout à fait le point de vue de M. Wilson, il dit qu'il serait désirable qu'on reprît l'étude théorique de l'influence possible d'un écran dans ces phénomènes [1].

Dans ces conditions, nous croyons utile de publier une correspondance échangée entre MM. Potier et Poincaré du 4 décembre 1900 au 13 janvier 1901.

Dans cette correspondance, l'influence de l'écran était discutée complètement et nos deux collaborateurs furent d'accord pour reconnaître que cette influence est nulle. C'était d'avance réfuter l'objection de M. Wilson,

Nos lecteurs se souviennent en effet que dès le mois de novembre 1900, M. Potier avait soulevé la question dans une courte Note insérée dans ce journal [2].

CHER CONFRÈRE,

L'image ci-dessous (*fig.* 1) vous paraîtra-t-elle satisfaisante ? Quand un point électrisé de masse m se meut, le champ magnétique a pour valeur $\frac{mv \sin\alpha}{r^2}$; il est dépourvu de potentiel et il est facile de constater que $\int \mathcal{H}_s ds$ le long d'un cercle dont l'axe est v est bien la dérivée, par rapport au temps, du flux

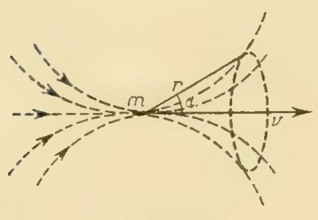


Fig. 1.

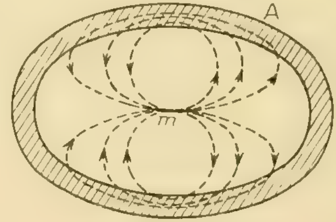


Fig. 2.

d'induction électrique à travers ce cercle. Les lignes de courant de déplacement arrivent toutes en m pour s'épanouir dans l'espace

Entourons m d'un écran conducteur (*fig.* 2) ; toutes les lignes de courant vont se fermer par la surface interne de celui-ci, et si je décris une courbe

---

(1) Depuis que ces lignes ont été livrées à l'impression, M. Righi est revenu sur la question dans un nouvel article du *Nuovo Cimento* et M. Levi Civita a publié dans les *Atti dei Lincei* une analyse dont les conclusions sont tout à fait d'accord avec celles de la correspondance que nous reproduisons ici.

(2) A. POTIER, *Sur l'effet magnétique de la convection électrique* (*L'Éclairage électrique*, t. XXV, 1er décembre 1900, p. 351). *N. d. l. R.*

fermée passant par A, enveloppant ou non le conducteur, mais ne pénétrant pas dans l'espace vide où se trouve m, le flux total d'induction à travers cette courbe sera *nul*, puisque les lignes de courant sont fermées à l'intérieur de l'écran; c'est là la différence essentielle. Ainsi, il y a un potentiel magnétique uniforme à l'extérieur de l'écran. Supposez-le de révolution autour de v, et la force magnétique en A devra être nulle. Il est plus long de le démontrer pour une forme quelconque, mais cela suffit pour mettre en évidence le rôle de l'écran.

Votre dévoué,

A. POTIER.

MON CHER CONFRÈRE,

Il était convenu que je vous écrirais le résultat de mes réflexions sur notre conversation de dimanche.

La question en litige était de savoir si les expériences de Crémieu sont ou non contraires aux idées anciennes.

Pour cela, il faut d'abord savoir ce que c'est que « les idées anciennes ».

Ne les cherchons pas dans Maxwell, où l'on trouve tout ce qu'on veut; admettons que par définition, les « idées anciennes », ce sont les idées de Hertz.

Mais, quelles sont les idées de Hertz?

Sur ce point, nous sommes, je crois, en désaccord.

En relisant le Mémoire de Hertz, en rentrant, je n'ai fait que me confirmer dans ma manière de voir. Je prends le Mémoire *Grundgleichungen für bewegte Körper*, et les pages de mes citations se rapportent à l'édition *Untersuchungen über die Ausbreitung der Elektrischen Kraft*, Leipzig, Barth, 1892 : page 264, *Den ganzen elektrodyn. Theil der Kraft* (magnétique), *erhalten wir wenn wir in dem Ausdruck* $4\pi A u$ (le courant total) *ersetzen durch.*

$$(1) \qquad 4\pi A u + A\frac{dX}{dt} + A\alpha \sum \frac{dX}{dx}.$$

Der letzte Theil dieser Aussage findet in der Rowland'schen Versuche die gewünschte Bestätigung.

A est un coefficient numérique $= \frac{1}{3.10^{10}}$, mais qu'est-ce que α? C'est la vitesse de la *matière*; page 258, *Wo wir im Raume greifbare Materie finden, entnehmen wir der Bewegung dieser eindeutig die Werthe der* α, β, γ.

Qu'est-ce que $\sum \frac{dX}{dx}$? c'est la densité de l'électricité VRAIE; remarquer que Hertz met un X gothique que je ne sais pas faire.

Donc $\sum \frac{dX}{dx}$ représente la charge du disque au sens vulgaire du mot et α sa vitesse au sens vulgaire du mot.

Il n'y a donc aucun doute sur la pensée de Hertz.

Maintenant, que devrait-il se passer, d'après les idées anciennes ?

Votre raisonnement (il ne s'agit pas encore du raisonnement contenu dans votre lettre, ceci était écrit avant que je l'eusse reçue) ne m'a pas convaincu.

J'admets bien que si la vitesse est faible, la *distribution électrique* sera la même sensiblement qu'à l'état statique; mais non que le *déplacement électrique* sera le même qu'à l'état statique. Si X, Y, Z représentent la force électrique, j'admets bien que

$$\frac{dX}{dx} + \frac{dY}{dy} + \frac{dZ}{dz}$$

est le même qu'à l'état statique, mais non que X, Y, Z sont les mêmes qu'à l'état statique, parce que je n'admets pas que

$$\int (X\,dx + Y\,dy + Z\,dz) = 0.$$

Cela serait vrai s'il n'y avait que des courants permanents, cela ne sera pas vrai dans un régime variable.

Maintenant, voici ce que je trouve.

Considérons un appareil tel que celui de Rowland ou de Crémieu [3e communication ([1])]. Il y a des parties isolantes et des parties conductrices, les unes fixes, les autres mobiles; mais de telle façon qu'il n'y ait pas de contact glissant. Il y a en outre un système astatique; on observe l'effet *moyen* éprouvé par ce système.

Dans cet appareil, règnent des courants « de convection » et de conduction. Je dis que l'effet moyen des courants de conduction dans la partie fixe est nul. Je considère un contour fermé quelconque à l'intérieur d'une partie conductrice soit fixe, soit mobile, soit

$$\int (X\,dx + Y\,dy + Z\,dz)$$

([1]) *C. R. Acad. Sc.*, t. 131, 1900, p. 797; *L'Éclairage électrique*, t. XXV, 24 novembre 1900, p. 326.

l'intégrale de la force électromotrice, le long de ce contour. C'est $\frac{dJ}{dt}$, J étant le flux magnétique qui traverse le contour. Si j'appelle $\bar{X}$, $\bar{Y}$, $\bar{Z}$, les valeurs moyennes de X, Y, Z; alors

$$\int (\bar{X}\,dx + \bar{Y}\,dy + \bar{Z}\,dz) = 0$$

parce que J est une fonction périodique du temps.

On aura donc

$$\bar{X} = \frac{d\bar{V}}{dx}, \qquad \bar{Y} = \frac{d\bar{V}}{dy}, \qquad \bar{Z} = \frac{d\bar{V}}{dz},$$

$\bar{V}$ étant ce que j'appellerai le potentiel moyen.

Si alors u, v, w sont les composantes du courant, $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$, leurs valeurs moyennes, C la conductibilité, on aura :

$$\bar{u} = C\bar{X} \qquad \text{d'où} \qquad \bar{u} = C\frac{d\bar{V}}{dx}.$$

Si la partie conductrice est homogène, et que $\bar{C}$ soit une constante, on aura :

$$C\,\Delta\bar{V} = \sum \frac{d\bar{u}}{dx}.$$

Or, $\sum \frac{d\bar{u}}{dx}$ est nul ; car $\sum \frac{du}{dx} = \frac{d\rho}{dt}$, ρ densité électrique, et ρ varie périodiquement. Donc $\Delta\bar{V} = 0$.

Or, la surface qui limite la partie conductrice considérée peut être divisée en deux parties. Dans la première, elle est en contact avec un diélectrique, la composante normale *moyenne* du courant de conduction est nulle, parce que la densité superficielle doit varier périodiquement. Donc $\frac{d\bar{V}}{dn} = 0$.

Dans la seconde, elle est *largement* reliée au sol ou à une source d'électricité. On a $\bar{V} = \text{const.}$

Donc à l'intérieur, on aura partout $\bar{V} = \text{const.}$ Donc $\bar{u} = \bar{v} = \bar{w} = 0$.

Ou mieux, *ne supposons plus notre conducteur homogène*, ce qui sera plus général et en même temps nous permettra de prendre une couche de passage. C n'est plus une constante, mais on a :

$$\sum \frac{d\bar{u}}{dx} = \sum \frac{d}{dx} C \frac{d\bar{V}}{dx} = 0.$$

On aura donc

$$\int C(V - V_0)\frac{dV}{dn}\,d\omega = \int (V - V_0)\sum \frac{d}{dx}C\frac{dV}{dx}\,d\tau + \int \sum C\left(\frac{dV}{dx}\right)^2 d\tau,$$

V_0 étant le potentiel constant de la source.

Les intégrales du second membre sont étendues à tous les éléments $d\tau$ d'un volume T, et celle du premier membre à tous les éléments $d\omega$ de la surface S qui limite ce volume. Quant à S, elle se composera de deux parties : l'une dans le diélectrique, en dehors de la couche de passage ($C = 0$), l'autre dans la partie largement reliée à la source ($V = V_0$).

Donc la première intégrale $= 0$, la seconde également

$$\int \sum C\left(\frac{dV}{dx}\right)^2 d\tau = 0.$$

Donc

$$\frac{d\bar{V}}{dx} = 0 \qquad \text{et} \qquad u = v = w = 0$$

Dans un conducteur mobile, le courant moyen est également nul, mais il n'est pas certain que son effet moyen soit nul, parce qu'il bouge.

Voyons maintenant les objections possibles.

1° Voici deux disques circulaires métalliques D et D' au sol; entre les deux, tourne une masse électrisée M. Cette masse induit sur D et D' des charges C et C' qui tournent avec elle; il semble que les courants correspondants à ces charges contrebalancent le courant de convection dû à M.

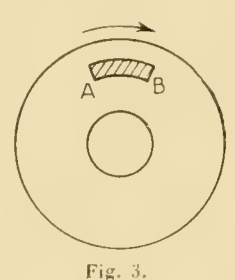


Fig. 3.

Je couvre de hachures la partie du disque qui est ainsi électrisée par influence (*fig.* 3). Si le disque tourne dans le sens de la flèche, la charge se déplace dans ce même sens ; d'où l'on pourrait conclure qu'il y a un courant de conduction dans ce sens, et dans ce sens seulement. Ce serait une erreur;

il y a un fort courant de conduction dans ce sens; mais il y a un faible courant de conduction dans le sens contraire qui fait tout le tour du disque. Ce courant est plus faible, mais il est plus long; en chaque point du disque, il règne plus longtemps que le courant fort, de sorte qu'il y a compensation et que le courant moyen reste nul.

2° Passons au raisonnement de votre lettre.

A l'extérieur de l'écran, il y a un potentiel magnétique (accordé). Si tout est de révolution, le champ magnétique est nul (accordé); il en est encore de même si tout n'est pas de révolution; cela, je ne l'accorde pas. Mais alors, si j'ai un écran de révolution et qu'une masse électrique se déplace suivant l'axe? dans ce cas, le mouvement de cette masse est rectiligne et le phénomène ne présente plus la périodicité qui est essentielle à mon raisonnement.

3° Théorie des sheets et des écrans électromagnétiques. Si un écran est parfaitement conducteur de l'autre côté, la force électrique est nulle. Donc $\frac{d\alpha}{dt} = 0$, donc le champ magnétique est constant; mais cela ne prouve pas qu'il est nul. Mais s'il est nul au début, il devra être nul tout le temps. Oui, mais l'écran n'est pas parfaitement conducteur. Nous partons du repos et nous tendons vers un état de régime périodique. Plus la conductibilité sera parfaite, plus tard sera atteint l'état final où le champ magnétique est constant, mais pas nul; mais il finira toujours par l'être. Et alors ma conclusion, c'est que les expériences de Crémieu paraissent inexplicables avec les idées anciennes. Devons-nous adopter son explication, à laquelle il n'a pas d'ailleurs donné une forme définitive? Cela, c'est une autre affaire, et je me réserve.

H. Poincaré.

Mon cher Confrère,

Je vous remercie de votre intéressante lettre. Vous voulez une couche de passage entre le diélectrique (vernis) et le vide; je n'y voit pas d'inconvénient (puisque par hypothèse $\rho = 0$, dans cette couche). Avec vos hypothèses, on peut même intégrer complètement, si l'on suppose connus les potentiels $\int \frac{\rho\xi}{r} d\tau$, $\int \frac{\rho\eta}{r} d\tau$, dans le cas du mouvement permanent $\left(\frac{d\rho}{dt} = \frac{df}{dt} = \frac{dg}{dt} = 0\right)$, mais pour moi, la difficulté n'est pas supprimée pour cela.

C'est sur l'autre couche, où ρ et ξ existent que je voudrais appeler votre attention; on admettait, et je crois me rappeler avoir vu cette doctrine dans votre Ouvrage, une séparation brusque du *conducteur* et du diélectrique, l'électricité occupant une couche très mince dans le métal; on professe aussi que quand la distribution change, c'est par des courants dans cette couche même, si les changements ne durent pas trop longtemps, mais ces courants pénètrent dans le métal, petit à petit.

La manière d'être de cette couche me paraît le point capital. En effet, toute intégration dans le diélectrique fera apparaître des fonctions arbitraires, l'une potentiel électrostatique, l'autre potentiel vecteur correspondant à des masses ou courants hors du diélectrique, c'est-à-dire dans le corps en mouvement, et qui ne peuvent être déterminées que si l'on intègre également dans le conducteur, et qu'on exprime les conditions aux limites.

Par exemple, la condition $\sum \frac{du}{dx} = 0$, détermine la valeur de la composante normale du courant à l'intérieur du métal; c'est donc un courant de *conduction* qui accompagne forcément le mouvement.

Ces courants de conduction, quand le régime permanent est établi, détruisent complètement (dans un bon conducteur) les courants $\rho\xi$, $\rho\eta$ pour le cas d'un solide de révolution tournant autour de son axe, de sorte que le champ magnétique est nul à l'extérieur.

Il n'en serait plus ainsi si le disque était un diélectrique chargé d'électricité vraie, et il est intéressant de noter en passant que Maxwell indique, comme projet d'expérience, l'emploi d'un disque isolant (§ 770); et que les expérimentateurs ont cru devoir diviser leurs disques.

Voilà les raisons qui m'empêchent d'adhérer complètement à votre doctrine; j'admets les équations de Hertz, lorsque le milieu est l'air, mais il s'agit de les appliquer en tenant compte des conditions physiques du phénomène, c'est cette conductibilité qui fait pour moi la différence entre l'induction dite unipolaire magnétique, et le cas du disque chargé.

Votre bien dévoué,

A. Potier.

P. S. — 1° Formez, pour le diélectrique ambiant, le vecteur

$$u = \frac{df}{dt}, \qquad v = \frac{dg}{dt}, \qquad w = \frac{dh}{dt};$$

c'est le courant total pour cette région de l'espace; 2° fermez ces courants par des courants *totaux*, répartis dans une très petite épaisseur de la matière conductrice mobile. Calculez α, β, γ, résultant de l'ensemble ainsi constitué.

On voit que seul, l'espace balayé par le conducteur (*fig.* 4) intervient par des courants toujours de même sens, Mais la présence d'un conducteur fixe

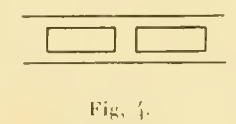


Fig. 4.

voisin (écran) a une action, parce qu'elle modifie les trajectoires, en attirant en dehors de l'espace balayé, les courants u, v, w.

Dans le cas d'un solide de révolution, u, v, w sont nuls partout.

On est ainsi dispensé, je l'espère, d'épiloguer sur les variations de C, de K, et de la conductibilité dans cette couche, et l'on reste dans les termes de la théorie de Maxwell; ce qui n'empêchera pas de faire intervenir, si l'on veut, les électrons, ou ions à la mode.

A. Potier.

Mon cher Confrère,

J'avais cru comprendre votre pensée, mais je m'aperçois que je ne l'ai pas encore saisie.

J'avais cru que vous acceptiez les équations de Hertz; maintenant je n'en suis plus sûr, et je ne sais pas quelles sont celles que vous proposez de mettre à la place.

Je ne comprends pas non plus si ces courants de conduction (qui, d'après vous, compenseraient les courants de convection) siègent dans le disque mobile lui-même, ou dans l'écran fixe.

Dans ce dernier cas, je vous demanderais si vous n'admettez plus ce que je vous avais dit dans une de mes premières lettres, au sujet de l'effet moyen nul des courants de conduction de l'écran fixe quand le phénomène est périodique.

Dans la couche de passage vernis-air, il est vrai que ρ est nul, mais cela ne fait rien. Il y a dans la couche de passage métal-vernis, un courant de convection de Rowland et un « courant de Röntgen ». Ces deux courants se compensent

$$[f] = [g] = [h] = 0.$$

C'est ce que vous avez montré dans votre avant-dernière lettre.

Dans la couche de passage vernis-air; il ne peut y avoir de courant de Rowland, puisque $\rho = 0$, mais il y a un courant de Röntgen qui compense le courant de Röntgen de l'autre couche de passage.

A vous, de tout cœur,

POINCARÉ.

MON CHER CONFRÈRE,

J'admets

$$u = \frac{df}{dt} + \rho\xi + \left(\frac{dY}{dz} - \frac{dZ}{dy}\right) = \frac{d\Phi}{dt}$$

dans un diélectrique; j'admets

$$u = p$$

dans un métal; j'y ajoute l'équation de liaison

$$(lu + mv + nw) = l\frac{\partial f}{\partial t} + m\frac{\partial g}{\partial t} + n\frac{\partial h}{\partial t}$$

sur la surface de séparation.

Ceci mène, pour le disque, à

$$u = v = w = 0;$$

dans le disque, les *curls* de (XYZ) nuls partout dans le diélectrique, sauf la couche de passage, où

$$\rho\xi = 0; \qquad \frac{df}{dt} = 0,$$

et

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0;$$

enfin les valeurs de α, β, γ sont

$$\alpha + 4\pi X = 0, \qquad \beta + 4\pi Y = 0, \qquad \gamma + 4\pi Z = 0$$

dans tous les diélectriques fixes ou mobiles; $\alpha = \beta = \gamma = 0$ dans le disque, je crois; excusez-moi de ne pas refaire les calculs pour le chapelet et l'influence de la paroi qui agit indirectement en changeant les valeurs de f, g, h, dans l'espace balayé par le chapelet, où ils sont périodiques, mais avec $\frac{df}{dt}$, $\frac{dg}{dt}$, $\frac{dh}{dt}$ toujours de même signe, à cause des discontinuités.

Votre bien dévoué.

A. POTIER.

MON CHER CONFRÈRE,

Vous me demandez des équations : celles de Maxwell ou de Hertz, si vous préférez, me semblent bien suffisantes. Je traite ci-dessous deux cas simples : dans l'un seulement on a besoin des équations relatives au milieu en mouvement. Ou bien j'interprète correctement les principes, et alors il résultera que les expériences de Crémieu ne sont pas en contradiction avec l'idée qu'une masse en mouvement crée un champ magnétique ; ou bien je suis victime d'une illusion, qui apparaîtra plus facilement dans les cas simples ci-joints, alors je n'aurai qu'à m'incliner ; sinon *tout en étant absolument d'accord* avec vous sur l'absence d'effets magnétiques permanents des courants de conduction de l'enveloppe, il me sera facile de montrer que l'effet sur l'aiguille tend vers zéro à mesure : 1° que les parois se rapprochent du disque ; 2° que les segments chargés sont plus voisins ; mais ce ne serait que de la divagation, si vous n'admettez pas mes bases.

Votre bien dévoué,

A. POTIER.

Disque continu (vernissé, puisque vous le préférez) ; s'il y a courant, ce ne peut être que sur le disque. Si celui-ci est dans le plan xy,

$$\xi = -\omega y, \qquad \eta = \omega x, \qquad \zeta = 0, \qquad f = g = 0 \qquad \text{et} \qquad h = f(z),$$

$\rho = \frac{dh}{dz}$; les seuls termes utiles sont $[f]$, $[g]$, $[h]$, p. 380 [1] et l'on trouve

$$[f] = [g] = [h] = 0,$$

donc pas de force magnétique.

Action des parois. — Une masse A, part de A_1 va en A_2 et s'y arrête (*fig.* 5). Soit β, la force magnétique en M et $\int \beta\, dt$, l'impulsion totale.

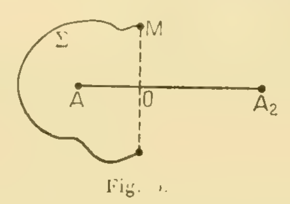


Fig. 5.

[1] Ce renvoi de page se rapporte à la 2e édition de l'Ouvrage *Électricité et Optique*, de M. POINCARÉ ; les notations $[f]$, $[g]$, $[h]$ sont définies dans cet Ouvrage.

$2\pi \mathrm{OM} \int \beta \, dt = 4\pi \times$ la variation du déplacement à travers une surface Σ limitée au cercle de rayon OM, soit

$$\frac{m}{\mathrm{OM}}\left(\frac{\mathrm{A}_1\mathrm{O}}{\mathrm{A}_1\mathrm{M}} + \frac{\mathrm{A}_2\mathrm{O}}{\mathrm{A}_2\mathrm{M}}\right).$$

Supposons un tuyau conducteur entourant $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2$ et fermé aux deux bouts, qu'il soit ou non mis à la terre, il faut considérer, outre le déplacement ci-dessus, les déplacements dus aux charges négatives de la partie interne du tuyau qui se trouvent concentrées près de A_1 ou près de A_2, et détruisent d'autant plus complètement l'effet de A_1 et de A_2 : 1° que A_1 et A_2 sont plus loin ; 2° que le tuyau est plus étroit.

A. Potier.

Mon cher Confrère,

Voici les réflexions que m'inspirent vos deux exemples :

Premier exemple. — On n'a $\xi = -\omega y$, $\eta = \omega x$ que dans le disque ; dans l'atmosphère, on a $\xi = \eta = 0$, et il y a une couche de passage où ξ et η varient très rapidement. Il faut tenir compte de cela.

Pour faciliter le calcul, je m'en vais encore simplifier votre exemple ; je suppose qu'au lieu d'une rotation, on ait une translation, chaque petit cylindre parallèle à l'axe des x subit une translation dans le sens de ses génératrices. Seulement, la vitesse de translation n'est pas la même pour tous les cylindres.

En d'autres termes, on a

$$\eta = \zeta = 0, \qquad \xi = f(y, z)$$

indépendante de x et de t.

Je suppose que tout est permanent dans le temps et par rapport à x.

Toutes les dérivées $\frac{d}{dt}$ et $\frac{d}{dx}$ sont nulles.

Le champ doit alors être perpendiculaire à l'axe des x, c'est-à-dire que

$$f = 0, \qquad \rho = \frac{dg}{dy} + \frac{dh}{dz}$$

Les courants se réduisent à $[f]$, $[g]$, $[h]$, et on trouve

$$[g] = [h] = 0;$$

$$[f] = \frac{d(g\xi)}{dy} + \frac{d(h\xi)}{dz} - \xi\left(\frac{dg}{dy} + \frac{dh}{dz}\right) = g\frac{d\xi}{dy} + h\frac{d\xi}{dz}.$$

Supposons maintenant que tout soit de révolution autour de l'axe des x; on a

$$y = r \cos \varphi, \qquad z = r \sin \varphi;$$

$$\frac{d\xi}{dy} = \frac{d\xi}{dr} \cos \varphi, \qquad \frac{d\xi}{dz} = \frac{d\xi}{dr} \sin \varphi;$$

$$\alpha = 0; \qquad \beta = -\mathrm{M} \sin \varphi, \qquad \gamma = \mathrm{M} \cos \varphi,$$

M champ magnétique.

$$f = 0; \qquad g = \mathrm{E} \cos \varphi, \qquad h = \mathrm{E} \sin \varphi.$$

E champ électrique :

$$[f] = \frac{d\xi}{dr}(g \cos \varphi + h \sin \varphi) = \mathrm{E} \frac{d\xi}{dr}, \qquad 2\pi \mathrm{M} r = 4\pi \int 2\pi r\, dr [f],$$

$$\mathrm{M} r = 4\pi \int_0 r [f]\, dr = 4\pi \int r\, d\xi\, \mathrm{E}, \qquad \frac{d(\mathrm{M} r)}{dr} = 4\pi r \mathrm{E} \frac{d\xi}{dr}.$$

D'autre part :

$$\frac{d(\mathrm{E} r)}{dr} = r\rho.$$

Telles sont les équations qui définissent les deux champs électrique et magnétique.

En intégrant par parties, je trouve :

$$\int_0^r \mathrm{E} r\, d\xi = \Big[\mathrm{E} r \xi\Big]_0^r - \int_0^r \xi \frac{d(\mathrm{E} r)}{dr}\, dr.$$

Si r est assez grand pour que l'on se trouve dans l'espace qui est en repos, l'expression $\mathrm{E} r \xi$ s'annule aux deux limites, de sorte qu'il reste :

$$\mathrm{M} r = -4\pi \int \xi \frac{d\mathrm{E} r}{dr}\, dr = -4\pi \int r \rho \xi\, dr$$

et nous retombons sur le courant de convection pur.

Mais il est temps d'aborder le cas de la rotation :

Posons

$$x = r \cos \theta, \qquad y = r \sin \theta$$

et soit ω la vitesse angulaire qui dépendra de r et de z, mais pas de θ ni de t.

Nous poserons :

$$f = \mathrm{E} \cos \theta, \qquad g = \mathrm{E} \sin \theta.$$

E composante du champ électrique suivant le rayon vecteur r; l'autre composante est h.

De même :

$$\alpha = M \cos \theta, \qquad \beta = M \sin \theta.$$

M composante du champ magnétique suivant r, l'autre composante est γ.

On a ensuite :

$$\xi = -r\omega \sin \theta, \qquad \eta = r\omega \cos \theta, \qquad \zeta = 0.$$

Les expressions qui entrent dans $[f]$, ... sont :

$$h\eta - g\zeta = hr\omega \cos \theta = X,$$
$$f\zeta - h\xi = hr\omega \sin \theta = Y,$$
$$g\xi - f\eta = -Er\omega = Z.$$

Je trouve ensuite :

$$\int (X\,dx + Y\,dy + Z\,dz) = \int (hr\omega\,dr - Er\omega\,dz).$$

Or, le premier membre peut s'écrire (théorème de Stokes) :

$$\int (lA + mB + nC)\,d\Omega.$$

Remarquons que dans toutes ces expériences, on observe l'effet moyen sur une aiguille aimantée (troisième communication) ou bien l'effet d'induction sur un circuit interrompu de temps en temps (première communication).

Mais, dans ce dernier cas, les interruptions se font à des intervalles de temps qui n'ont aucun rapport avec la période de la rotation; de sorte que cela revient encore au même; l'effet moyen des courants de conduction qui peuvent régner dans la partie fixe devient nul.

C'est pourquoi j'avais demandé à M. Crémieu, au mois de juillet dernier, de monter l'expérience suivante :

Les parties dorées sont couvertes de hachures (*fig.* 6), elles sont soit au sol, soit à la source, par leur *centre*.

Lorsque le diamètre A'B' du disque mobile coïncide avec le diamètre AB du disque fixe, les parties dorées sont en regard et forment condensateur. Mais l'angle du secteur doré mobile est un peu plus petit que celui du secteur doré fixe. Le secteur doré mobile prend donc une charge +, et le secteur doré fixe prend une charge — mais seulement en face du secteur mobile. La charge + du premier se transporte par convection, la charge — du second se transporte parallèlement par conduction.

Donc si le courant de conduction agit et que le courant de convection n'agisse pas, il y aura un champ; si les deux courants agissent, il n'y en aura pas.

Dans la position inverse, lorsque A'B' coïncidera avec BA, les deux secteurs

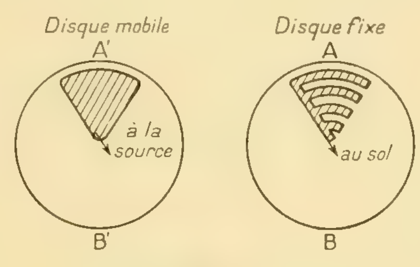


Fig. 6.

n'étant pas en face l'un de l'autre, ne prendront qu'une charge insignifiante, et il n'y aura pas de champ.

Prenons la disposition de la première communication, et supposons qu'on interrompe le circuit du galvanomètre dans la première position, par exemple, et qu'on le rétablisse dans la seconde. Alors il y aura un effet si un seul des deux courants agit (idées de M. Crémieu), et il n'y en aura pas s'ils agissent tous deux (idées anciennes).

Seulement pour cela, il faut que l'interruption soit synchrone de la rotation du disque.

La construction de l'interrupteur synchrone pourra présenter des difficultés, mais M. Crémieu espère en triompher.

Seulement, la première chose à faire était de reprendre et de varier l'expérience de Rowland proprement dite (troisième communication). C'est ce qu'il fait dans ce moment.

Pardonnez-moi la longueur de ma lettre, et croyez à mes sentiments les plus dévoués.

Poincaré.

Mon cher Confrère,

Je crois être arrivé à intégrer les équations de Hertz, dans le cas qui nous occupe; je suppose la couche diélectrique-vide de passage infiniment mince, et la surface même du diélectrique équipotentielle.

Si D_0 est le déplacement d'un point de cette surface, V_0 sa vitesse (prise dans le diélectrique lié au conducteur) et α l'angle de ses deux secteurs, je trouve :

1° Les courants de déplacement de tout le champ sont équivalents à des courants normaux à la couche de passage, d'intensité $D_0 V_0 \cos\alpha$ par unité de surface ;

2° Les courants sur la couche de passage sont superficiels, dirigés suivant la projection de la vitesse sur la surface d'intensité $D_0 V_0 \sin\alpha$.

L'ensemble équivaut à des courants $D_0 V_0$, dirigés suivant la vitesse, c'est-à-dire que l'on a

$$\alpha = \frac{d}{dz}\int \frac{D_0 \eta_0}{r}\,d\omega - \frac{d}{dy}\int \frac{D_0 \zeta_0}{r}\,d\omega$$

et l'on peut vérifier :

1° qu'en un point de l'espace

$$\frac{d\alpha}{dz} - \frac{d\gamma}{dx} = \frac{d}{dy}\int D_0 \left(\xi \frac{d\frac{1}{r}}{dx'} + \eta \frac{d\frac{1}{r}}{dy'} + \zeta \frac{d\frac{1}{r}}{dz'} \right) d\omega = \frac{d}{dy}\int D_1 \frac{d\frac{1}{r}}{dt}\,d\omega = 4\pi \frac{dg}{dt}\cdot$$

à cause de

$$4\pi g = \frac{d}{dy}\int D_0 \frac{1}{r}\,d\omega ;$$

2° pour un petit contour

$$\int (\alpha\,dx + \beta\,dy + \gamma\,dz) = \begin{vmatrix} dx_1 & dy_1 & dz_1 \\ \xi & \eta & \zeta \\ f & g & h \end{vmatrix}$$

si dx_1, dy_1, dz_1 est l'élément de la surface de séparation, soit $D_0 V_0 \sin\alpha\, ds$ pour un élément normal à la vitesse et zéro pour un élément suivant la projection de la vitesse. On retombe donc sur vos conclusions peut-être un peu précisées ; je ne m'attendais pas au rôle de l'épaisseur du diélectrique ; dans le cas d'une sphère tournant autour de son axe, à charge égale, les $\int D_0\, d\omega$ restent les mêmes, mais ξ, η, ζ croissent comme le rayon.

Votre manière de voir est encore corroborée par les considérations suivantes. Quand un aimant AB tourne autour de son axe, *on admet* qu'il produit un

champ électrostatique : donc, il attirera un disque chargé CD. Réciproquement, si l'on fait tourner CD en sens contraire, il doit attirer AB, c'est-à-dire pro-

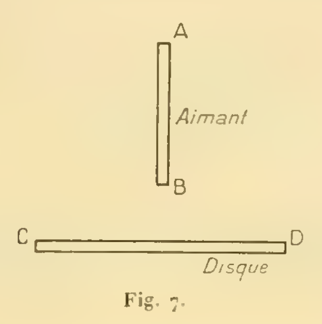


Fig. 7.

duire un champ magnétique. Seulement, où en sont les vérifications expérimentales ?

Votre bien dévoué.

A. Potier.

THÉORIE

DE LA

BALANCE AZIMUTALE QUADRIFILAIRE

Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. 138, p. 869-874 (11 avril 1904).

On trouvera, dans le même numéro, la description de cette balance. Voici la théorie de son fonctionnement :

Droites D *et* Δ. — Tous les mouvements que peut prendre le système formé par le fléau, le flotteur qui le supporte et les quatre fils qui le maintiennent se ramènent à deux rotations autour des deux droites D et Δ. J'appelle ainsi deux droites qui rencontrent les quatre fils. Ceux-ci ne sont pas tout à fait verticaux, par suite de la torsion préalable qu'on leur donne ; dans ces conditions, il y a deux droites, et deux seulement qui rencontrent les prolongements des quatre fils. Un point quelconque du fléau peut décrire une infinité de trajectoires toutes normales à une droite qui rencontre D et Δ.

Dans la position d'équilibre initial, le système admet un plan de symétrie par rapport auquel les quatre fils sont deux à deux symétriques. La droite D est perpendiculaire au plan de symétrie ; la droite Δ est dans ce plan.

Centre de gravité effectif. — Le système mobile est soumis aux poids suivants : 1° poids du fléau ; 2° poussée du mercure ; 3° poids du flotteur ; 4° poids des plateaux et de ce qu'ils portent.

Toutes ces forces sont verticales ; elles ont des valeurs parfaitement déterminées si le flotteur sort de la surface du mercure par une tige T suffisamment

mince; elles auront une résultante unique, verticale, appliquée dans le solide fléau en un point G que j'appelle le *centre de gravité effectif*, et que nous allons définir plus complètement.

Construction du point G_0. — Soit en B (*fig.* 1) la trace de l'arête du couteau autour duquel tourne le fléau; soit H le point d'application de la résul-

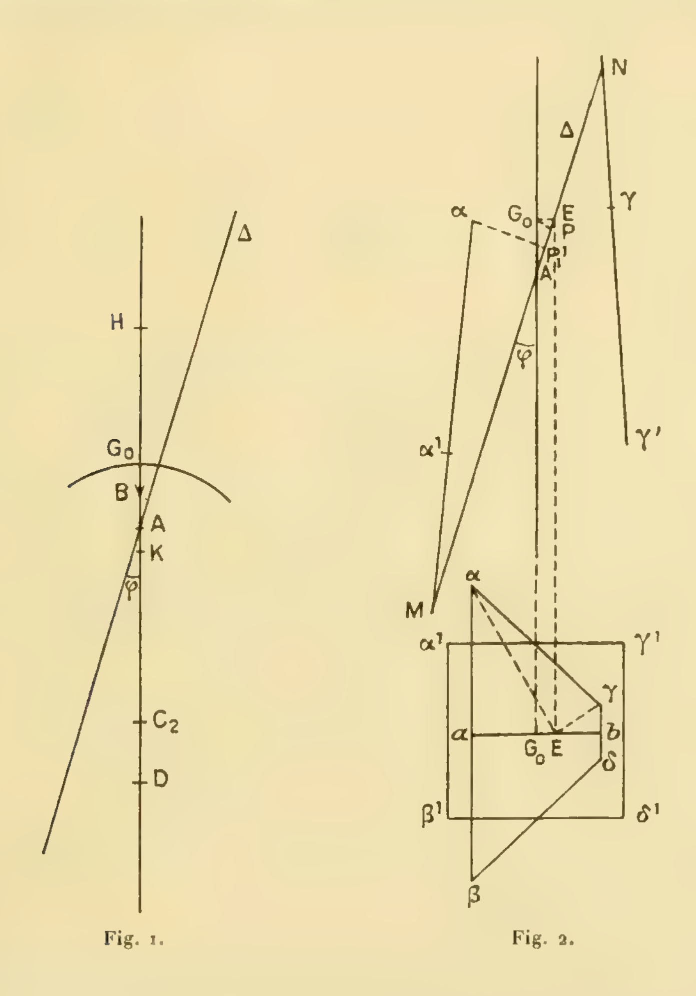


Fig. 1. Fig. 2.

tante Π de la poussée du flotteur et du poids de ce flotteur. Enfin soit K le point d'application de la résultante P du poids du fléau et des poids (plateaux compris) qui lui sont appliqués.

Les deux bifilaires sont soumis à une tension verticale.

$$\Pi - P = p.$$

Dans toute rotation du système autour de la droite D, le plan de symétrie (plan de la figure) reste un plan de symétrie, l'arête du couteau et la droite KB restent dans ce plan de symétrie qui demeure vertical. Donc la droite BH restera dans le prolongement de KB.

Pour calculer le couple qui, sous l'influence d'un excès de poids placé dans l'un des plateaux, provoquera une rotation $d\omega_1$ autour de D, on calculera donc la position du centre de gravité effectif en appliquant la poussée Π en H et les poids — P en K.

Considérons, au contraire, une rotation $d\omega_2$ autour de la droite Δ; l'arête B restera très sensiblement horizontale, et, par suite, la droite BH restera verticale. Mais la droite KB s'incline; elle n'est donc plus dans le prolongement de BH. Il faut, par suite, calculer la position de G_0 en appliquant la poussée Π non plus en H, mais en B sur l'arête du couteau.

Rotation autour de la droite D. *Stabilité du système.* — Quand un excès de poids dp est appliqué à l'un des plateaux, le fléau tourne comme il a été expliqué; le centre de gravité effectif prend un mouvement en sens inverse; sa verticale cesse de rencontrer la droite D.

Ce mouvement n'intéresse pas la sensibilité de la balance, qui ne dépend que de la rotation autour de Δ, rotation qui est la seule observée.

Mais la rotation autour de D intéresse la stabilité du système. Il faut que la résultante des forces appliquées en G_0 tende à s'opposer au mouvement provoqué autour de D par l'excès de poids dp.

Cette condition se trouve réalisée par la façon dont l'appareil est disposé. Nous ne nous occuperons donc que de la rotation autour de Δ.

Rotation autour de la droite Δ. *Sensibilité.* — Évaluons d'abord le moment M de l'excès de poids dp par rapport à Δ.

Soit l la demi-longueur du fléau. Si Δ passe très près de G_0, ce qui sera le cas ordinaire, l sera notre bras de levier ou, plus exactement, un minimum de ce bras de levier. Seulement la composante efficace ne sera pas dp, mais $dp \sin\varphi$, φ étant l'angle de Δ avec la verticale. Donc

$$M = l\,dp \sin\varphi.$$

Soit $J - J'$ la composante verticale de l'accélération du point G_0. Le travail

de nos forces verticales sera

$$p(\mathrm{J}+\mathrm{J}')\frac{dt^2}{2}$$

pendant le temps très petit dt qui s'écoule quand le système tourne de l'angle $d\omega_2$.

D'autre part, ce même travail est égal à

$$\frac{\mathrm{M}\,d\omega_2}{2}.$$

Il vient donc

$$(1) \qquad \mathrm{M} = l\,dp \sin\varphi = p\,\frac{\mathrm{J}+\mathrm{J}'}{\omega^2}\,d\omega_2,$$

dans lequel

$$\omega = \frac{d\omega_2}{dt}$$

désigne la vitesse angulaire de rotation autour de Δ.

La formule (1) sera la formule de sensibilité.

Construction de la droite Δ. — Soient dans l'espace $\alpha\alpha'$ et $\gamma\gamma'$ les fils de l'un des bifilaires; $\alpha\alpha'$ prolongé vient couper le plan de symétrie en un point M; le fil symétrique $\beta\beta'$ passe également en M. De même $\gamma\gamma'$ prolongé coupe le plan de symétrie en un point N où passe aussi le fil symétrique $\delta\delta'$.

La droite MN est la droite Δ. On voit qu'il est facile de disposer le quadrifilaire de façon à avoir une droite Δ à peu près quelconque.

Représentant en $\alpha\beta\gamma\delta$, $\alpha'\beta'\gamma'\delta'$ la trace des quatre fils dans un plan perpendiculaire à celui qui contient la droite Δ, l'inclinaison de Δ, et par suite la valeur de φ sera réglée par un choix convenable des longueurs des côtés des deux quadrilatères $\alpha\beta\gamma\delta$, $\alpha'\beta'\gamma'\delta'$ formés par les quatre points d'attache supérieurs et les quatre points d'attache inférieurs du quadrifilaire.

Calcul de $\mathrm{J}+\mathrm{J}'$. — La droite Δ décrira dans l'espace une certaine surface réglée R; pour un observateur invariablement lié au fléau, elle paraîtrait décrire une surface réglée R′, et le mouvement du fléau est le même que si R′ roulait sur R. Dans la position initiale, Δ est dans le plan de symétrie; le plan tangent commun à R et R′ est perpendiculaire au plan de symétrie, il est donc le même tout le long de la génératrice. Par suite les éléments des surfaces R et R′ sont des éléments de surface développable; par suite des éléments de cône.

L'accélération peut donc se calculer comme si le système était mobile autour d'un point fixe situé quelque part sur la droite Δ; d'où cette conséquence que l'accélération que nous avons à calculer sera la résultante de deux autres : 1° de l'accélération centripète J due à la rotation autour de Δ, qui se calcule d'après la formule ordinaire de la force centrifuge; 2° de l'accélération J′ due à l'accélération angulaire.

Cette accélération angulaire sera représentée en grandeur et direction par une droite Θ qui coupe Δ au point fixe. Pour un point Q quelconque, l'accélération J′ due à Θ sera représentée par le même vecteur que la vitesse qu'aurait ce même point dans une rotation représentée par la droite Θ.

Θ est dans le plan tangent à R, plan qui est perpendiculaire au plan de symétrie. On peut supposer que Θ est elle-même perpendiculaire au plan de symétrie; ceci revient à supposer que la vitesse angulaire autour des droites Δ successives est constante.

Calcul de J *et* J′. — Il nous faut calculer d'abord les composantes de J et J′ pour les points d'attache supérieurs des fils du quadrifilaire, dans la direction de ces fils.

Soit v la vitesse du point d'attache supérieur α du fil $\alpha\alpha'$ (*fig.* 2). On aura pour les composantes de l'accélération de α suivant le fil $\alpha\alpha'$, en désignant par ψ l'angle $M\alpha P$,

$$J + J' = \frac{v^2}{\alpha\alpha'}, \qquad J = \frac{v^2}{\alpha P}\cos\psi = \frac{v^2}{\alpha M}.$$

Or le fil étant sensiblement vertical, αM est très grand par rapport à $\alpha\alpha'$: J très petit par rapport à $J + J'$; de sorte qu'on a très sensiblement

$$J' = \frac{v^2}{\alpha\alpha'}.$$

Calculons maintenant J et J′ pour le point G_0. C'est la composante verticale qui nous intéresse seule, car, G_0 étant dans le plan de symétrie, le plan $G_0\Delta$ est vertical.

Soit ω la vitesse angulaire autour de Δ. La vitesse linéaire v_1 de G_0 sera (*fig.* 2)

$$v_1 = \omega G_0 P_1.$$

D'ailleurs on a

$$G_0 P_1 = G_0 A \sin\varphi,$$

$$(2) \qquad J = \omega^2 G_0 P_1 \sin\varphi.$$

Pour calculer J′ considérons (*fig.* 2) le trapèze $\alpha\beta\gamma\delta$ formé par les quatre points d'attache supérieurs des fils. Supposons d'abord le point G_0 dans le plan de ce trapèze, et soit E le point où la droite Δ perce ce même plan.

On a

$$G_0E = G_0A\,\mathrm{tg}\,\varphi.$$

Soit λ la longueur commune des fils.

Les composantes verticales de J′ seront sensiblement les mêmes pour les points α, β et tous les points de la droite $\alpha\beta$. Pour le point a en particulier, on aura

$$\frac{\omega^2\,\overline{\alpha E}^2}{\lambda}.$$

De même pour tous les points de la droite $\gamma\delta$ et en particulier pour le point b, on aura sensiblement la même valeur

$$\frac{\omega^2\,\overline{\gamma E}^2}{\lambda}.$$

Pour tous les autres points du plan, on n'a qu'à interpoler linéairement puisque la droite Θ est horizontale.

Supposons en particulier que le trapèze $\alpha\beta\gamma\delta$ diffère très peu d'un rectangle et que le point E soit très voisin du centre de ce rectangle, G_0 très voisin de E. Ce cas correspond, ainsi qu'on le verra, à celui qu'il faut réaliser pour obtenir une grande sensibilité.

Alors on aura très sensiblement

$$\alpha E = \gamma E.$$

L'accélération sera donc la même tout le long de la droite ab et comme G_0 se retrouve sur cette droite, la composante J′ de son accélération sera par suite

(3) $$J' = \frac{\overline{\alpha E}^2\,\omega^2}{\lambda}.$$

On a alors, en additionnant (2) et (3),

$$J + J' = \omega^2\,\overline{G_0P_1}\sin\varphi + \frac{\omega^2\,\overline{\alpha E}^2}{\lambda}.$$

Substituant cette valeur dans l'équation (1) on a, pour l'équation de sensibilité,

(4) $$l\,dp\sin\varphi = \left(G_0P_1\sin\varphi + \frac{\overline{\alpha E}^2}{\lambda}\right)p\,d\omega^2.$$

Remarquons que, l'axe Θ étant horizontal, la composante verticale de J' sera la même pour tous les points d'une même verticale. J' et par suite la formule (4) resteront donc les mêmes que G_0, soit dans le plan de $\alpha\beta\gamma\delta$ ou en dehors de ce plan.

ÉTUDE DE LA PROPAGATION DU COURANT

EN PÉRIODE VARIABLE

SUR UNE LIGNE MUNIE DE RÉCEPTEUR [1]

L'Éclairage électrique, t. 40, p. 121-128 (23 juillet 1904); p. 161-167 (30 juillet 1904) p. 201-212 (6 août 1904) et p. 241-250 (13 août 1904).

Équation des télégraphistes.

Je vous rappelle d'abord comment M. Pomey est arrivé dans son Cours à l'équation des télégraphistes. Soit dx la longueur d'un élément de fil, $\lambda\, dx$ sa self-induction, $\rho\, dx$ sa résistance, $\gamma\, dx$ sa capacité, $\mathrm{E}\, dx$ la force électromotrice qui règne dans cet élément, V le potentiel, i l'intensité ; on aura (par l'équation de Ohm).

$$\lambda \frac{di}{dt} + \rho i = \mathrm{E} + \frac{dv}{dx}.$$

D'autre part, la quantité d'électricité qui se trouve sur l'élément de fil est $\gamma \mathrm{V}\, dx$ et l'équation de continuité nous donne :

$$\frac{di}{dx} = \gamma \frac{dv}{dx}.$$

Cette dernière équation montre qu'il existe une fonction Φ, telle que l'on ait :

$$i = \gamma \frac{d\Phi}{dt}, \qquad \mathrm{V} = \frac{d\Phi}{dx}$$

---

[1] Cette étude est la reproduction in extenso d'une série de conférences, faites à l'École Supérieure de Télégraphie et complétant le cours de M. Pomey.

et en remplaçant i et V par ces valeurs, nous voulons :

$$(1)\qquad \gamma\lambda\frac{d^2\Phi}{dt^2} + \rho\gamma\frac{d\Phi}{dt} - \frac{d^2\Phi}{dx^2} = E.$$

C'est l'*équation des télégraphistes*. Si l'on suppose que la force électromotrice E qui a donné naissance à la perturbation a cessé, l'équation devient :

$$(1\ bis)\qquad \gamma\lambda\frac{d^2\Phi}{dt^2} + \rho\gamma\frac{d\Phi}{dt} - \frac{d^2\Phi}{dx^2} = 0$$

qui nous apprend comment se propage une perturbation une fois produite. Si l'isolement de la ligne était imparfait, de façon que la ligne fût affectée d'une perte constante, il faudrait ajouter au premier nombre un terme en **Φ**. L'équation ainsi obtenue se ramènerait d'ailleurs aisément à la forme (1 *bis*).

Soit en effet :

$$\frac{d^2\Phi}{dt^2} + 2\beta\frac{d\Phi}{dt} + \gamma\Phi - \alpha\frac{d^2\Phi}{dx^2} = 0$$

l'équation complète, où β, γ et α sont des coefficients quelconques. Posons :

$$\Phi = U e^{Kt},$$

l'équation conserve la même forme et devient :

$$\frac{d^2U}{dt^2} + 2(K+\beta)\frac{dU}{dt} + (K^2 + 2K\beta + \gamma)U - \alpha\frac{d^2U}{dx^2} = 0.$$

Si alors on prend $K = -\beta$ on fait disparaître le terme en $\frac{dU}{dt}$. Si, au contraire, on choisit K de façon à satisfaire à l'équation :

$$K^2 + 2K\beta + \gamma = 0,$$

on fait disparaître le terme en U et on est ramené à l'équation (1 *bis*).

Reprenons l'équation (1 *bis*) ; il est clair que nous pouvons y satisfaire en faisant :

$$\Phi = e^{qt+px}$$

pourvu que q et p soient des constantes liées par la relation :

$$(2)\qquad \gamma\lambda q^2 + \rho\gamma q - p^2 = 0.$$

Si q et p sont des constantes *imaginaires* satisfaisant à la même relation, on satisfera encore à l'équation (1 *bis*) en faisant

$$\Phi = \text{partie réelle } e^{qt+px}.$$

Si q est *purement* imaginaire, la solution ainsi trouvée est une fonction périodique du temps ; c'est une solution *isochrone*.

Théorie rigoureuse de la propagation.

Mais avant d'aller plus loin, une question préjudicielle se pose. La façon dont nous avons établi l'équation (1) est-elle à l'abri de toute objection? Nous avons traité la résistance ρ comme une constante ; or on sait que les courants à alternance rapide ont une tendance à se porter à la surface du conducteur, de sorte qu'une petite partie de la section de ce conducteur est utilisée et que sa résistance semble augmenter. Ainsi la résistance devrait dépendre de la fréquence, c'est-à-dire de q et être plus grande pour les fréquences élevées que pour les faibles fréquences. Il est donc nécessaire pour justifier l'équation que nous avons adoptée de recourir à une analyse plus complète. Je vais d'abord vous rappeler les équations du champ électromagnétique, telles que M. Pomey les a établies dans son cours (p. 252).

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{d\alpha}{dt} &= \frac{dZ}{dy} - \frac{dY}{dz}, & \frac{d\beta}{dz} - \frac{d\gamma}{dy} &= 4\pi CX + K\frac{dX}{dt},\\ \frac{d\beta}{dt} &= \frac{dX}{dz} - \frac{dZ}{dx}, & \frac{d\gamma}{dx} - \frac{d\alpha}{dz} &= 4\pi CY + K\frac{dY}{dt},\\ \frac{d\gamma}{dt} &= \frac{dY}{dx} - \frac{dX}{dy}, & \frac{d\alpha}{dy} - \frac{d\beta}{dx} &= 4\pi CZ + K\frac{dZ}{dt}. \end{aligned}\right.$$

X, Y, Z représentent les composantes de la force électrique, C la conductibilité, K le pouvoir inducteur.

Supposons un conducteur cylindrique (génératrices parallèles à l'axe des x) et une perturbation se propageant le long de ce conducteur. A l'extérieur du conducteur, C sera nul et K sera égal à l'inverse du carré de la vitesse de la lumière. A l'intérieur du conducteur, C est très grand, K est inconnu mais nous verrons plus loin qu'il n'intervient pas, de sorte qu'on peut le négliger.

Dans ces conditions le champ électromagnétique est de révolution autour de l'axe des x, les lignes de force magnétique sont des cercles dans des plans perpendiculaires à cet axe, les lignes de force électrique sont des courbes planes situées dans des plans méridiens, c'est-à-dire dans des plans passant par l'axe des x.

Nous pouvons poser alors :

$$(4)\qquad \alpha = 0,\qquad \beta = \frac{d\pi}{dz},\qquad \gamma = -\frac{d\pi}{dy},$$

d'où l'on déduit immédiatement :

$$(5)\qquad \left\{\begin{aligned} &4\pi CX + K\frac{dX}{dt} = \frac{d^2\pi}{dy^2} + \frac{d^2\pi}{dz^2},\\ &4\pi CY + K\frac{dY}{dt} = -\frac{d^2\pi}{dx\,dy},\\ &4\pi CZ + K\frac{dZ}{dt} = -\frac{d^2\pi}{dx\,dz}.\end{aligned}\right.$$

Je dis que l'on aura également :

$$(6)\qquad 4\pi C\frac{d\pi}{dt} + K\frac{d^2\pi}{dt^2} - \frac{d^2\pi}{dx^2} - \frac{d^2\pi}{dy^2} - \frac{d^2\pi}{dz^2} = 0.$$

En effet, on peut déduire des équations précédentes que les dérivées du premier membre de (6) tant par rapport à y que par rapport à z sont nulles; c'est-à-dire que ce premier membre est une fonction de x et de t. Mais la fonction π n'est déterminée par les équations (4) *qu'à une fonction arbitraire près de x et de t.* On pourra alors toujours disposer de cette fonction arbitraire de telle façon que ce premier membre se réduise à zéro.

Cela posé, le champ étant de révolution, si nous passons aux coordonnées semi-polaires en faisant :

$$y = r\cos\theta, \qquad z = r\sin\theta,$$

la fonction π ne dépendra que de x, t et r, et l'équation (6) deviendra :

$$(7)\qquad 4\pi C\frac{d\pi}{dt} + K\frac{d^2\pi}{dt^2} - \frac{d^2\pi}{dx^2} - \frac{d^2\pi}{dr^2} - \frac{1}{r}\frac{d\pi}{dr} = 0.$$

Cherchons à satisfaire à cette équation en faisant

$$\pi = f(r)\,e^{qt+px},$$

il viendra :

$$(8)\qquad \frac{d^2\pi}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\pi}{dr} = (4\pi Cq + Kq^2 - q^2)\,\pi.$$

Nous ferons :

$(4\pi Cq + Kq^2 - p^2) = a$ dans l'air,

$(4\pi Cq + Kq^2 - p^2) = a'$ dans le conducteur

et l'équation aura la forme (dans l'air par exemple) :

$$(8\ bis)\qquad \frac{d^2\pi}{dr^2} + \frac{1}{2}\frac{d\pi}{dr} = a\pi.$$

Propriétés des fonctions de Bessel.

Cette équation ne nous est pas inconnue. Elle a été envisagée par M. Pomey dans son Cours (p. 278) ; c'est d'ailleurs une des transformées de l'équation de Bessel qui s'écrit comme on sait :

$$(9) \qquad J'' + \frac{1}{x} J' + J = 0,$$

où J' et J'' représentent les dérivées successives de J par rapport à x. Alors la solution de l'équation (8 *bis*) sera évidemment :

$$f = J(r\sqrt{-a}).$$

L'équation (9) admet comme intégrale :

$$\int \frac{e^{xzi}\,dz}{\sqrt{1-z^2}}.$$

L'intégrale peut être prise soit de -1 à $+1$, soit de -1 à l'infini, pourvu que z tende vers l'infini de telle façon que l'exponentielle e^{izx} tende vers zéro.

Si l'on intègre de -1 à $+1$, on obtiendra l'intégrale :

$$\pi J_0 = \pi\left[1 - \left(\frac{x}{2}\right)^2 \frac{1}{(1!)^2} + \left(\frac{x}{2}\right)^4 \frac{1}{(2!)^2} - \left(\frac{x}{2}\right)^6 \frac{1}{(3!)^2} + \left(\frac{x}{2}\right)^8 \frac{1}{(4!)^2} \cdots\right],$$

où J_0 est la fonction de Bessel proprement dite ; nous voyons que cette fonction est holomorphe pour toutes les valeurs de x. Pour x réel, elle est réelle et subit des oscillations analogues à celles du cosinus.

Dès que x dépasse la valeur 2, on a très sensiblement :

$$J_0 = \frac{2\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)}{\sqrt{2\pi x}}.$$

Pour x *purement imaginaire*, tous les termes du développement sont positifs, d'où il suit que la fonction J_0 est constamment réelle, positive et croissante avec le module de x. Si ix est positif et très grand, on a très sensiblement :

$$J_0 = \frac{e^{ix}}{\sqrt{2\pi i x}}.$$

Si, au contraire, on intègre de -1 à l'infini on obtiendra une autre intégrale

que j'appellerai I_0 et dont les propriétés essentielles seront les suivantes ; pour $x = 0$, elle devient infinie ; pour x très petit, elle est sensiblement proportionnelle à $\log x$, et pour x très grand elle est sensiblement proportionnelle à $\frac{e^{-ix}}{\sqrt{x}}$.

Si l'on intégrait de $+1$ à l'infini, on obtiendrait une troisième intégrale, qui pour x très grand serait sensiblement proportionnelle à $\frac{e^{ix}}{\sqrt{x}}$.

Suite de la théorie de la propagation.

D'après cela on aura dans le conducteur

$$\pi = e^{qt+px} \mathrm{J}\left(r\sqrt{-a'}\right),$$

J étant l'une des intégrales de (9) et dans l'air :

$$\pi = e^{qt+px} \mathrm{J}\left(r\sqrt{-a}\right)$$

J étant une autre intégrale.

Quelle est maintenant celle de ces intégrales qu'il s'agit de choisir ?

Dans le conducteur, l'intégrale choisie doit être proportionnelle à J_0, car elle doit rester finie pour $r = 0$, dans l'air elle doit être proportionnelle à I_0 sans quoi à une très grande distance de l'axe, la perturbation se réduirait à deux ondes planes, l'une se rapprochant de l'axe, l'autre s'en éloignant, et en effet on aurait alors :

$$\mathrm{J} = c\mathrm{I}_0 + c'\mathrm{I}'_0,$$

où I'_0 serait l'intégrale obtenue en intégrant de $+1$ à l'infini et c et c' deux coefficients constants ; on aurait donc pour r très grand :

$$\pi = \frac{1}{\sqrt{r}}\left(c\, e^{qt+px-r\sqrt{a}} + c'\, e^{qt+px+r\sqrt{a}}\right).$$

Le premier terme représente une onde s'éloignant de l'axe, le second une onde se rapprochant de l'axe. Comme l'axe est l'origine de la perturbation, nous ne pouvons avoir que l'onde qui s'éloigne de l'axe I_0 il faut donc que c' soit nul, c'est-à-dire que J_0 soit proportionnel à I_0.

Comme le rayon du fil est très petit, nous aurons donc dans l'air :

$$\mathrm{J} = \mathrm{A} \log r.$$

A étant une constante, et dans le fil :

$$\mathrm{J} = \mathrm{BJ}_0(r\sqrt{-a'}),$$

B étant une constante.

Il y a une discontinuité à la surface de séparation des deux milieux (conducteur et air), c'est-à-dire à la surface du fil. Il faut que la composante tangentielle de la force magnétique, et celle de la force électrique soient continues.

Force magnétique. — Elle est égale à $\frac{d\pi}{dr}$; elle est donc dans l'air $\frac{\mathrm{A}}{r}$ et dans le fil

$$\mathrm{B}\sqrt{-a'}\,\mathrm{J}'_0(r\sqrt{-a'}),$$

d'où une première équation :

(10) $$\mathrm{B}\sqrt{-a'}\,\mathrm{J}'_0(r\sqrt{-a'}) = \frac{\mathrm{A}}{r}$$

(r représente ici le rayon du fil).

Force électrique. — Il s'agit ici de la composante tangentielle, c'est-à-dire de X. On a d'ailleurs :

$$4\pi\mathrm{CX} + \mathrm{K}\frac{d\mathrm{X}}{dt} = (4\pi\mathrm{C} + \mathrm{K}q)\mathrm{X} = \frac{d^2\pi}{dy^2} + \frac{d^2\pi}{dz^2} = \frac{d^2\pi}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\pi}{dr},$$

d'où dans l'air (C = 0) :

$$\mathrm{K}q\mathrm{X} = a\pi = a\,e^{qt+px}\mathrm{A}\log r$$

et dans le conducteur (K = 0) :

$$4\pi\mathrm{CX} = a\pi = a\,e^{qt+px}\mathrm{BJ}_0(r\sqrt{-a'}),$$

d'où une deuxième équation :

(11) $$4\pi\mathrm{C}a\mathrm{A}\log r = \mathrm{BK}qa'\mathrm{J}_0(r\sqrt{-a'});$$

en éliminant le rapport $\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}$ entre les équations (10) et (11), on trouve :

(12) $$4\pi\mathrm{C}a\log r\left[r\sqrt{-a'}\,\mathrm{J}'_0(r\sqrt{-a'})\right] = \mathrm{K}qa'\mathrm{J}_0(r\sqrt{-a'}).$$

Si $r\sqrt{-a'}$ est petit, on pourra réduire les développements de J_0 et de J'_0 à leurs premiers termes, ce qui donne :

$$\mathrm{J}_0 = 1, \qquad r\sqrt{-a'}\,\mathrm{J}'_0 = \frac{a'r^2}{2}$$

et l'équation (12) devient :

(13) $$2\pi C a r^2 \log r = Kq,$$

or

$$a = Kq^2 - p^2 ;$$

je puis donc écrire

(14) $$Kq^2 - \frac{Kq}{2\pi C r^2 \log r} - p^2 = 0.$$

Ce n'est pas autre chose que l'équation (2) : on a en effet, si r est petit,

$$\gamma = \frac{K}{2 \log r}, \qquad \lambda = -2 \log r, \qquad \rho = \frac{1}{\pi C r^2}.$$

L'équation (2) étant équivalente à l'équation (1), l'équation des télégraphistes se trouve vérifiée *dans le cas où* $r\sqrt{-a'}$ *est petit.*

Si au contraire $r\sqrt{-a'}$ est grand, on aura sensiblement :

$$J_0 = \frac{1-i}{\sqrt{\pi r \sqrt{-a'}}} e^{r\sqrt{-a'}}, \qquad J'_0 = \frac{(1-i)i}{\sqrt{\pi r \sqrt{-a'}}} e^{r\sqrt{-a'}}.$$

ce qui montre que J_0 croît rapidement avec r et par conséquent que le courant est localisé à la surface du fil. L'équation (12) devient alors :

$$4\pi C a r \log r = Kq\sqrt{a'}$$

ou si l'on observe que

$$a' = 4\pi C q,$$

car $Kq^2 - p^2$ est négligeable devant $4\pi C q$,

(15) $$Kq^2 - p^2 = \frac{Kq\sqrt{q}}{r \log r \sqrt{4\pi C}}.$$

On voit que dans ce cas, l'équation des télégraphistes n'est plus applicable.

Évaluations numériques.

On a dans le cuivre $C = 1,25 . 10^{-4}$, et dans l'air $K = \frac{1}{9} . 10^{-20}$. Avec les oscillations hertziennes on a : $\frac{q}{i} = \pi . 10^8$. Donc Kq^2 est plus de 400 000 000 de fois plus petit que $4\pi C q$; nous pouvons donc négliger dans a' les termes en $Kq^2 - p^2$ devant $4\pi C q$; et cela quand même K serait dans un métal

beaucoup plus grand que dans l'air. Cela est vrai pour les oscillations hertziennes et *a fortiori* pour les oscillations plus lentes.

Quel est maintenant l'ordre de grandeur de $r\sqrt{-a'} = \sqrt{-a4\pi Cq}$. S'il y a 10^{2n} vibrations par seconde, on a $|q| = \pi . 10^{2n}$; d'où, pour $r = 0{,}2$:

$$|r\sqrt{-a'}| = 0{,}2\,n\sqrt{5}.10^{n-2}.$$

Avec une fréquence de 10 000 on aura donc $|r\sqrt{-a'}|$ voisin de 1 et la formule (14) restera sensiblement applicable ; avec une fréquence hertzienne, on aurait $|r\sqrt{-a'}|$ voisin de 100 et il faudra appliquer la formule (15).

Cas extrêmes.

Si la fréquence est très élevée, le terme en q est négligeable devant le terme en q^2 et l'équation (14) se réduit à :

$$Kq^2 - p^2 = 0.$$

L'équation des télégraphistes peut donc avec les grandes fréquences être réduite à :

$$K\frac{d^2\Phi}{dt^2} - \frac{d^2\Phi}{dx^2} = 0$$

en supprimant le terme en $\frac{d\Phi}{dt}$, c'est l'équation des cordes vibrantes. Il est vrai qu'avec une fréquence hertzienne, l'équation (14) n'est plus valable, et qu'il faut la remplacer par l'équation (15) ; le terme en q est alors remplacé par un terme en $q\sqrt{q}$, il est donc plus grand que si l'on conservait l'équation (14), il n'en reste pas moins négligeable devant un terme en q^2.

Avec les oscillations hertziennes, par conséquent, tout se passe comme si le terme en $\frac{d\Phi}{dt}$ n'existait pas.

C'est ce qui nous permet d'appliquer l'équation des télégraphistes même aux cas où la fréquence devient très grande parce qu'alors les termes par lesquels les équations (14) et (15) diffèrent deviennent l'un et l'autre négligeables.

L'autre cas extrême nous est fourni par les câbles sous-marins. Lord Kelvin en a établi la théorie en négligeant le terme en $\frac{d^2\Phi}{dt^2}$, c'est-à-dire en réduisant l'équation des télégraphistes à celle de la propagation de la chaleur.

Qu'est-ce qui lui en donnait le droit ? Le cable est ici formé : 1° d'une âme métallique ; 2° d'une enveloppe isolante ; 3° d'une enveloppe extérieure conductrice formée par l'armature du fil et maintenue au potentiel zéro parce qu'elle est en communication directe avec l'eau de la mer. C'est un véritable condensateur, et quand le fil prend une charge, l'armature prend une charge égale et de signe contraire. Les courants dans le fil et l'armature sont donc égaux et de signe contraires, et produisent des effets d'induction inverses de sorte que la self-induction est à peu près nulle : le terme en λ disparaît donc dans l'équation des télégraphistes.

Intégration de l'équation.

Nous considérons d'abord une ligne indéfinie, pas de fuite, et pas de force électromotrice, sauf à l'origine ($x = 0$) où règnera une force électromotrice variable $f(t)$.

Nous choisirons les unités de façon que :

$$\gamma = 1, \qquad \rho\gamma = 2, \qquad \gamma\lambda = 1$$

quitte à rétablir plus tard l'homogénéité.

On aura alors, tant pour $x > 0$ que pour $x < 0$;

$$\text{(6)} \qquad \frac{d^2\Phi}{dt^2} + 2\frac{d\Phi}{dt} - \frac{d^2\Phi}{dx^2} = 0, \qquad i = \frac{d\Phi}{dt}, \qquad V = \frac{d\Phi}{dx}.$$

Pour $x = 0$, Φ sera continu, mais les valeurs de $\frac{d\Phi}{dx}$ pour $x = -\varepsilon$ et pour $x = +\varepsilon$ différeront de $f(t)$.

On voit que par symétrie, Φ et i ne changent pas et V se change en $-V$ quand on change x en $-x$. On a donc pour $x = +\varepsilon$, $V = \frac{1}{2}f(t)$ et pour $x = -\varepsilon$, $V = -\frac{1}{2}f(t)$.

Solution isochrone.

Soit d'abord $f(t) = e^{iqt}$, q étant réel ; Φ devra être proportionel à e^{iqt} ; d'où :

$$\Phi = A\, e^{i(qt+px)} + B e^{i(qt-px)},$$

où A et B sont des coefficients constants, et où p est donné par :

$$q^2 - 2iq - p^2 = 0.$$

Nous supposerons que la partie réelle de qp est négative, alors le premier terme de Φ représente une onde marchant vers la droite, c'est-à-dire vers les x positifs et le second terme représente une onde marchant vers la gauche.

Comme l'origine de la perturbation est en $x = 0$, il ne doit y avoir pour $x < 0$ qu'une onde marchant vers la droite et pour $x > 0$ une onde marchant vers la gauche. On aura donc pour $x > 0$:

$$\Phi = A e^{i(qt+px)}$$

et par symétrie pour $x < 0$:

$$\Phi = A e^{i(qt-px)}.$$

Il reste à déterminer A ; on a

$$X = A ip e^{i(qt+px)},$$

ce qui doit se réduire à $\frac{1}{2} e^{iqt}$ pour $x = 0$.

On a donc :

$$A = \frac{1}{2ip}.$$

Solution générale.

Supposons $f(t)$ quelconque ; cette fonction peut se développer par l'intégrale de Fourier sous la forme :

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Theta(q) e^{iqt} dq,$$

avec

$$\Theta(q) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) e^{-iq\tau} d\tau.$$

La fonction $f(t)$ est ainsi décomposée en ses composantes isochrones ; il suffit de considérer séparément chacune de ces composantes, par exemple la composante :

$$\Theta(q) e^{iqt} dq,$$

elle donne pour $x > 0$

$$\Phi = \frac{\Theta(q) dq}{2ip} e^{i(qt+px)}.$$

On aura donc pour la solution générale :

$$\Phi = \int_{-\infty}^{+\infty} \Theta(q) \frac{1}{2ip} e^{i(qt+px)} dq$$

ou en remplaçant $\Theta(q)$ par sa valeur :

$$\Theta = \iint f(\tau) \frac{1}{4 i \pi q} e^{i(qt - q\tau + px)} \, dq \, d\tau$$

ou en renversant l'ordre des intégrations :

$$\Phi = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \, d\tau \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dq}{4 i \pi p} e^{i(qt - q\tau + px)} \right].$$

Ébranlement élémentaire.

Je suppose que $f(t)$ soit nul sauf quand t est compris entre 0 et ε, et cela de telle façon que dans cet intervalle $f(t)$ soit très grand et que :

$$\int_0^{\varepsilon} f(t) \, dt = 1.$$

C'est ce que nous pouvons appeler un ébranlement élémentaire se produisant à l'instant zéro. Notre formule devient alors :

$$\Phi = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dq}{4 i \pi \sqrt{q^2 - 2iq}} e^{i(qt + px)}.$$

C'est cette intégrale représentant l'effet d'un ébranlement élémentaire, qu'il s'agit maintenant d'étudier. La fonction sous le signe $\int$ admet deux points singuliers :

$$q = 0, \qquad q = 2i.$$

Nous voulons que la partie réelle de $\frac{q}{p}$ reste négative, au moins pour q réel ; pour cela nous évitons de franchir la droite qui joint les deux points singuliers et qui jouera le rôle de coupure. Sur la figure A et B représentent les deux points singuliers, AB est la coupure ; nous devons prendre notre intégrale depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$, c'est-à-dire le long du chemin CMD ; le point C est $-\infty$, le point D est $+\infty$; nous allons de C en D en suivant l'axe des quantités réelles ; seulement nous décrivons autour du point A un petit arc de cercle M de façon à éviter le point singulier A et à ne pas franchir la coupure. On peut aussi joindre C à D par deux autres chemins, à savoir les deux demi-circonférences de rayon très grand CND et CPD.

Si q est très grand, on a sensiblement $p = -q$; de sorte que l'exponentielle $e^{i(qt+px)}$ se réduit à : $e^{iq(t-x)}$, d'où cette conséquence ; si $t < x$, cette exponentielle sera sensiblement nulle le long de la demi-circonférence CND ; si $t > x$, elle sera sensiblement nulle le long de la demi-circonférence CPD.

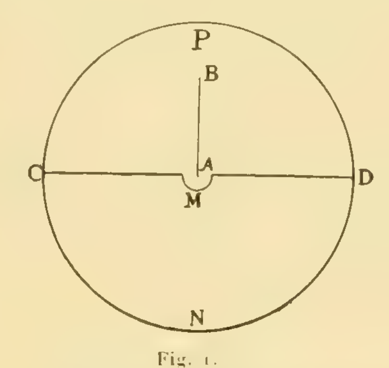


Fig. 1.

Donc si $t < x$, nous pourrons dire (*l'intégrale le long de* CND *étant nulle*) que Φ est égal à l'intégrale prise le long du contour CMDNC, c'est-à-dire à zéro ; puisque nous n'avons aucun point singulier à l'intérieur du contour.

Cela veut dire que Φ est nul en tous les points qui n'auraient pu être atteints par une perturbation partie de l'origine à l'instant de l'ébranlement et marchant avec une vitesse 1, c'est-à-dire avec nos unités, avec la vitesse de la lumière.

Si au contraire $t > x$, nous voyons que (*l'intégrale le long de* CPD *étant nulle*) Φ est égal à l'intégrale prise le long du contour CMDPC, ou ce qui revient au même le long d'un contour quelconque enveloppant les deux points singuliers, par exemple le long d'un cercle de rayon très grand.

Calculons cette intégrale et pour cela posons :

$$(q-i)t + px = \rho\sqrt{x^2-t^2},$$
$$pt + (q-i)x = \mu\sqrt{x^2-t^2},$$

d'où

$$\rho^2 - \mu^2 = p^2 - (q-i)^2 = 1$$

et

$$\frac{dq}{p} = \frac{dp}{q-i} = \frac{d\rho}{\mu},$$

de sorte que notre intégrale devient :

$$\Phi = \int \frac{d\rho}{4i\pi\mu} e^{-t+i\rho\sqrt{x^2-t^2}} = e^{-t}\int \frac{d\rho}{4\pi}\,\frac{e^{i\rho\sqrt{x^2-t^2}}}{\sqrt{1-\rho^2}}.$$

Lorsque q décrit un cercle de rayon très grand, il en est de même de ρ, notre intégrale doit donc être prise le long d'un cercle de rayon très grand, mais comme la fonction sous le signe $\int$ n'a que deux points singuliers $\rho = \pm 1$, il reviendra au même d'intégrer le long d'un contour quelconque enveloppant

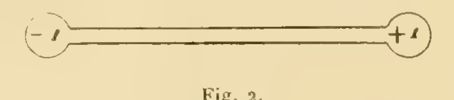


Fig. 2.

ces deux points singuliers ; par exemple, on peut aller de -1 à $+1$ et revenir de $+1$ à -1, en contournant les points singuliers par des cercles infiniment petits comme sur la figure.

Il vient alors :

$$\Phi = e^{-t} \int_{-1}^{1} \frac{d\rho}{2\pi} \frac{e^{i\rho\sqrt{x^2-t^2}}}{\sqrt{1-\rho^2}}.$$

Nous reconnaissons la fonction J_0 ; on a donc :

$$\Phi = \frac{e^{-t}}{2} J_0\left(\sqrt{x^2-t^2}\right),$$

Comme nous supposons que $t > x$, l'argument de J_0 est purement imaginaire, cette fonction est donc positive et croît constamment avec le module de son argument.

Supposons x fini et t très grand, on aura sensiblement :

$$\Phi = \frac{e^{-t}}{2} \frac{e^{\sqrt{t^2-x^2}}}{\sqrt{2\pi}\sqrt[4]{t^2-x^2}}$$

ou avec la même approximation :

$$\Phi = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}\sqrt{t}}.$$

Voilà avec quelle lenteur décroît Φ ; heureusement ce sont ses dérivées qui nous intéressent et elles décroissent plus rapidement.

Si t et x croissaient en même temps et de telle façon que :

$$\lim \frac{t}{x} = \alpha > 1,$$

$\sqrt{t^2-x^2}$ serait sensiblement égal à $x\sqrt{\alpha^2-1}$, d'où :

$$\Phi = \frac{e^{t(-\alpha+\sqrt{\alpha^2-1})}}{2\sqrt{2\pi}\sqrt{t}\sqrt[4]{1\alpha^2-}}.$$

Variations de Φ.

Nous pouvons poser :

$$F(x, t) = 0 \qquad \text{pour } t < x,$$
$$F(x, t) = \frac{e^{-t}}{2} J_0(\sqrt{x^2 - t^2}) \qquad \text{pour } t > x.$$

Qu'arrive-t-il quand on fait varier t, x restant constant ? Si x est assez grand, et t plus grand que x, $\sqrt{t^2 - x^2} = \sqrt{(t-x)(t+x)}$ sera grand et nous pourrons poser :

$$J_0 = \frac{e^{\sqrt{t^2-x^2}}}{\sqrt{2\pi}\sqrt[4]{t^2 - x^2}}.$$

Soit $t^2 - x^2 = u^2$, nous aurons :

$$2\sqrt{2\pi} F = e^{-\sqrt{u^2+x^2}} \frac{e^u}{\sqrt{u}}.$$

Écrivons que $\frac{dF}{du} = 0$, il viendra :

$$1 - \frac{1}{2u} + \frac{u}{\sqrt{u^2 + x^2}} = 0.$$

Posons :

$$u = \frac{2x\xi}{1 - \xi^2}, \qquad \sqrt{u^2 + x^2} = x\frac{1 + \xi^2}{1 - \xi^2},$$

l'équation deviendra :

$$1 - \frac{1 - \xi^2}{4x\xi} - \frac{2\xi}{1 + \xi^2} = 0,$$

d'où :

$$4x = \frac{(1 + \xi)(1 + \xi^2)}{\xi(1 - \xi)}.$$

Quand t varie de x à l'infini, ξ varie de 0 à 1 ; faisons donc varier ξ de 0 à 1 ; la valeur de x qui satisfait à l'équation précédente (*c'est-à-dire pour laquelle $\frac{dF}{du}$ s'annule*) sera positive ; infinie pour $\xi = 0$ elle décroîtra jusqu'à un certain minimum x_0, qui correspondra à la valeur de ξ donnée par l'équation réciproque :

$$\xi^4 - 2\xi^3 - 2\xi^2 - 2\xi + 1 = 0$$

et croît ensuite jusqu'à l'infini qui est atteint pour $\xi = 1$.

Si donc x est $< x_0$, la fonction F n'a ni maximum ni minimum ; si $x > x_0$,

elle a un minimum et un maximum. Les variations de cette fonction sont alors représentées par les figures suivantes :

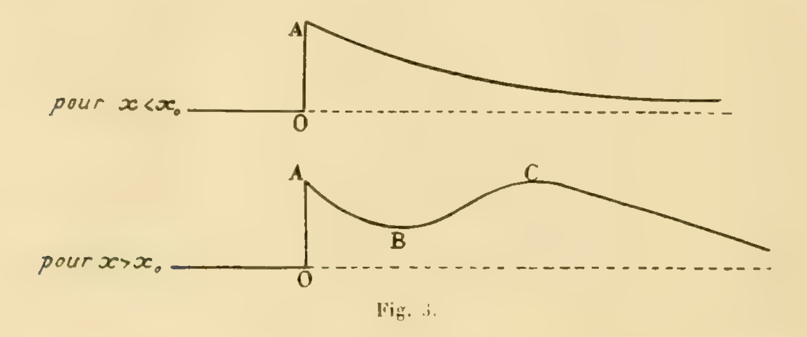


Fig. 3.

Mais la formule précédente n'est valable que pour u suffisamment grand ; lorsque x est très grand, le minimum de F, tel que le donnerait la formule précédente, aurait lieu pour une valeur de u voisine de 2. Dans ces conditions, la formule n'est plus applicable, de sorte qu'on peut se demander si le minimum existe encore. Or il vient :

$$J_0 = 1 + \frac{u^2}{4} + \dots,$$

$$e^{-\sqrt{u^2+x^2}} = e^{-x} e^{-\frac{u^2}{2x}} = e^{-x}\left(1 - \frac{u^2}{2x}\right) + \dots,$$

d'où

$$F = \frac{e^{-x}}{2}\left[1 + u^2\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2x}\right) + \dots\right],$$

ce qui montre que la fonction F est décroissante pour $u = 0$ (*comme sur les deux figures précédentes*) si $x < 2$, mais pour que $x > 2$, elle est croissante. On a donc la figure suivante pour $x > 2$:

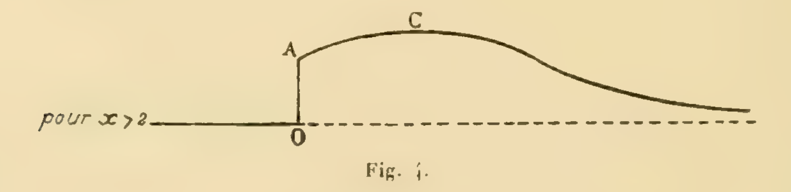


Fig. 4.

Si nous supposons x très grand, nous aurons sensiblement pour le maximum :

$$x = \frac{1}{1 - \xi}, \qquad u = x^2, \qquad t = x^2, \qquad F = \frac{1}{x 2\sqrt{2\pi}},$$

la valeur de F au point A (correspondant à $t = x$, $u = 0$) étant d'ailleurs $\frac{e^{-x}}{2}$.

La valeur de F au point C est donc de l'ordre de $\frac{1}{x}$ et par conséquent beaucoup plus grande que la valeur au point A qui est de l'ordre de e^{-x}. Il en résulte qu'à de très grandes distances, la propagation de l'électricité semble se rapprocher des lois de la propagation de la chaleur; le maximum au lieu d'être brusquement atteint, ne l'est plus que progressivement.

Retour à la solution générale.

Dans le cas général, on a manifestement :

$$\Phi = \int d\tau\, f(\tau)\, F(x, t - \tau).$$

Nous en déduisons :

$$i = \frac{d\Phi}{dt} = \int d\tau\, f \frac{dF}{dt} = -\int d\tau\, f \frac{dF}{d\tau}.$$

Supposons un signal simple de durée ε, de sorte que $f = 0$ sauf quand x est compris entre 0 et ε, et $f = 1$ pour $0 < x < \varepsilon$. Il vient alors :

$$i = -\int_0^{\varepsilon} d\tau \frac{dF}{d\tau} = F(x, t) - F(x, t - \varepsilon).$$

Il est aisé de voir comment varie i :

Pour $t < x$, on a $i = 0$.

Pour $x < t < x + \varepsilon$, on a

$$i = \frac{e^{-t}}{2} J_0(\sqrt{x^2 - t^2}),$$

c'est l'*intensité utile*.

Pour $t > x + \varepsilon$, on a :

$$i = \frac{e^{-t}}{2} J_0\sqrt{x^2 - t^2} - \frac{e^{-t-\varepsilon}}{2} J_0\sqrt{x^2 - (t - \varepsilon)^2},$$

c'est l'*intensité nuisible*; ou sensiblement :

$$i = \varepsilon \frac{dF}{dt}$$

ou pour t grand x fini :

$$i = \frac{-\varepsilon}{4\sqrt{2\pi}} \frac{\mu}{t\sqrt{t}},$$

formule qui montre avec quelle lenteur décroît l'intensité nuisible.

Supposons maintenant x très grand, on aura pour l'intensité utile maximum :

$$i = \frac{e^{-x}}{2}.$$

Soit $u = kx^2$, k étant fini ; on aura sensiblement :

$$\frac{d \log \mathrm{F}}{dt} = \frac{d \log \mathrm{F}}{du} = \frac{1}{2\,k^2 x^2}\left(\frac{1}{k^2} - 1\right)\mathrm{F} = \frac{e^{-\frac{1}{2k^2}}}{2\sqrt{2\pi x}}$$

et pour l'intensité nuisible :

$$\frac{e^{-\frac{1}{2k^2}}}{2\sqrt{2\pi}}\,\frac{\varepsilon}{x^3}.$$

Le rapport de l'intensité nuisible à l'intensité utile est donc proportionnel à $\frac{\varepsilon e^{x}}{x^3}$.

Nous voyons que $\frac{e^x}{x^3}$ croît avec x, c'est-à-dire avec la distance ; en revanche notre rapport est proportionnel à ε, *d'où l'avantage des signaux courts.*

Nous pouvons supposer un signal double, c'est-à-dire :

$$\begin{array}{ll} f = 0 & \text{de } -\infty \text{ à } 0, \\ f = 1 & \text{de } 0 \text{ à } \varepsilon, \\ f = -1 & \text{de } \varepsilon \text{ à } 2\varepsilon, \\ f = 0 & \text{de } 2\varepsilon \text{ à } +\infty. \end{array}$$

On en déduit :

$$i = \int_0^{\varepsilon} d\tau \frac{d\mathrm{F}}{dt} + \int_{\varepsilon}^{2\varepsilon} d\tau \frac{d\mathrm{F}}{d\tau} = \mathrm{F}(x, t) - 2\mathrm{F}(x, t - \varepsilon) + \mathrm{F}(x, t - 2\varepsilon).$$

De $t = x$ à $t = x + \varepsilon$, on a :

$$i = \mathrm{F}(x, t) \quad (\text{intensité utile}).$$

De $t = x + 2\varepsilon$ à $t = \infty$, on a :

$$i = 2\varepsilon^2 \frac{d^2\mathrm{F}}{dt^2} \quad (\text{intensité nuisible}).$$

On voit que pour t très grand, x fini, l'intensité nuisible décroît non plus comme $t^{-\frac{3}{2}}$ mais comme $t^{-\frac{5}{2}}$.

Pour x très grand, $\frac{u}{x^2}$ fini, l'intensité utile est proportionnelle à e^{-x}, l'intensité nuisible à $\frac{\varepsilon^2}{x^5}$, ce qui montre que le rapport est plus favorable que dans le cas précédent, surtout pour des signaux très courts.

Effet des réflexions.

Supposons maintenant que la ligne toujours indéfinie dans un sens, soit limitée dans l'autre sens. Nous pouvons supposer soit que l'extrémité est isolée, soit qu'elle est à la terre.

Dans le premier cas, on devra avoir à l'extrémité une intensité nulle, c'est-à-dire :

$$\frac{d\Phi}{dt} = 0$$

ou puisque nous partons du repos :

$$\Phi = 0.$$

Dans le deuxième cas, on devra avoir à l'extrémité un potentiel nul, c'est-à-dire :

$$\frac{d\Phi}{dx} = 0.$$

Supposons que dans le cas de la ligne indéfinie, on ait $\Phi = f(x)$ pour $x > 0$ et $\Phi = f(-x)$ pour $x < 0$. Soit maintenant l la longueur de la ligne depuis la pile jusqu'à l'extrémité. Si cette extrémité est isolée, on devra avoir $\Phi = 0$ pour $x = l$. Nous satisferons à cette condition, en prenant :

$$\Phi = f(x) - f(2l - x).$$

Si l'extrémité est à la terre, on doit avoir $\frac{d\Phi}{dx} = 0$ pour $x = l$. Nous satisferons à cette condition en prenant :

$$\Phi = f(x) + f(2l - x).$$

Dans chacune de ces deux formules, le premier terme $f(x)$ représente l'onde directe, et le second terme l'onde réfléchie. Mais on voit que les conditions sont très différentes dans les deux cas.

Tout se passe comme si la ligne était indéfinie, mais pourvue de deux piles, l'une placée en $x = 0$, l'autres en $x = 2l$. Seulement dans le premier cas, les forces électromotrices des deux piles sont égales et de signe contraire ; dans le deuxième cas, elles sont égales et de même signe.

Lignes fermées.

Supposons maintenant une ligne fermée sur elle-même de longueur $2l$; elle se comportera évidemment comme une ligne indéfinie sur laquelle seraient

placées des piles de même force électromotrice, aux points :

$$x = 0, \quad x = 2l, \quad x = 4l, \quad \ldots$$
$$x = -2l, \quad x = -4l, \quad \ldots$$

Si donc on a trouvé pour une ligne indéfinie

$$\Phi = f(x),$$

on aura pour une ligne fermee :

$$\Phi = \Sigma f(|x - 2nl|), \quad n = -\infty, \quad \ldots \quad -1, \quad 0, \quad 1, \quad 2, \quad \ldots \quad +\infty.$$

Remarquons que dans la série du deuxième membre, il n'y a jamais à envisager qu'un nombre fini de termes puisque ceux pour lesquels

$$|x - 2nl| > t$$

sont tous nuls. Ces termes décroissent d'ailleurs très rapidement.

Réflexions multiples.

Supposons maintenant une ligne limitée dans les deux sens; supposons par exemple qu'en $x = a$ et en $x = b$, elle soit mise à la terre.

Alors tout se passera comme si nous avions une série de piles, qui auraient à chaque instant même force électromotrice et qui seraient placées aux points :

$$x = 0, \quad x = 2a, \quad x = -2b, \quad x = 2n(a + b), \quad x = 2(n + 1)a + 2nb,$$

n étant un entier quelconque positif ou négatif. On aura donc :

$$\Phi = \Sigma f(|x - 2n(a + b|) + \Sigma f(|x - 2(n + 1)a + 2nb|).$$

On vérifie en effet que l'on a $\frac{d\Phi}{dx} = 0$ pour $x = a$ et pour $x = b$.

Il est aisé de voir comment on devrait modifier la formule, si l'une des extrémités, ou toutes deux étaient isolées au lieu d'être à la tere.

Cas du récepteur.

Supposons maintenant une ligne indéfinie dans les deux sens, mais imaginons qu'on ait placé en $x = a$ un récepteur. Nous nous bornerons d'abord à assimiler

ce récepteur à une self-induction accompagnée d'une résistance et d'une capacité.

Mais au sujet de cette capacité on doit distinguer deux cas :

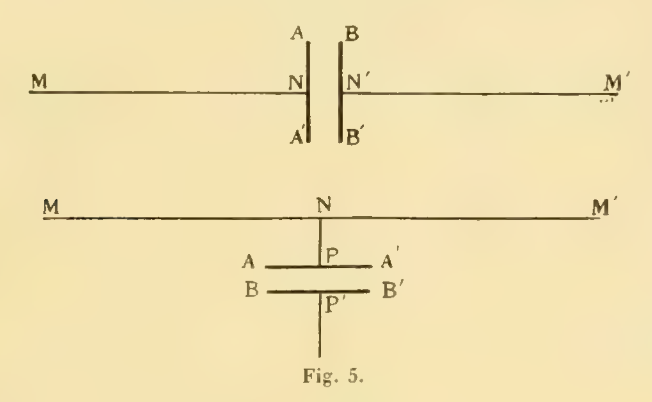


Fig. 5.

Ou bien tout se passe comme si la ligne MM′ était interrompue en NN′ par un condensateur dont les deux armatures seraient AA′ et BB′. Ce sont *les capacités de la première sorte*, comme sur la première des figures ci-dessus;

Ou bien tout se passe comme si la ligne portait en N une dérivation allant au plateau AA′ d'un condensateur dont l'autre armature BB′ est à la terre. Ce sont les *capacité de la seconde sorte*.

Dans tous les cas le récepteur introduit une discontinuité; mais si la capacité est de la première sorte, l'intensité du courant $\frac{d\Phi}{dt}$ et par conséquent Φ reste une fonction continue de x pour $x = a$; car la quantité d'électricité positive amenée au plateau AA′ par le fil MN, est égale à la quantité d'électricité *négative* amenée au plateau BB′ par le fil M′N′, puisque les charges des deux plateaux doivent rester égales et de signe contraire. En revanche il y a en a une force électromotrice de sorte que $\frac{d\Phi}{dx}$ n'est pas continue.

Si au contraire on a des capacités de la seconde sorte, la fonction Φ est également discontinue.

Bornons-nous d'abord au cas où il n'y a que des capacités de la première sorte. Soit L la self-induction du récepteur, R sa résistance, $\frac{1}{A}$ sa capacité. Les forces électromotrices dues à la self-induction et à la résistance seront :

$$-L\frac{di}{dt} = -L\frac{d^2\Phi}{dt^2}, \qquad -Ri = -R\frac{d\Phi}{dt}.$$

L'intensité $\frac{d\Phi}{dt}$ étant la dérivée de la charge du condensateur AA'BB', cette charge sera Φ et la force électromotrice correspondante sera $-A\Phi$; de sorte que la force totale sera

$$-L\frac{d^2\Phi}{dt^2}-R\frac{d\Phi}{dt}-A\Phi.$$

Donc pour $x=a$, la dérivée $\frac{d\Phi}{dx}$ sera discontinue de telle façon que si l'on pose

$$S=\frac{d\Phi}{dx}(x=a+\varepsilon)-\frac{d\Phi}{dx}(x=a-\varepsilon),$$

on ait

$$S=-L\frac{d^2\Phi}{dt^2}-R\frac{d\Phi}{dt}-A\Phi.$$

On a d'ailleurs pour $x=0$

$$\frac{d\Phi}{dx}(x=\varepsilon)-\frac{d\Phi}{dx}(x=-\varepsilon)=E=f(t).$$

Partout ailleurs $\frac{d\Phi}{dx}$ est continue.

Solution isochrone.

Suivant la même marche que plus haut, faisons d'abord $f(t)=e^{iqt}$. Soit encore

$$p^2=q^2-2iq.$$

On aura :

pour $x<0$,

$$\Phi=A\,e^{i(qt-px)};$$

pour $0<x<a$,

$$\Phi=B\,e^{i(qt+px)}+C\,e^{i(qt-px)};$$

pour $x>a$,

$$\Phi=D\,e^{i(qt+px)}.$$

Pour $x=0$, Φ est continu, ce qui donne

$$A=B+C, \tag{1}$$

$\frac{d\Phi}{dx}$ subit un saut brusque égal à e^{iqt}, ce qui donne

$$Bip-Cip=-Aip+1. \tag{2}$$

De ces deux équations on tire $B=\frac{1}{2ip}$.

Pour $x = a$, Φ est continu, ce qui donne

(3) $$B e^{ipa} + C e^{-ipa} = D e^{ipa}.$$

Pour $x = a$, $\dfrac{d\Phi}{dx}$ subit un saut brusque égal à $\delta = +Q\Phi$, où

$$Q = Lq^2 - Riq - A.$$

On a donc

(4) $$Bip\, e^{ipa} - Cip\, e^{-ipa} = Dip\, e^{ipa} - QDp\, e^{ipa}.$$

De (3) et (4) on tire

$$2Bip = D(2ip - Q),$$

d'où

$$D = \frac{1}{2ip - Q},$$

de sorte que l'on a pour $x = a$, c'est-à-dire au récepteur

$$\Phi = \frac{e^{i(qt+pa)}}{2ip - Q}.$$

Solution générale.

Soit comme plus haut

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Theta(q)\, e^{iqt}\, dq, \qquad \Theta(q) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\, e^{-iq\tau}\, dt.$$

On trouvera toujours par le même calcul

$$\Phi = \int_{-\infty}^{+\infty} \Theta(q)\, \frac{e^{i(qt-q\tau+pa)}}{2ip - Q}\, dq = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\, d\tau \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dq}{2\pi}\, \frac{e^{i(qt+q\tau+pa)}}{2ip - Q}\right].$$

Ébranlement élémentaire.

Ce que nous avons appelé l'ébranlement élémentaire est alors représenté par l'intégrale

$$\Phi = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dq}{d\pi}\, \frac{e^{i(qt+pa)}}{2ip - Q}.$$

On raisonnera sur cette intégrale tout à fait comme plus haut; si $t < a$, au lieu d'intégrer le long de la droite CMD (voir *fig.* 1) on pourra intégrer le long

du contour fermé CMDN; on vérifierait qu'il n'y a pas de point singulier à l'intérieur du contour; cette vérification est inutile, nous sommes certains qu'elle est nulle, parce que rien ne saurait se passer dans le récepteur avant que la perturbation l'ait atteinte.

Si $t > a$, on pourra intégrer le long du contour CMDP ou le long du cercle CNDP.

Pour transformer cette intégrale, posons

$$u^2 = a^2 - t^2,$$
$$(q-i)t + pa = \rho u.$$
$$pt + (q-i)a = \mu u,$$

d'où

$$\rho^2 - \mu^2 = p^2 - (q-i)^2 = +1; \qquad \frac{dp}{q-i} = \frac{dq}{p} = \frac{d\rho}{\mu} = \frac{d\mu}{\rho}.$$

Soit

$$\rho + \mu = \xi, \qquad \rho - \mu = \frac{1}{\xi}, \qquad 2\rho = \xi + \frac{1}{\xi}, \qquad \frac{dq}{p} = \frac{d\xi}{\xi},$$

d'où notre intégrale

$$\Phi = e^{-t} \int \frac{e^{i\frac{u}{2}\left(\xi + \frac{1}{\xi}\right)} p\, d\xi}{\xi(2ip - Q)}.$$

Il est clair que

$$R = \frac{p}{\xi(2ip - Q)}$$

est une fonction rationnelle de ξ, puisque p et q sont des fonctions rationnelles de ξ et que Q est un polynome entier en q.

Pour $\xi = \infty$, on a $\rho = \mu$, c'est-à-dire $q - i = p$; c'est-à-dire que p et q sont très grands et sensiblement égaux, et comme Q est du second degré en q on aura $R = 0$, ce qui veut dire que R est décomposable en éléments simples sous la forme

$$R = \sum \frac{A}{\xi - \alpha},$$

d'où

$$\Phi = e^{-t} \sum A \int \frac{e^{i\frac{u}{2}\left(\xi + \frac{1}{\xi}\right)} d\xi}{\xi - \alpha}.$$

Quel est le contour d'intégration? Quand q décrit le cercle CNDP, le point ξ décrit un cercle très petit autour de la valeur de ξ qui correspond à $p = -q = \infty$, c'est-à-dire autour de l'origine.

Or si nous envisageons l'intégrale

$$\int \frac{e^{i\frac{u}{2}\left(\xi-\frac{1}{\xi}\right)}\,d\xi}{\xi^{n}}$$

prise le long du même contour, nous reconnaissons une des fonctions de Bessel. C'est à un facteur constant près la fonction $J_{n-1}(u)$; ce facteur constant est d'ailleurs $2\pi i^{n-1}$, or

$$\int \frac{e^{i\frac{u}{2}\left(\xi-\frac{1}{\xi}\right)}\,d\xi}{\xi-\alpha} = \sum \frac{1}{\alpha^{n+1}} \int \xi^{n}\, e^{i\frac{u}{2}\left(\xi-\frac{1}{\xi}\right)}\,d\xi,$$

d'où (en se rappelant que $J_{-n} = \pm J_n$),

$$\int \frac{e^{i\frac{u}{2}\left(\xi-\frac{1}{\xi}\right)}\,d\xi}{\xi-\alpha} = \sum \frac{\pm 2\pi}{\alpha^{n+1}}\, i^{(-n-1)}\, J_{n+1}(u).$$

Cette série est convergente pour toutes les valeurs de u et de α.

Pour les propriétés des fonctions de Bessel, on pourra se reporter en particulier au chapitre XII du tome I de la *Mécanique céleste de Tisserand*.

Mais ce dont nous avons besoin, c'est de voir ce que deviennent ces intégrales quand t et a sont très grands, et d'en déduire une expression asymptotique qu'on puisse utiliser dans la discussion de la même façon que l'expression analogue des fonctions de Bessel.

Et d'abord, vers quelle limite tend α quand t et a croissent indéfiniment.

Les point singuliers de notre intégrale sont donnés par les deux équations du second degré

(A) $$q^2 - 2ip = p^2, \qquad 2ip = Q.$$

Les valeurs corrrespondantes de α seront donc données par

$$u\alpha = (q - i + p)(t + a),$$

où q et p sont définis par les deux équations précédentes (A) et sont par conséquent des constantes numériques.

Comme $u = \sqrt{a^2 - t^2}$, on voit que α dépend seulement du rapport $\frac{t}{a}$. Quand t et a tendent vers l'infini de façon que leur rapport soit constant, α demeurera donc constant. Quand on suppose que le rapport $\frac{t}{a}$ est très grand, il vient

$$i\alpha = q - i + p, \quad [\text{on trouve } \alpha = \infty \text{ si ce rapport est égal à } 1].$$

Prenons donc l'intégrale

$$\int \frac{e^{\frac{iu}{2}\left(\xi+\frac{1}{\xi}\right)}\,d\xi}{\xi-\alpha},$$

où α est constant et cherchons sa valeur pour u très grand.

Pour cela contruisons dans le plan des ξ les courbes

$$\text{partie réelle de } \xi + \frac{1}{\xi} = \text{const.}$$

Si nous appelons ρ le module et ω l'argument de ξ, ces courbes en coordonnées polaires auront pour équation

$$\left(\rho + \frac{1}{\rho}\right)\cos\omega = \text{const.}$$

Ce dont nous avons besoin, c'est de la courbe

$$\left(\rho + \frac{1}{\rho}\right)\cos\omega = 2, \qquad \text{d'où} \qquad \rho = \frac{1 \pm \sin\omega}{\cos\omega}.$$

C'est l'équation d'une strophoïde.

Deux cas sont à distinguer suivant que le point α est intérieur ou extérieur à la boucle de la strophoïde. Dans le second cas, on pourra remplacer le contour d'intégration qui est un petit cercle autour de o par le contour en traits pointillés (. . .), laissant en dehors le point α.

Le long du contour en trait pointillé la partie réelle de $\xi + \frac{1}{\xi}$ est toujours plus petite que 2, sauf au point A où elle est égale à 2.

Nous savons que $u = \pm\sqrt{a^2 - t^2}$ est purement imaginaire et très grand; si donc nous prenons devant le radical le signe convenable (ce que je suppose une fois pour toutes) iu sera réel positif et très grand. Dans ces conditions on a

$$\left| e^{\frac{iu}{2}\left(\xi+\frac{1}{\xi}\right)} \right| = e^{\frac{iu}{2}R},$$

R étant la partie réelle de $\xi + \frac{1}{\xi}$; si donc R a en deux points les valeurs R′ et R″ et que R′ > R″, la valeur de l'exponentielle :

$$e^{\frac{iu}{2}\left(\xi+\frac{1}{\xi}\right)}$$

sera beaucoup plus petite au second de ces points qu'au premier.

Donc si t et a sont très grands, il suffira de considérer, dans le contour en trait pointillé, les parties très voisines du point A.

Or dans ce cas, on a sensiblement

$$\xi - \alpha = 1 - \alpha$$

et

$$\xi + \frac{1}{\xi} = 2 + (\xi - 1)^2.$$

L'intégrale peut donc être remplacée par

$$\int \frac{e^{i\frac{u}{2}[2+(\xi-1)^2]}\,d\xi}{1-\alpha}$$

prise le long d'un petit arc passant en A, par exemple le long d'un petit segment de droite parallèle à l'axe des parties imaginaires. Prolongeons cette droite

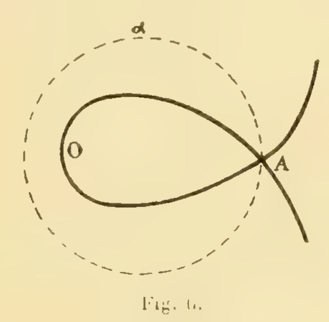


Fig. 6.

indéfiniment dans les deux sens. En tous les points de cette droite, sauf au point A, la partie réelle de $\xi + \frac{1}{\xi}$ est plus petite que 2; et par conséquent la fonction sous le signe $\int$ est négligeable devant ce qu'elle est en A; on peut donc faire l'intégration le long de cette droite tout entière, les parties ainsi ajoutées sont négligeables.

Soit

$$\xi = 1 + i\eta, \qquad d\xi = i\,d\eta,$$

il faudra faire varier η depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$ et l'intégrale devient

$$\frac{1}{1-\alpha}\, i e^{iu} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u\eta^2}{2}}\, d\eta = \frac{i e^{iu}}{\sqrt{iu}}\,\frac{\sqrt{\pi}}{1-\alpha} = \frac{i e^{\sqrt{t^2-a^2}}}{\sqrt[4]{t^2-a^2}}\,\frac{\sqrt{\pi}}{1-\alpha}.$$

Supposons maintenant que α soit à l'intérieur de la boucle de la strophoïde. En vertu du théorème de Cauchy, l'intégrale prise le long du petit cercle qui entoure O n'est plus égale à l'intégrale prise le long du contour en trait pointillé,

mais à cette seconde intégrale plus $2i\pi$ multiplié par le résidu correspondant au pôle α, c'est-à-dire à cette seconde intégrale plus

$$(B) \qquad 2i\pi e^{i\frac{u}{2}\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)}$$

et comme cette seconde intégrale dont nous venons de trouver la valeur asymptotique est très petite par rapport à cette expression (B), ce sera cette expression (B) qui sera la valeur asymptotique cherchée de la première intégrale.

Revenons à l'expression

$$\Phi = e^{-t}\int \frac{e^{i\frac{u}{2}\left(\xi+\frac{1}{\xi}\right)} p\, d\xi}{\xi(2ip-Q)}.$$

Si aucun des α n'est à l'intérieur de la boucle de strophoïde, la valeur asymptotique de Φ sera

$$i\sqrt{\pi}\frac{e^{-t+\sqrt{t^2-a^2}}}{\sqrt{t^2-a^2}} D_1$$

en désignant par D_1 la valeur de $\dfrac{P}{2ip-Q}$ pour $\xi = 1$.

Plus haut nous avons distingué deux cas, selon que l'un des pôles de R était intérieur à une boucle de strophoïde ou non. Cette strophoïde que j'appelle S a pour sommet $\xi = 0$ et pour point double $\xi = 1$.

Je dis que le premier cas ne se présentera pas pratiquement.

Qu'arrive-t-il quand q est réel : on trouve

$$(q-i+p)(t+a) = \xi u.$$

$$(q-i-p)(t-a) = \frac{1}{\xi} u.$$

Nous savons que $t > a$; par conséquent iu est réel, et dans ce qui précède nous avons supposé

$$iu = +\sqrt{t^2-a^2} > 0.$$

Si donc nous posons

$$k = \frac{iu}{t+a} = \frac{t-a}{iu},$$

on aura

$$0 < k < 1,$$

et

$$q-i+p = -ik\xi,$$

$$q-i-p = \frac{-i}{k\xi},$$

d'où

$$2q = i\left(2 - k\xi - \frac{1}{k\xi}\right)$$

pour que q soit réel, il faut donc que

$$\text{partie réelle}\left(k\xi + \frac{1}{k\xi}\right) = 2.$$

Cette équation représente une strophoïde qui a pour sommet $\xi = 0$, et pour point double $\xi = \frac{1}{k}$. Cette strophoïde je l'appelle S'.

Ainsi quand q est réel, ξ décrit la strophoïde S'; à savoir la boucle de S' quand la partie réelle de $\frac{p}{q}$ est négative, et le reste de S' quand cette partie réelle est positive. Reportons-nous à la figure où sont représentés les contours d'intégration dans *le plan des q*. Le chemin DNC par un demi-cercle de rayon très petit contournant l'origine; l'aire limitée par le contour fermé CMBNC est représentée par l'aire limitée par la boucle de S'. Or nous avons vu que dans cette aire CMDNC, il ne peut y avoir de point singulier sans quoi la perturbation atteindrait le récepteur pour $t < a$, ce qui est physiquement absurde. Donc il n'y en a pas à l'intérieur de la boucle de S'; et comme la boucle de S est tout entière à l'intérieur de S', il n'y en a pas non plus à l'intérieur de la boucle de S.

Ainsi le premier cas ne peut jamais se présenter; nous sommes donc toujours dans le deuxième cas de sorte que la formule asymptotique qui donne la valeur approchée de Φ est

$$\Phi = K\frac{e^{-t\sqrt{in}}}{\sqrt{in}}D_1.$$

où K est un facteur numérique et D_1 la valeur de R pour $\xi = 1$; D_1 dépend alors du rapport $\frac{t}{a}$; si nous supposons $\frac{t}{a}$ très grand, D_1 s'annule et la formule devient illusoire.

Que convient-il de faire quand R s'annule pour $\xi = 1$? Nous posons $\xi = 1 + i\eta$ et nous développons R suivant les puissances croissantes de η; et comme les seules parties du contour qu'il convient de conserver sont celles qui correspondent aux petites valeurs de η, nous ne conserverons que les premiers termes du développement. Nous pourrons d'ailleurs remplacer $\xi + \frac{1}{\xi}$ par sa valeur approchée $2 - \eta^2$ et comme plus haut, remplacer le contour d'intégration par

une droite indéfinie, nous aurons ainsi

$$\Phi = \frac{1}{i} e^{\,} \int_{-\infty}^{+\infty} R\, e^{-\frac{iu\eta^2}{2}}\, d\eta.$$

Il est clair que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \eta^{K} e^{-\frac{iu\eta^2}{2}}\, d\eta$$

est nulle si K est impair, et que si K est pair, cette intégrale s'obtient aisément en partant du cas de $K = 0$, et en différentiant $\frac{K}{2}$ fois sous le signe $\int$ par rapport à u.

Nous développerons donc R suivant la puissance de η et nous arrêterons notre développement au premier terme qui ne donne pas une intégrale nulle, c'est-à-dire au premier terme de degré pair.

En opérant de la sorte, on voit que les transmissions sont d'autant meilleures que le coefficient A qui figure dans Q est plus grand, c'est-à-dire que la capacité du récepteur est plus petite, puisque A représente l'inverse de cette capacité.

Remarquons que s'il n'y avait pas de récepteur, tout se passerait comme si les deux plateaux du condensateur fictif qui représente cette capacité de la première sorte étaient amenés au contact l'un de l'autre, c'est-à-dire comme si cette capacité était devenue infinie.

Je ne pousserai pas jusqu'au bout cette discussion dont on a maintenant tous les éléments; on opérerait avec les valeurs asymptotiques ainsi trouvées comme on a fait dans le cas d'une ligne indéfinie.

Cas où le récepteur est à la terre.

Ordinairement la ligne ne se poursuit pas indéfiniment au delà du récepteur, mais elle est mise à la terre; je supposerai le fil de terre très court, de sorte que le potentiel pour $x = a + \varepsilon$ doit être nul. On a pour $x = a - \varepsilon$ et pour $x = a + \varepsilon$

$$B = \frac{1}{2ip}, \qquad B e^{ipa} + C e^{-ipa} = \Phi e^{-iqt}.$$

Le potentiel pour $x = a + \varepsilon$ étant nul, le potentiel pour $x = a - \varepsilon$ sera $-Q\Phi$, ce qui donne :

$$B ip\, e^{ipa} - C ip\, e^{-ipa} = -Q\Phi^{-iqt}.$$

d'où :

$$\Phi = \frac{e^{iqt+ipa}}{ip - Q}.$$

La discussion est toute pareille à celle qui précède.

Cas où il y a des capacités de la seconde sorte.

Supposons une capacité de la seconde sorte placée en un point de la ligne sans que l'on ait en ce point de self-induction, de résistance ni de capacité de la première sorte. Alors Φ ne sera plus continu, mais $\frac{d\Phi}{dx}$ sera continu, car nous n'avons pas en ce point de force électromotrice.

Soient alors Φ et $\Phi + \delta\Phi$ les valeurs de la fonction Φ en amont et en aval de notre capacité de la seconde sorte ; la charge de cette capacité sera $\delta\Phi$, de sorte que l'on aura :

$$\delta\Phi = C\frac{d\Phi}{dx}$$

si C est la valeur de cette capacite.

Nous pouvons imaginer maintenant des récepteurs formés de combinaisons quelconques de self-inductions, de résistances et de capacites des deux sortes.

Imaginons, par exemple, que nous rencontrions d'abord un récepteur formé de trois sections successives en série ; la première section ayant une self L, une résistance R, une capacité de première sorte A, la seconde ayant seulement une capacité de deuxième sorte C, la troisième semblable à la première mais avec les constantes L_1, R_1, A_1.

En amont de la première, la fonction Φ aura la valeur Φ et le potentiel $\frac{d\Phi}{dx}$; en aval, la fonction Φ sera encore égale à Φ et le potentiel à

$$V' = \frac{d\Phi}{dx} - L\frac{d^2\Phi}{dt^2} - R\frac{d\Phi}{dt} - A\Phi.$$

En aval de la seconde, le potentiel aura la même valeur, mais la fonction Φ sera devenue :

$$\Phi' = \Phi - CV' = \Phi - C\frac{d\Phi}{dt} - LC\frac{d^2\Phi}{dt^2} - LR\frac{d\Phi}{dt} - LA\Phi.$$

En aval de la troisième, la fonction Φ sera continue, et restera égale à Φ'.

mais le potentiel deviendra :

$$V'' = V - L_1 \frac{d^2\Phi'}{dt^2} - R_1 \frac{d\Phi'}{dt} - A_1 \Phi'$$

qui est une fonction linéaire de Φ, de $\frac{d\Phi}{dx}$ et de leurs dérivées par rapport au temps.

Plus généralement, quelle que soit la complication d'un récepteur, qu'il soit formé d'un réseau plus ou moins complexe, de selfs, de résistances, de capacités des deux sortes placées en dérivation ou en série, il sera toujours caractérisé par ce fait qu'il y aura deux relations linéaires entre les valeurs de Φ et du potentiel en amont et en aval du récepteur et quelques-unes de leurs dérivées par rapport au temps. Il en serait encore de même si l'on tenait compte de l'induction mutuelle des diverses parties du récepteur.

Méthode générale.

Que devons-nous faire alors ? On opérera toujours de la même manière ; on cherchera d'abord la solution isochrone. Pour cela on considérera la ligne comme divisée en plusieurs sections, les points de division étant la pile, le récepteur, les extrémités de lignes isolées ou mises à la terre, etc.

Dans chacune de ces sections on aura :

$$\Phi = A e^{i(qt-px)} + B e^{i(qt-px)},$$

A et B étant des coefficients constants, et p étant lié à q par la relation

$$q^2 - 2iq = p^2$$

ou plus généralement :

$$\gamma\lambda q^2 - i\rho\gamma q = p^2.$$

les constantes γ, λ, ρ pouvant ne pas être les mêmes dans les différentes sections.

Si la section est indéfinie dans un sens, l'un des deux termes de Φ devra disparaître.

Si une section se termine par une extrémité isolée, ou une mise à la terre, on aura en ce point

$$\Phi = 0, \qquad \text{ou} \qquad \frac{d\Phi}{dx} = 0,$$

ce qui donne une relation entre les coefficients A et B.

Maintenant si nous comparons deux sections consécutives, nous aurons comme nous venons de le voir deux relations linéaires entre les valeurs de Φ et de $\frac{d\Phi}{dx}$ de part et d'autre du point de division et entre leurs dérivées successives par rapport au temps. Si nous observons que pour une solution isochrone, la dérivée d'une de ces fonctions par rapport au temps est égale à cette fonction elle-même multipliée par iq, nous voyons que nous aurons deux relations linéaires entre les valeurs de Φ et $\frac{d\Phi}{dx}$ de part et d'autre du point de division mais que les coefficients de ces relations dépendent de q. Ces relations nous fournissent alors deux équations linéaires entre les coefficients A et B des deux sections consécutives.

On peut déterminer ces coefficients A et B à l'aide de ces diverses relations, et ces coefficients seront des fonctions de q, puisque nos équations linéaires dépendent de q. On aura ainsi :

$$\Phi = \Omega(q)e^{iqt}.$$

Appelons $f(t)$ la force électromotrice de la pile et posons :

$$f(t) = \int \Theta(q)e^{iqt}\,dq, \qquad \Theta(q) = \frac{1}{2\pi}\int f(\tau)e^{-iq\tau}\,d\tau,$$

nous aurons pour la solution générale :

$$\Phi = \iint \frac{f(\tau)}{2\pi}e^{iq(t-\tau)}\,\Omega(q)\,dq\,d\tau$$

et pour « l'ébranlement élémentaire »

$$\Phi = \int \frac{e^{iqt}}{2\pi}\,\Omega(q)\,dq.$$

Nous pourrons ainsi dans tous les cas mettre la fonction cherchée sous la forme d'une intégrale définie.

Premier cas.

Le premier cas est celui où il n'y a qu'un récepteur, qui peut être d'ailleurs aussi compliqué que l'on veut, mais qui est immédiatement réuni à la terre, ou bien suivi d'une ligne indéfinie; la ligne de l'autre côté de la pile est indéfinie, ou bien le second pôle de la pile est mis immédiatement à la terre. Il n'y a

donc qu'une section de *longueur finie*, c'est celle qui s'étend de la pile au recepteur. Soit a sa longueur.

Nous cherchons la valeur Φ au recepteur, c'est-à-dire pour $x = a$. Dans ce cas $\Omega(q)$ est egal à e^{ipa} multipliée par une fonction rationnelle de p et de q. Notre integrale peut alors être décomposée comme plus haut en éléments simples de la forme

$$\int \frac{e^{\frac{m}{2}\left(\xi + \frac{1}{\xi}\right)} d\xi}{\xi - \alpha}.$$

Si nous voulions la fonction Φ en un point quelconque de la section comprise entre la pile et le récepteur, nous verrions que $\Omega(q)$ est une somme de deux termes l'un contenant l'exponentielle e^{ipx}, l'autre l'exponentielle $e^{ip(2a-x)}$ l'une et l'autre multipliée par une fonction rationnelle de q et de p.

Deuxième cas.

Le deuxième cas est plus compliqué, c'est celui où il y a plusieurs sections de longueur finie. C'est ce qui arriverait par exemple :

1° Si le récepteur était relié à la terre, non pas immédiatement, mais par un fil de longueur finie ;

2° Si le second pôle de la pile était à la terre par un fil de longueur finie ;

3° Si la ligne était fermée sur elle-même de façon à équivaloir à une série indéfinie de piles et de récepteurs équidistants (*voir* plus haut le cas d'une ligne fermée) ;

4° Si la ligne était formée de plusieurs fils de section différente raccordés ensemble.

S'il en est ainsi, $\Omega(q)$ n'est plus une exponentielle multipliée par une fonction rationnelle de p et de q. Mais $\Omega(q)$ dépend rationnellement de p, de q et de *plusieurs* exponentielles. Nous avons même des combinaisons d'exponentielles au dénominateur.

Interprétation physique du deuxième cas.

On peut se représenter comme il suit la façon dont les choses se passent, l'onde émanée de la pile se propage dans les deux sens ; quand elle rencontre

un point de division entre deux sections, une partie de la perturbation est transmise à la section suivante, une partie est réfléchie et revient en arrière.

C'est de la superposition de toutes ces ondes ayant subi des réflexions multiples que provient la fonction Φ. Il y a là quelque chose de tout à fait analogue au phénomène des anneaux colorés.

Lorsqu'on n'a qu'une section de longueur finie, comprise entre la pile et le récepteur, il y a réflexion au récepteur, mais il n'y a pas de réflexion à la pile; nous avons alors au plus une onde directe et une onde réfléchie, ce qui donne en tout pour $\Omega(q)$ deux termes, chacun d'eux contenant en facteur une exponentielle.

Si au contraire, il y a plusieurs sections de longueur finie; il y a plusieurs points où se produisent des réflexions, de sorte qu'une onde, renvoyée de l'un à l'autre peut subir une infinité de réflexions successives.

Nous aurons donc à considérer une infinité d'ondes distinctes. A chacune d'elles correspondra dans $\Omega(q)$ un terme formé d'une exponentielle, multipliée par une fonction rationnelle de p et de q. C'est la somme de tous ces termes qui est alors égale à une fonction rationnelle d'un certain nombre d'exponentielles, ainsi que de p et de q. Mais nous devons observer qu'à chaque réflexion, la perturbation est considérablement affaiblie, de sorte que ces termes décroissent rapidement et qu'il n'est nécessaire d'en considérer qu'un très petit nombre.

Nous avons donc deux manières d'écrire $\Omega(q)$; nous pouvons l'écrire en bloc, sous forme finie; elle est alors rationnelle non seulement par rapport à p et à q, mais encore par rapport à un certain nombre d'exponentielles. La solution du problème (pour un ébranlement élémentaire) se présente alors sous la forme d'une intégrale définie simple

$$\Phi = \int \Omega(q)\, e^{iqt}\, dq$$

mais qui se prête mal à la discussion. Nous pouvons aussi la développer en série, procédant suivant les puissances des exponentielles. (Il faut naturellement développer suivant les puissances croissantes de celles de ces exponentielles dont la valeur absolue est plus petite que 1.) On sépare ainsi les différentes ondes réfléchies; chaque terme est de la forme e^{ipl}R où l est une longueur dépendant des longueurs des différentes sections et où R est rationnel

en p et en q. La solution se présente alors sous la forme

$$\Phi = \Sigma \mathrm{R}\, e^{i(qt+pl)}\, dq.$$

Il n'est pas nécessaire, comme je l'ai dit plus haut, de considérer un grand nombre de termes; et chacun de ces termes peut se traiter comme dans le premier cas.

Exemple. — Je voudrais bien montrer cette décomposition de $\Omega(q)$ en ses différents termes correspondant chacun à une onde réfléchie et pour cela je prendrai un exemple simple, et je choisirai le cas d'une ligne fermée de longueur l, avec une pile de force électromotrice $f(t)$ au point $x = 0$, et pas de récepteur.

Soit d'abord

$$f(t) = e^{iqt}, \qquad \Phi = \Omega(q)\, e^{iqt};$$

d'où

$$\Omega(q) = \mathrm{A}\, e^{ipx} + \mathrm{B}\, e^{-ipx}.$$

J'écris que Φ est continu et que $\frac{d\Phi}{dx}$ subit un saut brusque e^{iqt}; c'est-à-dire que si Φ_0 et Φ_1, $\frac{d\Phi_0}{dx}$ et $\frac{d\Phi_1}{dx}$ sont les valeurs de Φ et $\frac{d\Phi}{dx}$ pour $x = 0$ et pour $x = l$, on a :

$$\Phi_0 = \Phi_1, \qquad \frac{d\Phi_0}{dx} = \frac{d\Phi_1}{dx} + e^{iqt},$$

cela donne :

$$\mathrm{A} + \mathrm{B} = \mathrm{A}\, e^{ipl} + \mathrm{B}\, e^{-ipl},$$

$$\mathrm{A}\, ip - \mathrm{B}\, ip = \mathrm{A}\, ip\, e^{ipl} - \mathrm{B}\, ip\, e^{-ipl} + 1,$$

d'où

$$\mathrm{A} = \frac{1}{ip(1 - e^{ipl})}, \qquad \mathrm{B} = \frac{1}{ip(1 - e^{-ipl})} = \mathrm{A}\, e^{ipl},$$

$$\Phi = e^{iqt} \frac{e^{ipx} + e^{ip(l-x)}}{ip(1 - e^{ipl})} = \frac{e^{iqt}}{ip} \left[\Sigma e^{ip(x+nl)} + \Sigma e^{ip(l-x+nl)} \right]$$

$$(n = 0, 1, 2, \ldots \infty).$$

Le terme $e^{ip(x+nl)}$ représente l'onde qui arrive au point x après avoir fait n tours complets dans le sens direct, le terme $e^{ip(l-x+nl)}$ représente l'onde qui a fait n tours complets dans le sens rétrograde.

Inutile d'ajouter que tout se passerait de la même manière dans les autres cas où les ondes au lieu de faire une série de tours, toujours dans le même sens, se réfléchissent un certain nombre de fois et reviennent en arrière.

Raccordement de deux fils de différente section.

Il peut arriver que dans deux sections consécutives de la ligne, les constantes du fil, ρ, λ, γ n'aient pas la même valeur. On peut par exemple raccorder deux fils de diamètre différent, ou bien raccorder une ligne sous-marine avec une ligne aérienne. Dans ce cas la valeur de p n'est pas la même dans les deux sections puisque l'équation qui définit p

$$\lambda\gamma q^2 - \rho\gamma i q = p^2$$

n'a pas les mêmes coefficients. De plus, au point de raccordement les ondes subissent une réflexion. Quelles sont les conditions de cette réflexion? D'abord il n'y a pas de force électromotrice, donc $\frac{d\Phi}{dx}$ est continu. Ensuite l'intensité doit être la même dans les deux sections; donc $\gamma \frac{d\Phi}{dt}$ et $\gamma\Phi$ sont continus. Cela suffit pour déterminer les conditions de la réflexion, c'est-à-dire les relations linéaires entre les coefficients A et B relatifs aux deux sections.

Si les différentes sections de la ligne sont formées de fils, dont les constantes ne sont pas les mêmes, la valeur de p n'est pas la même dans les différentes sections. Alors $\Omega(q)$ est une fonction rationnelle de q, de diverses quantités p_1, p_2, ..., liées à q par des équations du second degré, et de diverses exponentielles $e^{ip_1a_1}$, ..., où p_1 a toujours le même sens, tandis que a_1 est la longueur de la section correspondante. (Si l'on veut l'intensité en un point quelconque de la ligne, on pourra toujours considérer ce point comme un point de division séparant deux sections.)

Nos intégrales se présentent alors sous une forme encore plus compliquée. Mais on peut, quand on veut avoir une expression asymptotique, opérer toujours d'après les mêmes principes. On développera suivant les puissances des exponentielles e^{ipa}, comme p a toujours sa valeur imaginaire positive, cette expression a son module plus petit que 1 et la série converge rapidement. Chacun des termes est une exponentielle multipliée par une fonction rationnelle de q et de p. Considérons l'un de ces termes et cherchons une valeur asymptotique de l'intégrale correspondante. Pour cela il suffira de déformer le contour d'intégration jusqu'à ce qu'il aille passer par un point singulier, et de telle façon qu'en ce point singulier l'exponentielle soit beaucoup plus

grande que sur tout le reste du contour; on aura l'expression asymptotique en réduisant le contour à ses parties les plus voisines du point singulier, le reste étant négligeable.

Influence des pertes.

Reprenons le calcul quand la ligne est affectée d'une perte uniforme.

Nous avons toujours l'équation de Ohm

$$\lambda \frac{di}{dt} + \rho i = \mathrm{E} + \frac{d\mathrm{V}}{dx},$$

mais l'équation de continuité est modifiée. La dérivée de la charge par rapport au temps, c'est-à-dire $\gamma \frac{d\mathrm{V}}{dt}$ n'est pas égale à l'apport dû au courant, c'est-à-dire à $\frac{di}{dx}$, il faut tenir compte d'une perte proportionnelle à V et que je représenterai par $\alpha \mathrm{V}$; on a donc

$$\frac{di}{dx} = \gamma \frac{d\mathrm{V}}{dt} + \alpha \mathrm{V},$$

ce qui montre qu'il existe une fonction Φ telle que l'on ait

$$\mathrm{V} = \frac{d\Phi}{dt}, \qquad i = \gamma \frac{d\Phi}{dt} + \alpha\Phi.$$

de sorte que l'on a

$$\lambda\gamma \frac{d^2\Phi}{dt^2} + (\lambda\alpha + \rho\gamma)\frac{d\Phi}{dt} + \alpha\rho\Phi = \frac{d^2\Phi}{dx^2} = \mathrm{E}$$

ou en employant la notation symbolique

$$\left(\lambda \frac{d}{dt} + \rho\right)\left(\gamma \frac{d}{dt} + \alpha\right)\Phi - \frac{d^2\Phi}{dx^2} = \mathrm{E}.$$

Si l'on suppose $\mathrm{E} = 0$, il vient :

$$\lambda\gamma \frac{d^2\Phi}{dt^2} + (\lambda\alpha + \rho\gamma)\frac{d\Phi}{dt} + \alpha\rho\Phi = \frac{d^2\Phi}{dx^2}.$$

Si nous posons :

$$\Phi = e^{kt}\mathrm{U}$$

et qu'on choisisse k de telle sorte que

$$\lambda\gamma k^2 + (\lambda\alpha + \rho\gamma)k + \alpha\rho = 0,$$

ou

$$(\lambda k + \rho)(\gamma k + \alpha) = 0,$$

on est ramené à l'équation des télégraphistes. En effet on a symboliquement :

$$\frac{d}{dt}(e^{kt}\mathrm{U}) = e^{kt}\left(\frac{d\mathrm{U}}{dt} + k\mathrm{U}\right) = e^{kt}\left(\frac{d}{dt} + k\right)\mathrm{U},$$

de sorte que U satisfait à l'équation :

$$\left(\lambda\frac{d}{dt} + \lambda k + \rho\right)\left(\lambda\frac{d}{dt} + \gamma k + \alpha\right)\mathrm{U} = \frac{d^2\mathrm{U}}{dx^2}.$$

Il y a deux valeurs de k pour lesquelles cette équation se réduit à celle des télégraphistes :

1° Si $\lambda k + \rho$ est nul, il reste :

$$\lambda\gamma\frac{d^2\mathrm{U}}{dt^2} + (\alpha\lambda - \gamma\rho)\frac{d\mathrm{U}}{dt} = \frac{d^2\mathrm{U}}{dx^2};$$

2° Si $\gamma k + \alpha$ est nul, il reste :

$$\lambda\gamma\frac{d^2\mathrm{U}}{dt^2} + (\gamma\rho - \alpha\lambda)\frac{d\mathrm{U}}{dt} = \frac{d^2\mathrm{U}}{dx^2}.$$

On remarquera que dans l'une de ces deux équations, le coefficient de $\frac{d\mathrm{U}}{dt}$ est positif, de sorte qu'on peut disposer des unités de façon que le coefficient de $\frac{d^2\mathrm{U}}{dt^2}$ devienne égal à 1 et celui de $\frac{d\mathrm{U}}{dt}$ à 2, ce qui est l'hypothèse que nous avons faite dans les calculs antérieurs.

Quelle est la signification des deux valeurs de k? Supposons qu'après avoir isolé parfaitement la ligne à ses deux extrémités, on lui communique une charge uniforme, cette charge se dissipera peu à peu à cause des pertes; mais la charge restera uniforme; il ne naîtra donc aucun courant dans la ligne, et nous aurons :

$$\gamma\frac{d\mathrm{V}}{dt} + \alpha\mathrm{V} = 0,$$

d'où

$$\mathrm{V} = e^{kt}, \qquad \gamma k + \alpha = 0.$$

La seconde valeur de k définit donc la rapidité avec laquelle se perd la charge; elle est essentiellement négative.

Supposons maintenant que la ligne soit soumise pendant un certain temps à une force électromotrice E uniformément répartie tout le long de la ligne; dans le régime qui s'établira, l'intensité i sera constante et égale à $\frac{\mathrm{E}}{\rho}$ tout le long de

la ligne; la ligne ne prendra aucune charge et on aura $V = 0$. Faisons maintenant disparaître brusquement la force électromotrice, le courant i restera indépendant de x et V restera nul, de sorte qu'on aura :

$$\lambda \frac{di}{dt} + \rho i = 0.$$

d'où

$$i = e^{kt}, \qquad \lambda k + \rho = 0.$$

La première valeur de k définit la rapidité avec laquelle disparaît un courant uniforme, quand la ligne n'a pris aucune charge; elle est essentiellement négative.

Qu'arrive-t-il maintenant si les deux valeurs de k sont égales? On a alors :

$$\gamma\rho - \alpha\lambda = 0.$$

de sorte que notre équation se réduit à

$$\lambda\gamma \frac{d^2 U}{dt^2} = \frac{d^2 U}{dx^2}.$$

C'est l'équation des cordes vibrantes, la valeur de U se propage avec une vitesse uniforme, égale à celle de la lumière et sans altération. Quand à celle de $\Phi = e^{kt} U$, elle se propage avec cette même vitesse, et sans autre altération qu'un affaiblissement représenté par le facteur exponentiel e^{kt}.

Ainsi pour une certaine valeur de la perte, qu'on pourrait appeler *perte idéale*, les signaux s'affaiblissent avec la distance, mais *sans rien perdre de leur netteté*.

On conçoit donc que dans certains cas, une perte puisse améliorer les transmissions.

Remarque sur le transmetteur.

Dans tout ce qui précède nous avons toujours supposé que la force électromotrice de la pile $f(t)$ était donnée en fonction du temps. Cela est vrai si la ligne mise à la pile pendant l'émission des signaux, est mise immédiatement à la terre dans l'intervalle des signaux. Les choses se passeraient d'une façon plus compliquée si dans l'intervalle des signaux la ligne était isolée, où réunie à la terre par l'intermédiaire d'un récepteur.

Considérons le cas où la ligne est isolée; on a pour $x = 0$:

1° Avant l'émission du signal :

$$\Phi = \frac{d\Phi}{dt} = \frac{d\Phi}{dx} = 0;$$

2° Pendant l'émission du signal :

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{1}{2} \quad \text{(la force de la pile} = 1\text{)};$$

3° Après l'émission du signal :

$$\frac{d\Phi}{dx} = 0, \qquad \Phi = C.$$

Si l'on avait après l'émission du signal $\frac{d\Phi}{dx} = 0$, et si le signal était très court, émis au temps zéro et la ligne indéfinie, on aurait :

$$\text{pour } t < x, \quad \Phi = 0, \qquad \text{pour } t > x, \quad \Phi = K e^{-t} J_0(\sqrt{x^2 - t^2})$$

et l'on trouverait des valeurs analogues si l'on supposait que la durée de l'émission est finie (vide supra).

Soit Φ_0 la valeur de Φ correspondant à cette hypothèse, $\Phi_0 + \Phi_1$ la véritable valeur de Φ; on aura avant et pendant l'émission $\Phi = 0$, puisque les hypothèses ne deviennent différentes qu'après l'émission. Après l'émission on aura : pour $x = 0$,

$$\Phi_1 = C - \Phi_0,$$

de sorte que Φ_1 est donné pour $x = 0$. Nous remarquerons que cette valeur donnée de Φ_1 est toujours positive, parce que pour $x = 0$ les fonctions $e^{-t} J_0(it)$ et Φ_0 sont toujours décroissantes.

Ainsi Φ_1 est donnée en fonction de t; elle est nulle jusqu'à la fin de l'émission et positive ensuite. Le calcul de Φ_1 pour des valeurs de x différentes de zéro est facile. Nous trouvons, si $\Phi_1 = e^{iqt}$ pour $x = 0$ (et dans le cas de la ligne indéfinie) :

$$\Phi_1 = e^{i(qt + px)},$$

d'où pour un ébranlement instantané :

$$\Phi_1 = \frac{1}{2\pi} \int e^{i(qt + px)} dq = \varphi(t, x).$$

Si nous supposons $\Phi_1 = f(t)$ pour $x = 0$, il vient, comme plus haut :

$$\Phi_1 = \int f(\tau) \varphi(t - \tau, x) d\tau;$$

je remarque seulement que $f(\tau)$ étant essentiellement positif, la fonction Φ_1 ne décroîtra que très lentement et que les transmissions seront beaucoup plus mauvaises.

Si l'on supposait qu'après l'émission la ligne est mise à la terre par l'intermédiaire d'un récepteur, le calcul serait analogue. On aurait avant l'émission,

$$\Phi = \frac{d\Phi}{dx} = 0;$$

pendant l'émission,

$$\frac{d\Phi}{dx} = \frac{1}{2};$$

après l'émission une certaine relation entre Φ et ses dérivés que j'écris $\Delta\Phi = 0$. Soit alors Φ_0 ce qui serait Φ si l'on mettait *directement* à la terre après l'émission, $\Phi_0 + \Phi_1$, la vraie valeur de Φ.

On a alors :

Avant et pendant l'émission,

$$\Phi_1 = \Delta\Phi_1 = 0;$$

Après l'émission,

$$\Delta\Phi_1 = -\Delta\Phi_0.$$

C'est-à-dire que $\Delta\Phi_1$ est une fonction connue du temps. On cherchera la solution isochrone en supposant d'abord $\Delta\Phi_1 = e^{iqt}$ et on en déduira, toujours par le même procédé, la solution générale et l'ébranlement élémentaire. Il est clair qu'on peut encore opérer de même dans des cas plus compliqués.

ÉTUDE DU RÉCEPTEUR TÉLÉPHONIQUE

L'Éclairage électrique, t. 50 p. 221-234 (16 février 1907); p. 257-262 (23 février 1907); p. 329-338 (9 mars 1907); p. 365-372 (16 mars 1907); p. 401-404 (23 mars 1907).

I. — Rappel des équations de Maxwell.

Considérons un système de n circuits parcourus par des courants d'intensité i_1, $i_2, \ldots$, i_n, dont les positions dans l'espace dépendent de n paramètres x_1, x_2, $\ldots$, x_n.

Nous introduirons dans les calculs les vitesses de déplacement de ces circuits

$$x'_k = \frac{dx_k}{dt},$$

et les quantités d'électricité transportées par ces courants

$$q_k = \int i_k \, dt.$$

Soit T la force vive mécanique du système qui dépend des variables x et x'; soit T′ son énergie électrodynamique qui ne dépend que de la position des circuits et de l'intensité des courants, c'est-à-dire des variables x et i; soit U l'énergie potentielle mécanique du système qui ne dépend que des variables x; et enfin soit U′ l'énergie électrostatique qui dépend des charges électriques q et des variables x.

Posons

$$\mathrm{H} = \mathrm{T} + \mathrm{T'} - \mathrm{U} - \mathrm{U'}$$

et imaginons que le système soit soumis à deux groupes de forces extérieures : les unes Φ sont des forces motrices, les autres F sont des forces de frottement;

on peut les considérer comme définies par l'expression même de leur travail virtuel, savoir :

$$\Sigma(\Phi_k - F_k)\,\delta x_k.$$

Dans ces conditions on sait que les équations de Lagrange appliquées à ce système mécanique sont de la forme

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H}{\partial x'_k}\right) - \frac{\partial H}{\partial x_k} = \Phi_k - F_k.$$

La même fonction H différentiée par rapport aux variables i et q donnera le groupe d'équations

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H}{\partial i_k}\right) - \frac{\partial H}{\partial q_k} = E_k - R_k i_k.$$

E_k désignant la force électromotrice totale placée dans le circuit et R_k la résistance ; on peut en effet considérer l'expression

$$\Sigma(E_k - R_k i_k)\,\delta i_k$$

comme représentant le travail virtuel des forces électriques, dont les unes E produiraient un travail moteur et les autres, Ri, un travail résistant analogue au frottement.

Ce sont là les équations établies par Maxwell dans l'hypothèse où il n'y aurait que des courants et pas d'aimants.

Généralisation des équations de Maxwell. — Nous allons généraliser ces équations et montrer qu'elles subsistent lorsque le système comprend des aimants permanents ou non.

Nous considérons en effet les aimants comme des circuits infiniment petits dans lesquels circulent les courants qui produisent le champ magnétique. Ces circuits sont mobiles, et c'est précisément parce qu'ils tendent à s'orienter que les corps deviennent magnétiques.

Nous désignerons par $j_1, j_2, \ldots$ les intensités de ces courants élémentaires et par $y_1, y_2, \ldots$ les variables fixant leur position dans l'espace.

Nous supposerons ces circuits sans résistance, sans force électromotrice et sans capacité ; il faudra donc, dans les nouvelles équations, supposer

$$E_k = R_k = 0 \quad \text{et} \quad \frac{dH}{dq_k} = 0.$$

ce dernier terme provenant en effet de la capacité du circuit. En différentiant H par rapport à ces variables y et j, on obtient deux nouveaux groupes d'équations.

Le troisième groupe d'équations de Maxwell est ici :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H}{\partial j_k}\right) = 0$$

ou

$$\frac{\partial H}{\partial j_k} = \text{const.} = p_k.$$

Quant au quatrième groupe d'équations, il se simplifie également : en effet, nous supposerons ces circuits élémentaires sans masse; par suite la quantité T qui entre ici dans l'expression de H et qui représente la force vive mécanique des circuits est nulle et comme c'est la seule des quantités entrant dans H, qui dépende des variables y', on en conclut que

$$\frac{\partial H}{\partial y'} = \frac{\partial T}{\partial y'} = 0.$$

D'autre part, aucune force motrice n'agit sur ce système; donc

$$\Phi_k = 0;$$

enfin, nous remarquerons que la force F_k n'est autre chose ici que l'hystérésis; comme la perte d'énergie par hystérésis est toujours très faible, nous n'en tiendrons pas compte et nous poserons

$$F_k = 0.$$

S'il y a des aimants permanents nous supposerons que les circuits élémentaires sont fixes à l'intérieur de ces aimants.

Le quatrième groupe d'équations de Maxwell prend donc la forme

$$\frac{\partial H}{\partial y_k} = 0.$$

Posons maintenant :

$$H' = H - \Sigma p_k j_k.$$

La fonction H dépendait des variables x, x', y, y', i, q, j; au contraire on peut supposer que H' ne contient plus ni les y ni les j; il suffit de tirer ces variables des équations

$$\frac{\partial H}{\partial y_k} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial H}{\partial j_k} = p_k.$$

et de les exprimer en fonction de x, x', i, q. Il est alors facile de voir que les nouvelles équations en H' conservent la même forme que les équations en H.

En effet, soit α l'une quelconque des variables x, i, x', q. Calculons $\frac{d\mathrm{H}'}{d\alpha}$; H' dépend de α directement et par l'intermédiaire de j et de y qui ont été remplacées par des fonctions de α. Donc :

$$\frac{d\mathrm{H}'}{d\alpha} = \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial \alpha} + \sum \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial y_k} \times \frac{dy_k}{d\alpha} + \sum \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial j_k} \times \frac{\partial j_k}{\partial \alpha} - \sum p_k \frac{dj_k}{d\alpha}.$$

Or :

$$\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial y_k} = 0, \qquad \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial j_k} = p_k,$$

d'où

$$\frac{\partial \mathrm{H}'}{d\alpha} = \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial \alpha},$$

d'où enfin les équations

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathrm{H}'}{dx_k}\right) - \frac{d\mathrm{H}'}{dx_k} = \Phi_k - \mathrm{F}_k,$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathrm{H}'}{\partial i_k}\right) - \frac{\partial \mathrm{H}'}{\partial q_k} = \mathrm{E}_k - \mathrm{R}_k i_k.$$

On est ainsi débarrassé des variables relatives aux circuits élémentaires.

Remarquons cependant que H était un polynome du deuxième degré par rapport aux variables i, et que par rapport à ces mêmes variables il ne contenait que des termes du second degré et des termes indépendants. Au contraire H' est une fonction quelconque des i.

Équations des forces vives. — Posons

$$\mathrm{W} = \sum x'_k \frac{\partial \mathrm{H}'}{\partial x'_k} + \sum i_k \frac{\partial \mathrm{H}'}{\partial i} - \mathrm{H}'$$

et ajoutons les équations précédentes après avoir multiplié les premières par dx_k et les secondes par dq_k. Il vient, en remarquant que $dx_k = x'_k\, dt$ et que $dq_k = i_k\, dt$,

$$\sum x'_k\, d\left(\frac{\partial \mathrm{H}'}{\partial x'_k}\right) - \sum \frac{\partial \mathrm{H}'}{\partial x_k} dx_k + \sum i_k\, d\left(\frac{\partial \mathrm{H}'}{\partial i_k}\right) - \sum \frac{\partial \mathrm{H}'}{\partial q_k} dq_k$$
$$= \sum (\Phi_k - \mathrm{F}_k)\, dx_k + \sum (\mathrm{E}_k i_k - \mathrm{R}_k i_k^2)\, dt.$$

On voit immédiatement que le premier membre de cette égalité n'est autre chose que $d\mathrm{W}$.

Donc :

$$dW = \Sigma(\Phi_k - F_k)\, dx_k + \Sigma(E_k i_k - R_k i_k^2)\, dt.$$

Le deuxième membre est la somme des travaux des forces extérieures, des travaux des forces électromotrices et de la chaleur Joule dégagée.

Donc W représente bien l'énergie totale et la dernière équation écrite est bien l'équation généralisée des forces vives.

II. — Application des équations au récepteur téléphonique.

Soit x le déplacement du centre de la membrane, soit i l'intensité du courant circulant dans la bobine.

Déterminons la fonction H'. Nous supposerons qu'elle ne dépend pas de q, c'est-à-dire que nous négligerons les effets dus à la capacité

La force vive du système est :

$$T = \frac{mx'^2}{2},$$

expression dans laquelle m ne désigne qu'une fraction de la masse de la membrane car x' représente la vitesse du centre, vitesse supérieure à celle que prennent tous les autres points de la membrane.

D'autre part H' est une fonction de i et de x, variables qui restent toujours très petites. On pourra donc remplacer H' par son développement en série par rapport aux puissances croissantes de i et de x, limité aux termes du deuxième degré. Le terme indépendant de i et de x ne nous intéresse pas, puisque H' ne figure dans les équations que par ses dérivées ; les termes du premier degré ont des coefficients nuls, car pour $i = 0$, le système est en équilibre électrique, et nous pouvons toujours supposer que lorsque les x sont nuls il est en équilibre mécanique ; par suite

$$\left(\frac{\partial H'}{\partial i}\right)_{i=0,\, x=0} = \left(\frac{\partial H'}{\partial x}\right)_{i=0,\, x=0} = 0.$$

Enfin les termes du second degré sont de la forme

$$\frac{L'i^2}{2} + M'xi - \frac{kx^2}{2},$$

expression dans laquelle L caractérise la self-induction de la bobine, et M'

l'attraction exercée sur la plaque par la bobine lorsque celle-ci est traversée par un courant i.

Ce coefficient s'annulerait si l'électro-aimant au repos n'était pas aimanté, et il est proportionnel au champ de l'aimant permanent : on peut s'en rendre compte facilement, en remarquant que l'énergie électrodynamique du système peut se mettre, à un facteur constant près, sous la forme

$$\int (H_0 + H_i)^2 \, dv$$

en désignant par H_0 le champ créé par l'aimant permanent et par H_i le champ créé par le courant i, et étendant le signe $\int$ à l'ensemble du système.

Dans cette nouvelle expression, le terme qui correspondrait à $M'xi$ serait celui qui serait du premier degré par rapport à i, c'est-à-dire, $\int H_0 H_i \, dv$, expression qui serait bien nulle si $H_0 = 0$, c'est-à-dire s'il n'y avait pas d'aimant permanent.

Quant au coefficient k, il dépend essentiellement des forces qui agissent sur la plaque lorsque aucun courant ne passe dans la bobine, forces qui dépendent du magnétisme rémanent des noyaux ainsi que de l'élasticité de la plaque et par conséquent du mode d'encastrement des bords.

Nous verrons un peu plus loin que ce coefficient k est positif.

Donc finalement la fonction H' est de la forme :

$$H' = \frac{mx'^2}{2} - \frac{Li^2}{2} + M'xi - \frac{kx^2}{2}.$$

D'après ce que nous avons dit, l'équation de Lagrange relative au système mécanique sera :

$$mx'' - M'i + kx = \Phi - Fx';$$

Φ est ici une force motrice quelconque agissant sur la plaque. Cette force est nulle si l'appareil est récepteur; elle représente la force due à la pression de l'air s'il s'agit d'un transmetteur.

Quant au frottement nous admettrons qu'il est proportionnel à la vitesse; il est d'ailleurs très faible. Pour être rigoureux il faudrait y ajouter la force antagoniste due aux courants de Foucault, qui prennent naissance dans la membrane métallique. Nous les négligerons pour le moment et nous étudierons plus loin leur influence.

L'équation de Lagrange appliquée au système électrique est

$$L i' + M' x' = E - R i$$

en posant

$$i' = \frac{di}{dt};$$

E représente la force électromotrice aux bornes du téléphone ; c'est une fonction connue du temps.

Finalement, il faut intégrer le système :

$$m x'' + F x' + k x - M' i = \Phi,$$
$$M' x' + L i' + R i = E.$$

Intégration du système. — Ces équations sont linéaires à coefficients constants et du second ordre.

Considérons d'abord l'équation type de la forme

$$a y'' + 2 b y' + c y = F,$$

a, b, c étant des constantes et F une fonction connue du temps.

On sait que, si $F = 0$, l'équation

$$a y'' + 2 b y' + c y = 0$$

admet une solution particulière de la forme

$$y = e^{\omega t},$$

ω étant une racine de l'équation

$$a \omega^2 + 2 b \omega + c = 0.$$

Soit

$$\omega = \alpha + \beta \sqrt{-1};$$

nous dirons dans le cas actuel, où il y a pas de second membre, que ω représente la période propre de l'appareil. On sait que dans ce cas β caractérise la période d'oscillation propre de l'appareil et α l'amortissement de cette oscillation.

Supposons maintenant que l'équation ait un second membre de la forme

$$F = e^{\omega t}.$$

L'équation admet la solution :

$$y = \frac{e^{\omega t}}{a \omega^2 + 2 b \omega + c}.$$

Si F est une fonction périodique quelconque, elle peut se mettre sous la forme :

$$F = \Sigma A\, e^{\omega t},$$

les ω étant alors des imaginaires pures, d'où

$$y = \sum \frac{A\, e^{\omega t}}{a\omega^2 + 2b\omega + c}.$$

Dans le cas actuel il faut que l'appareil rende un son non altéré et aussi intense que possible. Mathématiquement cela revient à comparer la fonction y, qui représente les vibrations de l'appareil à la fonction F qui représente la cause extérieure produisant les vibrations.

Le rapport est

$$\frac{y}{F} = \frac{1}{a\omega^2 + 2b\omega + c}.$$

Ce rapport est imaginaire puisque ω l'est.

Son module est le rapport des modules de y et de F, c'est-à-dire le rapport des amplitudes des oscillations de y et de F; son argument qui est la différence des arguments de y et de F représente la différence de phase de y et de F; tout ceci se voit immédiatement en appliquant aux fonctions périodiques les représentations par vecteurs et les calculs des imaginaires.

Donc, pour que le son soit aussi intense que possible, il faut que le module de l'expression précédente soit aussi grand que possible; pour que le son ne soit pas altéré, il faut que, ω variant dans les limites de la voix humaine, le rapport précédent varie aussi peu que possible. On peut facilement voir que ces deux conditions sont contradictoires : en effet, pour satisfaire à la première, il faudrait que le dénominateur fût très petit, c'est-à-dire que

$$a\omega^2 + 2b\omega + c$$

fût voisin de o. Si ce polynome était nul, il y aurait résonance et l'intensité serait maximum. Pour ω voisin de cette période propre de l'appareil, le rapport serait très grand, mais il varierait très rapidement, et l'on aurait une grande altération dans les sons rendus par l'appareil; cette altération proviendrait de deux causes : des variations du module qui peuvent amener l'affaiblissement ou le renforcement de certains harmoniques et des variations de l'argument qui correspondent à des variations dans le décalage des harmoniques.

On peut construire une courbe de résonance, en prenant pour abscisse ωi qui est réel et pour ordonnée :

$$\left|\frac{y}{F}\right| = \left|\frac{1}{a\omega^2 + 2b\omega + c}\right|.$$

Si $b = 0$, la résonance a lieu pour la valeur de ω qui satisfait à l'équation

$$a\omega^2 + c = 0.$$

La courbe présente une asymptote verticale (*fig.* 1).

Si $b \neq 0$, il n'y a aucune valeur réelle de ωi qui annule $a\omega^2 + 2b\omega + c$; lorsque b augmente, la courbe s'aplatit (*fig.* 2); le son s'altère de moins en moins, mais l'intensité diminue.

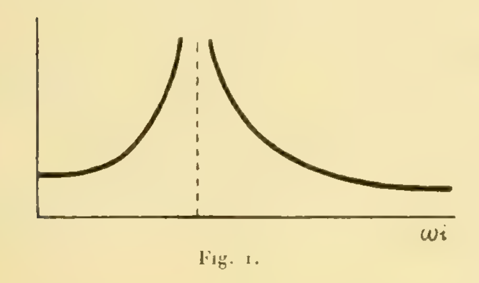


Fig. 1.

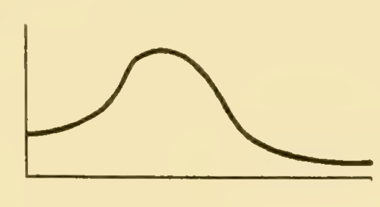


Fig. 2.

Tout ce que nous avons dit s'applique à une solution particulière de l'équation différentielle et est valable lorsque le régime est établi. Il y a une période variable pendant laquelle le phénomène s'établit, et qu'il est nécessaire d'étudier.

La solution générale de l'équation est

$$y = \sum \frac{A e^{\omega t}}{a\omega^2 + 2b\omega + c} + B_0 e^{\omega_0 t} + B_1 e^{\omega_1 t},$$

ω_0 et ω_1 étant les racines de l'équation

$$a\omega^2 + 2b\omega + c = 0,$$

B_0 et B_1 étant deux constantes qu'on détermine en écrivant qu'à l'instant initial on a

$$y = y' = 0.$$

Ces termes en B_0 et B_1 constituent des sons nuisibles qui disparaissent par amortissement, car ω_0 et ω_1 ne sont pas des imaginaires pures ; à ce point de vue encore, il y a intérêt a avoir un amortissement important, c'est-à-dire une grande valeur pour b.

Ceci posé, revenons à nos équations de Lagrange.

Faisons

$$E = \Phi = 0.$$

Si nous prenons pour x et i des fonctions de la forme $e^{\omega t}$, nos équations pourront s'écrire :

$$x(m\omega^2 + E\omega + k) - M'i = 0,$$
$$M'\omega x + (L\omega + R)i = 0$$

et par suite ω satisfait à l'équation :

$$(m\omega^2 + F\omega + K)(L\omega + R) - M'^2\omega = 0.$$

Pour que le mouvement soit un mouvement vibratoire, se faisant au voisinage d'une position d'équilibre stable, il faut que la partie réelle des racines de cette équation soit négative; sans quoi les solutions comprendraient des exponentielles à exposant positif et, sans aucune force extérieure, x croîtrait indéfiniment. Ceci exige $k > 0$; en effet, comme le terme en ω^3 a pour coefficient $mL > 0$, et comme l'équation à une ou trois racines réelles qui doivent être négatives d'après ce qu'on a dit, on en conclut que le terme indépendant de ω doit être positif. Donc

$$KR > 0$$

et par suite

$$K > 0.$$

Donc tous les coefficients sont positifs, et l'équation a trois racines réelles négatives, ou une racine réelle négative et deux racines imaginaires dont les parties réelles sont certainement négatives.

Ces cas peuvent d'ailleurs se présenter l'un et l'autre.

III. — Application des équations au cas de deux appareils.

a. Appareils identiques. — Nous supposerons deux appareils semblables, par exemple deux appareils Bell réunis entre eux par une ligne très courte dont on puisse négliger la résistance et la self-induction.

Nous avons maintenant trois variables, savoir :

L'intensité du courant i;

Les déplacements des deux membranes x et x_1.

La fonction H′ relative à ce système est :

$$H' = \frac{m}{2}(x'^2 + x_1'^2) + Li^2 + M'i(x + x_1) - \frac{k}{2}(x^2 + x_1^2),$$

d'où on tire les trois équations :

$$\begin{aligned} mx'' + Fx' + kx - M'i &= \Phi, \\ mx_1'' + Fx_1' + kx - M'i &= \Phi_1, \\ M'(x' + x_1') + 2Li' + 2Ri &= E. \end{aligned}$$

Nous supposerons d'ailleurs $E = 0$, car il n'y a pas de force électromotrice dans le circuit,

$$\Phi = 0 \quad \text{et} \quad \Phi_1 \neq 0.$$

En effet aucune force mécanique n'agit sur le récepteur; au contraire le transmetteur est soumis à la pression variable de l'air par suite des sons émis par la personne qui parle devant la plaque.

Pour trouver la période propre du système, il suffit de considérer les équations sans second membre et de supposer toutes les variables proportionnelles à $e^{\omega t}$, ce qui donne :

$$\begin{aligned} (m\omega^2 + F\omega + k)x - M'i &= 0, \\ (m\omega^2 + F\omega + k)x_1 - M'i &= 0, \\ 2(L\omega + R)i + M'\omega(x + x_1) &= 0, \end{aligned}$$

d'où l'on tire d'abord

$$x = x_1$$

et en éliminant x et i entre les deux dernières, il vient :

$$(m\omega^2 + F\omega + k)(L\omega + R) + M'\omega'' = 0.$$

Les périodes propres sont donc les mêmes que celles des appareils considérés séparément.

b. Téléphone et microphone. — Appelons :

L la self du secondaire comprenant la self du récepteur et de l'enroulement secondaire du microphone;

M le coefficient d'induction mutuelle du primaire et du secondaire du microphone;

N la self du primaire du microphone, le secondaire étant ouvert;

R la résistance totale de la ligne, du récepteur et du secondaire du microphone;

R_1 la résistance du primaire, variable;

S la valeur moyenne de la résistance R_1 de sorte que $R_1 = S + r$, r variant suivant les vibrations de la plaque;

i le courant de la ligne;

J courant dans le primaire, variable;

J_0 valeur de J lorsque la plaque est au repos, de sorte que $J = J_0 + j$.

Nous supposerons en outre r et j très petits par rapport à S et à J_0.

On a :

$$H' = \frac{mx'^2}{2} + \frac{Li'^2}{2} + Mi'J + \frac{NJ'^2}{2} + M'i'x - \frac{Kx^2}{2},$$

expression analogue à celle qui a été trouvée pour un seul récepteur téléphonique, sauf que $\frac{Li'^2}{2}$ est remplacé par

$$\frac{Li'^2}{2} + Mi'J + \frac{NJ'^2}{2}.$$

Les équations de Maxwell sont :

(1) $$mx'' + Kx - M'i' = -Fx',$$

car dans cet exemple $\Phi = 0$,

(2) $$Li' + M'x' + Mj' = Ri$$

en remarquant que $j' = J'$ et en observant que dans le secondaire $E = 0$.

Enfin

(3) $$Mi + Nj' = E - SJ_0 - Sj - rJ_0,$$

car ici $E \neq 0$, puisqu'on dérive par rapport à la variable j, courant du primaire; on a fait le produit $R_1 J$ et on a négligé le terme jr devant les autres.

Remarquons qu'au repos on a dans le primaire du microphone

$$E = SJ_0;$$

par suite l'équation précédente s'écrit :

$$Mi + Nj = -Sj - rJ_0.$$

On a ainsi le système d'équations :

$$mx'' + Fx' + Kx - M'i = 0,$$
$$M'x' + Li' + Ri + Mj' = 0,$$
$$Mi + Nj + Sj = rJ_0.$$

Comme précédemment, on trouve la période propre du système en considérant les équations sans second membre et supposant les trois fonctions proportionnelles à $e^{\omega t}$.

On obtient les trois équations :

$$(m\omega^2 + F\omega + K)x - M'i = 0,$$
$$M'\omega + (L\omega + R)i + M\omega j = 0,$$
$$M\omega i + (N\omega + S)i = 0.$$

L'équation donnant les périodes propres de l'appareil est :

$$\begin{vmatrix} m\omega^2 + F\omega + K & -M & 0 \\ M'\omega & L\omega R & M\omega \\ 0 & M\omega & N\omega + S \end{vmatrix} = C$$

ou

$$(m\omega^2 + F\omega + K)[(L\omega + R)(N\omega + S) - M^2\omega^2] + M'^2\omega(N\omega + S) = 0.$$

Comme précédemment, pour que le mouvement soit périodique et reste infiniment voisin de la position d'équilibre du système, il faut et il suffit que la partie réelle des racines de cette équation soit négative. Cela exige $K > 0$.

En effet le coefficient du terme ω^4 est $m(LN - M^2)$.

Ce coefficient est positif, on peut dire par exemple que l'énergie électromagnétique est :

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2} L i^2 + M iJ + \frac{1}{2} NJ^2.$$

Par définition ce trinome du deuxième degré à deux variables conserve un signe constant, d'où :

$$LN - M^2 > 0.$$

On peut aussi remarquer que L étant la self du système entier se compose de deux termes :

$$L = L' + L'',$$

L' étant la self de la ligne et du récepteur, L'' étant celle du secondaire du transmetteur.

Or la théorie des transformateurs indique que la quantité

$$L''N - M^2 > 0,$$

l'égalité ayant lieu quand le transformateur est parfait et ne présente aucune fuite magnétique ; donc certainement

$$LN - M^2 > 0.$$

Ceci posé pour que les racines réelles de l'équation soient négatives il faut que le terme indépendant de ω soit positif :

$$KRS > 0,$$

d'où

$$K > 0.$$

Cette condition est d'ailleurs suffisante, car tous les coefficients étant positifs, si l'équation admet des racines réelles, elles ne peuvent être que négatives. Je dis d'ailleurs que cette équation a toujours des racines réelles.

Substituons en effet $-\frac{S}{N}$ dans le premier membre.

Le résultat est

$$[-M^2\omega^2(m\omega^2+F\omega+K)]\omega=-\frac{S}{N}.$$

Si l'équation

$$m\omega^2+F\omega+K=0$$

a ses racines imaginaires, ou si elles sont réelles et que $-\frac{S}{N}$, soit extérieur à leur intervalle, le résultat de la substitution est négatif, et dans ce cas l'équation a au moins deux racines réelles.

Si, au contraire, l'équation

(2) $$m\omega^2+F\omega+K=0$$

a ses racines réelles, l'une supérieure, l'autre inférieure à $-\frac{S}{N}$, cette substitution ne donne aucun renseignement; mais alors, substituons dans notre équation primitive (1) les racines de cette équation (2), racines certainement négatives puisque tous les coefficients de cette équation sont positifs. Le résultat de ces substitutions est

$$M^2\omega(N\omega+S).$$

Le premier facteur est négatif d'après ce qu'on vient de dire; quand au deuxième, il donne deux résultats de signe contraire puisque $-\frac{S}{N}$ est compris entre les deux racines de l'équation (2). Donc, dans ce cas encore il y a au moins deux racines réelles.

Il peut d'ailleurs y avoir soit deux, soit quatre racines réelles; par exemple si $M=0$ l'équation devient :

$$(M\omega^2+F\omega+K)(L\omega+R)(N\omega+S)=0$$

et cette équation a deux ou quatre racines réelles suivant que les deux racine de

$$m\omega^2 + F'\omega + K = 0$$

sont imaginaires ou réelles.

Je dis enfin que si $K > 0$, les racines imaginaires de l'équation (1) ont leur partie réelle négative.

Nous avons vu précédemment en effet l'expression de l'énergie totale du système :

$$W = \sum x' \frac{\partial H'}{\partial x'} + \sum i \frac{\partial H'}{\partial i} - H.$$

Dans le calcul actuel

$$H' = \frac{m x'^2}{2} + \frac{L i^2}{2} + M i J + \frac{N J^2}{2} + M i x - \frac{K x^2}{2}$$

et

$$W = x' \frac{\partial H'}{\partial x'} + i \frac{\partial H'}{\partial i} + J \frac{\partial H'}{\partial J} - H' = \frac{m x'^2}{2} + \frac{L i^2}{2} + M i J + \frac{N J^2}{2} + \frac{K x^2}{2};$$

on a vu également que :

$$dW = \Sigma(\Phi_k - F_k)\, dx_k + \Sigma(E_k i_k - R_k i_k^2)\, dt.$$

Comme nous étudions les oscillations propres du système, on suppose dans les équations :

$$\Phi = E = 0,$$

d'où

$$dW = F_k\, dx_k - R i^2\, dt - SJ^2 < 0.$$

Ceci posé si l'équation en ω avait une racine de la forme

$$\omega = \alpha + \beta\sqrt{-1},$$

avec $\alpha > 0$ les fonctions x, i, J, seraient proportionnelles à

$$e^{(\alpha + \beta\sqrt{-1})t}.$$

L'équation en ω ayant ses coefficients réels admettrait aussi la solution conjuguée

$$\alpha - \beta\sqrt{-1},$$

et les fonctions x, i, J, seraient de la forme

$$e^{\alpha t}(\lambda \cos\beta t + \mu \sin\beta t),$$

λ et μ étant deux constantes.

En substituant dans W, il viendrait

$$W = e^{2\alpha t}(A \cos^2 \beta t + 2\beta \sin \beta t \cos \beta t + C \sin^2 \beta t).$$

La fonction entre parenthèses est périodique et ne peut s'annuler. Donc à des intervalles de temps d'une période, W augmenterait si l'on avait $\alpha > 0$.

Or, cela est impossible puisqu'on vient de voir que $dW < 0$.

Donc il est certain que l'on a $\alpha < 0$.

Ayant ainsi étudié le système sans second membre, revenons au système complet.

Il faut alors faire une hypothèse sur la résistance variable r; nous la supposerons périodique et nous poserons

$$rJ_0 = A\, e^{\omega t},$$

ω étant une imaginaire pure; nous admettons ainsi que r varie comme le son qui produit cette variation, et que celui-ci n'est pas amorti. Il faut alors étudier le phénomène pendant le régime et pendant la période variable.

Pour la période de régime, on sait que x, i, j sont proportionnels à $e^{\omega t}$, ω étant l'exposant qui figure dans la valeur rJ_0.

On aura donc le système :

$$\begin{aligned} x(m\omega^2 + F\omega + K) - M'i &= 0, \\ M'\omega x + (L\omega + R)i + M\omega j &= 0, \\ M\omega i + (N\omega + S)j &= -rJ_0. \end{aligned}$$

Tirons la valeur de x de ce système. On a

$$\frac{x}{rJ_0} = \frac{P(\omega)}{Q(\omega)}.$$

Le dénominateur $Q(\omega)$ est le déterminant formé par les coefficients des inconnues : c'est le premier membre de l'équation du quatrième degré trouvée antérieurement.

Cherchons à calculer $P(\omega)$.

C'est un polynome en ω : cherchons le coefficient du terme de plus haut degré en ω. Il suffit de supposer ω infiniment grand; la première équation se réduit à :

$$m\omega^2 x - M'i = 0.$$

Donc $\frac{x}{i}$ tend vers zéro et x est négligeable devant i.

Par suite les deux dernières équations se réduisent à

$$Li + Mj = 0,$$
$$(Mi + Nj)\omega = -rJ_0.$$

On tire immédiatement de ces trois équations :

$$\frac{x}{rJ_0} = \frac{MM'}{m(LN - M^2)\omega^3}.$$

D'ailleurs pour ω infini le polynome $Q(\omega)$ se réduit à

$$Q(\omega) = m(LN - M^2)\omega^4,$$

d'où l'on conclut que pour ω infini, $P(\omega)$ se réduit à :

$$P(\omega) = MM'\omega$$

ce qui prouve que ce polynome est du premier degré en ω, et que le coefficient du terme en ω est MM'.

Pour trouver le terme indépendant de ω, supposons ω infiniment petit.

La première équation se réduit à :

$$K(\omega) = M'i,$$

x et i sont donc des infiniment petits du même ordre, et la deuxième équation devient :

$$Ri + M\omega j = 0,$$

ce qui montre que i est infiniment petit devant j.

La troisième devient alors

$$Sj = rJ_0$$

et on conclut facilement de ce qui précède que $\frac{x}{rJ_0}$ tend vers zéro avec ω.

Donc $P(\omega)$ n'a pas de terme indépendant et

$$\frac{x}{rJ_0} = \frac{MM'\omega}{Q(\omega)}.$$

Cette égalité permet de construire la courbe de résonance : comme on l'a vu précédemment, il faut porter en abscisses les valeurs de $|\omega|$ et en ordonnées le rapport entre l'amplitude des vibrations de la plaque et l'amplitude de l'oscillation qui les produit, c'est-à-dire $\left|\frac{x}{rJ_0}\right|$.

Pour que le son ne soit pas altéré, il faut que le module de cette expression reste sensiblement constant; pour que le son soit intense, il faut que ce module soit aussi grand que possible.

On a déjà vu que ces deux qualités étaient incompatibles; on peut s'en rendre compte ici au moyen de la représentation géométrique des imaginaires (*fig.* 3).

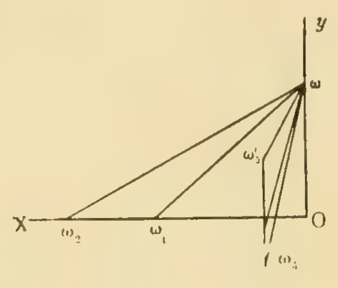


Fig. 3.

Plaçons-nous dans le cas où l'équation caractéristique aurait deux racines réelles et deux racines imaginaires conjuguées; soient ω_1, ω_2, ω_3, ω_4, les quatre racines.

Soit ω la période du son, variable dans les limites de la voix, et qui est représentée par une imaginaire pure.

Le module de l'expression $\frac{x}{rJ_0}$ est proportionnel au quotient

$$\frac{\overline{o\omega}}{\overline{\omega\omega_1}+\overline{\omega\omega_2}+\overline{\omega\omega_3}+\overline{\omega\omega_4}}.$$

Si l'amortissement était trop fort, c'est-à-dire si les quatre racines étaient éloignées vers la gauche de l'axe oy, l'expression précédente varierait peu avec ω, mais le dénominateur serait grand et les sons seraient peu intenses. Si au contraire l'amortissement était faible, les racines se rapprocheraient de oy; le dénominateur diminuerait ce qui augmenterait l'expression de l'intensité; mais les variations de ce dénominateur seraient très rapides et les sons seraient altérés. La solution la plus avantageuse paraît être de rejeter ω_1 et ω_2 vers la gauche et de prendre ω_3 et ω_4 assez haut dans les sons aigus, mais non loin de oy; de cette façon le dénominateur n'est pas trop grand et il varie assez lentement pour les valeurs moyennes de ω.

Tout ce que nous venons de dire s'applique à une solution particulière de

l'équation, savoir :

$$\frac{x}{r\mathrm{J}_0} = \frac{\mathrm{MM}'\omega}{\mathrm{Q}(\omega)},$$

d'où

$$x = \frac{\mathrm{MM}'\omega}{\mathrm{Q}(\omega)} \mathrm{A}\, e^{\omega t}.$$

On sait qu'en réalité le phénomène présente une période variable ; le son commence à l'instant $t = 0$ et à partir de ce moment on a :

$$r\mathrm{J}_0 = \mathrm{A}\, e^{\omega t}$$

ou plus généralement

$$r\mathrm{J}_0 = \Sigma\, \mathrm{A}\, e^{\omega t}.$$

Pour étudier la période variable il faut connaître la solution générale de l'équation différentielle en x.

Cette solution est de la forme :

$$x = \sum \frac{\mathrm{MM}'\omega}{\mathrm{Q}(\omega)} \mathrm{A}\, e^{\omega t} \ldots \Sigma\, \mathrm{B}_k\, e^{\omega_k t},$$

le premier signe Σ s'étendant à tous les termes dont se compose l'expression de $r\mathrm{J}_0$, et le deuxième signe Σ s'appliquant aux quatre racines de l'équation caractéristique, qui définit les périodes propres du système.

On détermine les constantes B en écrivant que, pour $t = 0$, on a

$$x = x' = i = j = 0.$$

On sait qu'il y a intérêt à ce que ces termes parasites disparaissent le plus vite possible, et cela dépend de l'amortissement.

IV. — **Étude des coefficients constants des équations différentielles.**

Les coefficients qui entrent dans les équations précédentes ne sont pas en réalité constants ; nous allons montrer dans ce qui suit, qu'ils dépendent de certaines conditions dont jusqu'à présent nous n'avons point tenu compte.

Dans ce qui va suivre nous prendrons comme unité de résistance l'ohm, et comme unité de self-induction le millihenry. On voit immédiatement qu'il faut, pour avoir un système cohérent, prendre pour unité de temps 1/1000e de seconde.

a. Étude des coefficients de self et de résistance. — M. Devaux-Charbonnel a mesuré la résistance et la self d'un appareil Ader. Il a obtenu les résultats suivants :

Récepteur	Résistance courant continu...	140 Ω
	» alternatif.	272 Ω, fréquence 1000
	Self-induction	24 mH
Circuit primaire du microphone (secondaire ouvert).	Résistance courant continu...	1,5 Ω
	» alternatif.	13 Ω, fréquence 1000
	Self-induction	8 mH
Circuit secondaire du microphone (primaire ouvert).	Résistance courant continu.....	154 Ω
	» alternatif...	430 Ω, fréquence 1000
	Self-induction	400 mH
Circuit secondaire du microphone primaire fermé sur 10 Ω	Résistance courant alternatif...	670 Ω, fréquence 1000
	Self-induction	35 mH

On peut faire sur ce tableau les remarques suivantes :

1° La valeur de la résistance d'une bobine dépend essentiellement de la fréquence du courant qui y passe; c'est ainsi que la résistance du récepteur Ader, par exemple, varie de 140 à 272 Ω lorsque la fréquence du courant qui la traverse varie de 0 à 1 000.

Cela tient essentiellement aux courants de Foucault qui se forment dans les masses métalliques de la bobine et qui, lorsque le courant atteint la fréquence 1 000, développent une chaleur Joule équivalente à celle que produirait une résistance de 132 Ω.

2° La résistance et la self-induction du secondaire du microphone varient suivant que le primaire est ouvert ou fermé.

Le calcul suivant va montrer que ces variations sont essentiellement dues à la présence d'une induction mutuelle du primaire et du secondaire.

Soient en effet L et R la self-induction et la résistance du circuit secondaire, lorsque le primaire est ouvert.

On peut écrire :

$$L = L' + L'', \qquad R = R' + R''$$

en appelant L' et R' les mêmes coefficients relatifs au récepteur; et L'', R'' ceux du secondaire du transmetteur. Lorsque le primaire est fermé, les coefficients mesurés sur le secondaire sont

$$L_1 < L'', \qquad R_1 > R'';$$

L_1 et R_1 sont la self et la résistance apparentes du secondaire, que nous nous proposons précisément de calculer en fonction de L'' et R''.

Désignons par M l'induction mutuelle des deux circuits, par i et j les courants dans le secondaire et dans le primaire : nous les supposerons sinusoïdaux ou, si l'on veut, proportionnels à $e^{\omega t}$, ω étant une imaginaire pure ; soit enfin E la force électromotrice alternative aux bornes du secondaire. La théorie bien connue des courants alternatifs donne les deux équations suivantes :

$$(L''\omega + R'')i + M\omega j = E \quad \text{(secondaire)},$$
$$M\omega i + (N\omega + S)j = 0 \quad \text{(primaire)};$$

N et S sont la self et la résistance du primaire, fermé sur 10 Ω et ne contenant aucune force électromotrice.

On tire de ces deux équations :

$$\frac{E}{i} = L''\omega + R'' - \frac{M^2\omega^2(S - N\omega)}{S^2 - N^2\omega^2}.$$

Or, si l'on avait mesuré sans précaution la self et la résistance apparente du secondaire du microphone, on aurait trouvé :

$$\frac{E}{i} = L_1\omega + R_1$$

d'où

$$L_1\omega + R_1 = L''\omega + R'' - \frac{M^2\omega^2(S - N\omega)}{S_2 - N^2\omega^2}.$$

Comme nous l'avons dit ω est une imaginaire pure, et il vient par suite, en égalant les parties imaginaires et les parties réelles :

$$L_1 = L'' - \frac{M^2}{N - \dfrac{S^2}{N\omega^2}},$$

$$R_1 = R'' - \frac{M^2\omega^2 S}{S^2 - N^2\omega^2}.$$

Or : $\omega^2 > 0$. Par suite

$$L_1 < L''. \qquad R_1 > R''.$$

Donc la présence d'une induction mutuelle produit une diminution apparente de la self-induction et une augmentation apparente de la résistance.

Finalement nous prendrons dans nos calculs

$$L = L' + L'' = 24 + 400 = 424.$$
$$N = 8.$$
$$R = R' + R'' = 272 + 670 = 942.$$
$$M = \sqrt{L'' \times N} = 56.$$

L'hypothèse $M^2 = L''.N$ correspondrait au cas où le transformateur du microphone n'aurait pas de fuite magnétique, cas qui est à peu près réalisé.

b. Détermination de la masse de la plaque vibrante. — Il ne serait pas exact de prendre pour m la masse même de la plaque vibrante. Soit en effet u le déplacement d'un point quelconque de la plaque; u est une fonction de la distance de ce point au centre. La force vive est :

$$\frac{1}{2} \Sigma \mu u'^2,$$

μ étant l'élément de masse dont la vitesse est u'.

Le déplacement du centre étant x, on a $x' > u'$. Donc si nous représentons la force vive par $\frac{1}{2} m x'^2$ il faut nécessairement que $m < \Sigma\mu$.

Pour avoir l'expression exacte de la force vive, il faudrait trouver l'expression de u en fonction de r. La théorie de l'élasticité enseigne que cette fonction peut être déterminée par l'équation :

$$\Delta\Delta u = ku$$

et sur le pourtour, où la plaque est encastrée, on a les équations aux limites

$$u = 0, \qquad \frac{du}{dr} = 0.$$

On a ainsi une équation du quatrième ordre.

On est amené à prendre

$$m = \frac{1}{5} \Sigma\mu.$$

Si on suppose que la masse totale de la plaque est de 5^g, nous prendrons $m = 1^g$.

c. Détermination des coefficients k et M'. — Ces deux coefficients ont été déterminés par M. Abraham.

Pour mesurer k, on note la flexion d'une plaque encastrée et l'on trouve qu'un poids de 75^g produit une flexion de $250\,\mu$.

Or nous avons vu que la première des équations de Maxwell appliquée au téléphone était :

$$mx'' + Fx' + kx - M'i = \Phi.$$

Dans l'expérience actuelle elle se réduit à

$$kx = \Phi,$$

$$k = \frac{\Phi}{x} = \frac{75 \times 10^3}{25 \times 10^{-3}} = 3 \times 10^6 \text{ C. G. S.}$$

Or, dans le système d'unités que nous avons adopté on prend pour unités fondamentales le gramme-masse, l'ohm et le millihenry. Nous avons déjà dit que l'unité de temps dans ce système valait $0^s,001$: en effet, l'unité de résistance n'étant pas changée, et ses dimensions étant LT^{-1}, puisque l'unité de longueur (millihenry) est 1000 fois plus petite que dans le système pratique, il en est de même de l'unité de temps.

De plus dans le système pratique l'unité de longueur (henry) vaut 10^9 C. G. S.; donc, dans celui-ci, elle vaut 10^6 C. G. S. Il résulte de ces remarques que k ayant pour dimensions MT^{-2}, sera mesuré par un nombre 10^6 fois plus petit qu'en unités C. G. S.

Donc, dans notre système, $k = 3$.

Quant à M' on le mesure en faisant passer un courant continu de 0,01 A dans la bobine, et on trouve un déplacement de 1^μ.

Or, nous avons vu que dans le circuit l'équation de Maxwell était :

$$(m\omega^2 + F\omega + k)x = M'i.$$

Le courant étant continu $\omega = 0$, et par suite

$$M' = \frac{kx}{i} = \frac{3 \times 10^6 \times 10^{-4}}{10^{-3}} = 0,3 \times 10^6 \text{ C. G. S.}$$

et d'après ce qui précède, M' étant une longueur sera mesuré dans notre système par le nombre $M' = 0,3$.

L'appareil de M. Abraham avait une résistance de $13\,\Omega$; notre récepteur à $140\,\Omega$ soit environ 10 fois plus. Nous admettrons que dans notre récepteur le coefficient M' eut été 10 fois plus grand et nous prendrons ici $M' = 3$. Nous pouvons maintenant écrire l'équation numérique à laquelle nous arrivons :

$$(m\omega^2 + F\omega + k)[(L\omega + R)(N\omega + S) - M^2\omega^2] + M'^2\omega(N\omega + S) = 0.$$

La résistance du primaire fermé sur 10Ω est : $S = 23$ et en négligeant le terme $F\omega$, il vient en chiffres ronds :

$$(\omega^2 + 3)[480\omega^2 + 17\,288\,\omega + 21\,666] + 9\omega(8\omega + 23) = 0.$$

Il ne faut pas oublier du reste que ces coefficients dépendent de ω.

Cas de deux récepteurs et de deux transmetteurs. — Nous allons voir que dans ce cas il n'y a rien de changé.

Nous introduirons deux variables de plus, savoir : le déplacement du centre de la plaque vibrante du deuxième récepteur, soit x_1 et le courant dans le primaire du deuxième transmetteur, soit J_1.

Les deux appareils sont identiques de sorte que l'on peut poser comme précédemment, pour ce deuxième transmetteur :

$$J_1 = J_0 + j_1 \quad \text{et} \quad R_1 = S + r_1,$$

S étant la résistance moyenne, la même pour les primaires des deux microphones.

La self de la ligne devient $2L$; la résistance est $2R$ et on obtient les équations :

$$(m\omega^2 + F\omega + k)x = M'i = (m\omega^2 + F\omega + k)x_1 \quad \text{(récepteurs)},$$

$$2(L\omega + R)i + M'\omega(x + x_1) + M\omega(j + j_1) = 0 \quad \text{ligne et secondaires},$$

$$\left.\begin{aligned}(N\omega + S)j + M\omega i &= -r\,J_0\\ (N\omega + S)j_1 + M\omega i &= -r_1 J_0\end{aligned}\right\} \text{(primaires)}.$$

On déduit de ce système :

$$x = x_1$$

De plus en introduisant les variables

$$\frac{j + j_1}{2} \quad \text{et} \quad \frac{r + r_1}{2},$$

on retombe sur un système de même forme que celui obtenu dans le cas précédent et on en tire :

$$\frac{MM'\omega}{Q(\omega)} = \frac{x}{J_0 \dfrac{r + r_1}{2}}.$$

Comme en général, il n'y a qu'un appareil qui fonctionne, on peut faire $r_1 = 0$ et on voit que x est divisé par 2.

Détermination théorique des coefficients k et M'. — Le coefficient k est relatif à l'attraction exercée sur la plaque lorsque aucun courant ne passe dans la bobine : cette force qui agit sur la plaque se compose de deux termes : force d'attraction du noyau, force produite en vertu de l'élasticité de la plaque.

La deuxième force a une expression de la forme :

$$(k_0 + k_1 x).$$

Quant à la première, ce sera

$$H^2 \varphi(x),$$

H étant le champ dû à l'aimant permanent.

Comme x est toujours petit, cette deuxième force a pour expression suffisamment approchée :

$$H^2 \varphi(o) + x H^2 \varphi'(o).$$

Pour $x = o$ le système est en équilibre ; par suite

$$k_0 + H^2 \varphi(o) = o.$$

Le coefficient k est donc de la forme :

$$k = k_1 + H^2 \varphi'(o).$$

Comme l'attraction augmente lorsqu'on se rapproche de l'aimant on a nécessairement :

$$\varphi'(o) < o.$$

D'autre part on a évidemment : $k_1 > o$ et comme on a vu que la stabilité du mouvement exige que $k > o$ on en conclut que $\varphi'(o)$ ne doit pas être trop fort.

Quant au coefficient M′ il y aurait évidemment intérêt à l'augmenter ; lorsque le courant passe, le champ devient : $H + H_1 i$, et l'attraction est

$$(H + H_1 i)^2 \varphi(x).$$

Le terme Mi qui représente l'attraction exercée par le courant sur la plaque vibrante est ici

$$M' i = 2 H H_1 \varphi(o) \times i$$

et

$$M' = 2 H H_1 \varphi(o).$$

Donc pour augmenter M′, il faut augmenter le champ permanent H ; mais on ne peut l'augmenter indéfiniment, car si l'on approche de la saturation, un courant donné i augmente très peu le champ, ce qui revient à dire que H_1 diminue.

Ce champ H_1 augmente avec le nombre des spires de la bobine, mais on augmente en même temps R et L, ce qui justifie l'assertion avancée plus haut,

que M' croît proportionnellement à R. Quant à $\varphi(o)$ il y aurait intérêt à l'augmenter, c'est-à-dire à diminuer l'entrefer; mais on ne peut trop le réduire car $\varphi(x)$ varierait très vite au voisinage de $x = o$; par suite $\varphi'(o)$ serait très grand et nous avons vu plus haut que cela peut avoir des inconvénients.

Remarque sur l'équation caractéristique. — Nous nous sommes servis pour établir l'équation numérique en ω des valeurs réelles de L et de R. On peut modifier cette équation et se servir des valeurs apparentes de la self et de la résistance du secondaire.

Reprenons en effet l'équation :

$$(m\omega^2 + F\omega + k)[(N\omega + S)[(L' + L'')\omega + (R' + R'')] - M^2\omega^2] + M'^2\omega(N\omega + S) = o.$$

On a vu que

$$L'' = L_1 + \frac{M^2 N\omega^2}{N^2\omega^2 - S^2},$$

$$R'' = R_1 - \frac{M^2\omega^2 S}{N^2\omega^2 - S^2},$$

d'où l'équation

$$(m\omega^2 + F\omega + k)\Big[(N\omega + S)[(L' + L_1)\omega$$
$$+ (R' + R_1)] + (N\omega + S)M^2\omega^2\frac{N\omega - S}{N^2\omega^2 - S^2} - M^2\omega^2\Big] + \ldots = o$$

qui se réduit en négligeant le terme Fω à :

$$(m\omega^2 + k)[(L' + L_1)\omega + (R' + R_1)] + M^2\omega = o.$$

Si maintenant nous substituons les valeurs trouvées précédemment, il vient :

$$(\omega^2 + 3)[(24 + 36)\omega + (272 + 670)] + 9\omega = o$$

ou

$$(\omega^2 + 3)(60\omega + 942) + 9\omega = o.$$

Les deux racines imaginaires de cette équation sont voisines de $\pm\sqrt{-3}$.

V. — Théorie des courants de Foucault.

D'après ce que nous avons dit, ces courants semblent jouer un rôle important dans le fonctionnement des appareils.

Nous distinguerons les courants qui se ferment dans le noyau et ceux qui se ferment dans la plaque.

I. — Section circulaire.

A. — *Courants dans le noyau de l'électro-aimant.*

Nous assimilerons la bobine à un solénoïde indéfini ou à un tore dont le rayon serait grand vis-à-vis du rayon du cercle générateur. On sait que, i étant le courant qui circule autour de ces noyaux, le champ d'induction magnétique à l'intérieur est constant et sa valeur est :

$$H_1 = 4\pi\mu k i.$$

μ est la perméabilité magnétique, et ki représente le nombre d'ampère-tours par millimètre de longueur, ce qui fait que H est exprimé en unités C. G. S.

Si maintenant nous supposons i variable, il se produit à l'intérieur de la masse métallique des courants de Foucault; soit $j\,dr$ le courant de Foucault mesuré en ampères, circulant dans un espace compris entre deux circonférences concentriques à l'axe du solénoïde de rayons r et $r + dr$ et ayant un millimètre de hauteur.

Le champ dû à ce courant et régnant dans cet espace est :

$$H_2 = 4\pi\mu j\,dr$$

La constante k est ici égale à 1, car on peut dire qu'il n'y a qu'une spire sur une longueur de 1mm.

Le champ total est donc en C. G. S. à la distance r de l'axe :

$$H = H_1 + H_2 = 4\pi\mu k i + 4\pi\mu \int_r^{r_0} j\,dr,$$

r_0 étant le rayon du noyau

$$\frac{dH}{dr} = -4\pi\mu j.$$

Quant au flux qui traverse la circonférence de rayon r, il est égal à :

$$2\pi \int_0^r Hr\,dr,$$

car $2\pi r\,dr$ est la surface d'une couronne infiniment petite comprise entre les cercles de rayons r et $r + dr$.

La force électromotrice d'induction est la dérivée du flux par rapport au

temps : si nous admettons qu'il est proportionnel à $e^{\omega t}$, sa dérivée est

$$2\pi\omega\int_0^r \mathrm{H}\, r\, dr.$$

Si nous écrivons que la force électromotrice est égale au produit de la résistance par l'intensité, nous aurons une deuxième relation entre j, H, et r.

Or le courant est $j\,dr$ exprimé en ampères.

La longueur du circuit étant $2\pi r$, sa hauteur 1^{mm}, et sa largeur dr, si C est la conductibilité, la résistance de ce circuit infiniment mince est

$$\frac{2\pi r}{\mathrm{C}.\,dr.\,1^{mm}},$$

d'où l'égalité

$$2\pi r.\,j.\,dr = 2\pi\mathrm{C}\,dr.\,\omega\int_0^r \mathrm{H}\, r\, dr$$

ou

$$jr = \mathrm{C}\omega\int_0^r \mathrm{H}\, r\, dr$$

ou

$$\frac{d(jr)}{dr} = \mathrm{C}\omega\mathrm{H}r.$$

On a donc les deux relations

$$\frac{d\mathrm{H}}{dr} = -4\pi\mu j,$$

$$\frac{d(jr)}{dr} = \mathrm{C}\omega\mathrm{H}r,$$

d'où en multipliant la première par r et différentiant :

$$r\frac{d^2\mathrm{H}}{dr^2} + \frac{d\mathrm{H}}{dr} = -4\pi\mu\frac{d}{dr}(jr) = -4\pi\mu\mathrm{C}\omega\mathrm{H}r$$

ou

$$\frac{d^2\mathrm{H}}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\mathrm{H}}{dr} + \alpha^2\mathrm{H} = 0,$$

avec

$$\alpha^2 = 4\pi\mu\mathrm{C}\omega.$$

Cette équation n'est autre que l'équation de Bessel, car on revient à la forme connue en posant

$$r = \frac{x}{\alpha},$$

ce qui donne :

$$\frac{d^2\mathrm{H}}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{d\mathrm{H}}{dx} + \mathrm{H} = 0.$$

Cette équation admet comme solution celle des fonctions de Bessel que l'on désigne habituellement par J_0 d'où

$$H = J_0(\alpha r).$$

Mais α^2 est une imaginaire pure comme ω; donc α est imaginaire et son argument est égal à 45°. Les formules de Bessel s'appliquent d'ailleurs dans ce cas.

On peut voir sur l'équation elle-même que si α est très grand, on a sensiblement $H = 0$, c'est-à-dire que le champ se trouve à la surface du noyau; si au contraire $\alpha = 0$, le champ est constant à l'intérieur du noyau.

Par exemple pour la fréquence 1000, on a

$$\omega = 2\pi . 10^3 \sqrt{-1}.$$

Si on prend

$$\left.\begin{array}{l} C = 10^{4} \\ \mu = 10 \end{array}\right\} \text{ en C. G. S.,}$$

il vient :

$$4\pi\mu C\omega = 80\sqrt{-1}.$$

II. — Noyau de forme quelconque.

Nous assimilerons encore le noyau à un solénoïde indéfini, mais de section quelconque; les lignes de force sont parallèles à une certaine direction que nous prendrons pour axe des z.

Soient u, v, w les composantes du courant suivant les trois axes; on a évidemment : $w = 0$.

Pour retrouver les relations entre le champ et le courant, nous appliquerons l'égalité :

$$\mathfrak{T} = 4\pi I.$$

$\mathfrak{T}$ étant le travail d'une masse magnétique égale à 1 le long d'un circuit traversé pendant l'unité de temps par une quantité d'électricité égale à I.

Appliquons la formule à un rectangle infiniment petit dont les côtés sont parallèles aux axes ox et oz (*fig.* 4).

On a :

$$\mathfrak{T}_{AB} = -H\,dz,$$

$$\mathfrak{T}_{CD} = \left(H + \frac{\partial H}{\partial x}\,dx\right)dz,$$

$$\mathfrak{T}_{BC} = \mathfrak{T}_{DA} = 0.$$

D'autre part si nous assimilons le rectangle à un feuillet magnétique dont la face positive serait en avant, la quantité d'électricité qui y passe pendant l'unité

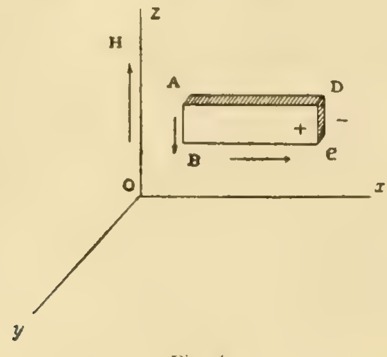


Fig. 4.

est, avec les conventions ordinaires de signe,

$$I = -v\,dx\,dz,$$

d'où enfin :

$$\frac{\partial H}{\partial x} = -4\pi v.$$

Dans cette formule H représente, par définition, le champ magnétique en un point du noyau; si nous voulons qu'il représente le champ d'induction, il faut multiplier le résultat par μ et finalement on a :

(1) $$\frac{\partial H}{\partial x} = -4\pi\mu v.$$

On trouverait de même, le long d'un rectangle de côtés dz et dy :

(2) $$\frac{\partial H}{\partial y} = 4\pi\mu u.$$

Ceci posé, soit un contour quelconque dans le plan des xy. Le flux d'induction qui le traverse est :

$$\int H\,d\sigma,$$

H étant le champ d'induction à l'intérieur de l'élément d'aire $d\sigma$.

La force électromotrice d'induction qui est la dérivée par rapport au temps du flux est :

$$\omega \int H\,d\sigma$$

en supposant encore toutes les quantités proportionnelles à $e^{\omega t}$.

Écrivons que dans ce circuit on a :

$$\mathrm{E} = \mathrm{RI}.$$

Or, si C est la conductibilité, on sait que :

$$\mathrm{RI} = \frac{1}{\mathrm{C}}\int (u\,dx + v\,dy) = \frac{1}{\mathrm{C}}\iint \left(\frac{dv}{dx} - \frac{du}{dy}\right) d\sigma,$$

d'où l'on tire :

$$\frac{dv}{dx} - \frac{du}{dy} = \mathrm{C}\omega\mathrm{H}$$

et en se servant des équations (1) et (2)

$$\Delta\mathrm{H} = -4\pi\mu\left(\frac{dv}{dx} - \frac{du}{dy}\right) = -4\pi\mu\mathrm{C}\omega\mathrm{H}.$$

Donc H est solution de l'équation :

$$\Delta\mathrm{H} + \alpha^2\mathrm{H} = 0$$

en posant

$$\alpha^2 = 4\pi\mu\mathrm{C}\omega.$$

Pour intégrer, il faut établir les conditions aux limites.

Or, le courant est tangent à la surface du noyau, ce qui donne dans le cas de notre noyau cylindrique

$$\frac{u}{v} = \frac{dx}{dy}$$

ou

$$u\,dy - v\,dx = 0,$$

$$\frac{\partial\mathrm{H}}{\partial y}dy + \frac{\partial\mathrm{H}}{\partial x}dx = 0$$

ou

$$\mathrm{H} = \text{const.}$$

à la surface du noyau.

Cette valeur constante est d'ailleurs celle qui se rencontrerait s'il n'y avait pas de courants de Foucault : c'est le champ qui régnerait à l'intérieur d'une bobine dont le noyau serait une matière non conductrice de perméabilité μ. Nous l'avons appelé : $4\pi\mu\mathrm{K}i$.

Cas particulier. — Nous avons déterminé H quand le noyau était circulaire ; supposons maintenant la section rectangulaire et limitée par quatre droites d'équations

$$x = \pm a, \qquad y = \pm b.$$

Pour trouver H nous partirons des deux identités :

$$1 = \frac{4}{\pi}\sum \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{m}\cos\frac{m\pi x}{2a},$$

$$1 = \frac{4}{\pi}\sum \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n}\cos\frac{n\pi y}{2b},$$

Ces deux identités se démontrent facilement par la formule de Fourier, en cherchant le développement en série trigonométrique d'une fonction qui reste égale à 1 lorsque la variable reste comprise entre deux limites égales et de signe contraire :

$$-a < x < a \quad \text{ou} \quad -b < y < b.$$

Dans ces formules m et n prennent des valeurs impaires et positives.

Il résulte de là qu'en multipliant ces deux séries, on arrive à une nouvelle identité :

$$1 = \frac{16}{\pi^2}\sum \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}+\frac{n-1}{2}}}{m.n}\cos\frac{m\pi x}{2a}\cos\frac{n\pi y}{2b}.$$

Ceci posé, si nous prenons

$$H = 1 + \frac{16}{\pi^2}\sum \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}+\frac{n-1}{2}}}{m.n}\,\frac{\alpha^2}{\frac{m^2\pi^2}{4a^2}+\frac{n^2\pi^2}{4b^2}-\alpha^2}\cos\frac{m\pi x}{2a}\cos\frac{n\pi y}{2b},$$

il est facile de voir que H satisfait bien aux conditions demandées.

En effet :

$$\frac{d^2H}{dx^2} = \frac{16}{\pi^2}\sum \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}+\frac{n-1}{2}}}{m.n}\times\frac{-\frac{m^2\pi^2}{4a^2}\alpha^2}{\frac{m^2\pi^2}{4a^2}+\frac{n^2\pi^2}{4b^2}-\alpha^2}\cos\frac{m\pi x}{2a}\cos\frac{n\pi y}{2b}.$$

De même :

$$\frac{d^2H}{dy^2} = \frac{16}{\pi^2}\sum \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}+\frac{n-1}{2}}}{m.n}\times\frac{-\frac{n^2\pi^2}{4b^2}\alpha^2}{\frac{m^2\pi^2}{4a^2}+\frac{n^2\pi^2}{4b^2}-\alpha^2}\cos\frac{m\pi x}{2a}\cos\frac{n\pi y}{2b},$$

d'où enfin :

$$\Delta H + \alpha^2 H = \frac{16}{\pi^2}\sum \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}+\frac{n-1}{2}}}{m.n}\times\frac{\left(-\frac{m^2\pi^2}{4a^2}-\frac{n^2\pi^2}{4b^2}+\alpha^2\right)\alpha^2}{\frac{m^2\pi^2}{4a^2}+\frac{n^2\pi^2}{4b^2}-\alpha^2}\cos\frac{m\pi x}{2a}\cos\frac{n\pi y}{2b}+\alpha^2$$

ou

$$-\frac{16}{\pi^2}\sum \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}+\frac{n-1}{2}}}{m.n} \cdot \alpha^2 \cdot \cos\frac{m\pi x}{2a}\cos\frac{n\pi y}{2b} + \alpha^2 = 0$$

en vertu de l'identité précédemment décrite. Donc H satisfait bien à l'équation aux dérivées partielles proposée.

En outre, on voit immédiatement que

$$H = 1 \quad \text{pour} \quad x = a \quad \text{ou} \quad y = b,$$

car chaque terme de la série s'annule.

Grandes fréquences. — Lorsque le noyau a une section de forme compliquée on arrive à des calculs inextricables. Mais lorsque α^2 est grand, c'est-à-dire dans le cas des courants de haute fréquence, on peut appliquer à un noyau de forme quelconque une formule approchée.

Remarquons d'abord que le champ H étant supposé périodique, on a :

$$H = H_1 + H_2\sqrt{-1}$$

le module de H représentant, suivant les conventions habituelles, l'amplitude du champ et l'argument représentant la phase; en outre α^2 est imaginaire et on peut poser :

$$\alpha^2 = \beta\sqrt{-1},$$

d'où on tire, en vertu de l'équation aux dérivées partielles :

$$\Delta H_1 = \beta H_2, \qquad \Delta H_2 = \beta H_1.$$

Ces notations étant admises, je dis que le module de H est à l'intérieur du noyau toujours plus petit que sur la surface : en effet, soit :

$$P = H_1^2 + H_2^2.$$

On trouve facilement en différentiant deux fois :

$$\Delta P = 2H_1\,\Delta H_1 + 2H_2\,\Delta H_2 + 2\left(\frac{\partial H_1}{dx}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial H_1}{dy}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial H_2}{dx}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial H_2}{dy}\right)^2$$

et en tenant compte des valeurs précédemment trouvées pour ΔH_1 et ΔH_2,

$$\Delta P = 2\left[\left(\frac{\partial H_1}{dx}\right)^2 + \left(\frac{\partial H_1}{dy}\right)^2 + \left(\frac{\partial H_2}{dx}\right)^2 + \left(\frac{\partial H_2}{dy}\right)^2\right] > 0.$$

Cette condition montre que P ne peut avoir de maximum à l'intérieur du noyau, car si cette fonction était maxima en un certain point, on pourrait autour de ce point décrire une sphère suffisamment petite pour qu'en chaque point de sa surface on ait

$$\frac{dP}{dn} < 0,$$

la dérivée étant prise suivant la normale extérieure et par suite l'intégrale suivant la surface sphérique serait

$$\iint \left(\frac{dP}{dn}\right) d\sigma \quad 0.$$

mais cela est impossible car en vertu de la formule de Green, on a

$$\iint_S \left(\frac{dP}{dn}\right) d\sigma = \iiint_V \Delta P \, dx \, dy \, dz,$$

l'intégrale triple étant prise à l'intérieur du volume de la sphère et étant évidemment positive.

Comme cependant il y a dans le noyau une valeur de H plus grande que toutes les autres, cette valeur ne peut se rencontrer que sur la surface du noyau, et l'on voit en passant que le champ à l'intérieur est moindre que celui qui régnerait s'il n'y avait pas de courants de Foucault.

Il est maintenant facile d'obtenir une équation approchée.

Considérons un point de la surface et prenons pour axe ox, la normale intérieure au noyau; l'axe oz est la génératrice passant par ce point, et par suite oy n'est autre que la tangente à la section droite du noyau cylindrique. Soit une région intérieure au noyau, située dans le voisinage de ce point : en tout point de cette région, le champ satisfait à l'équation :

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} + \alpha^2 H = 0.$$

Si tous ces points sont suffisamment rapprochés du point de la surface pris pour origine des coordonnées, les quantités

$$\frac{\partial H}{\partial x} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 H}{\partial x^2}$$

varient très rapidement quand α est très grand, car le champ est alors très faible à l'intérieur du noyau; au contraire les quantités

$$\frac{\partial H}{\partial y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 H}{\partial y^2}$$

restent finies. On peut donc écrire l'équation approchée

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \alpha^2 H = 0,$$

équation valable pour des points infiniment voisins de la surface du noyau.

Cette équation s'intègre immédiatement et admet pour solution :

$$H = A e^{\alpha x \sqrt{-1}} + B e^{-\alpha x \sqrt{-1}},$$

A et B étant des constantes par rapport à x, mais fonctions de y. Supposons pour fixer les idées, que le signe de α soit tel que la partie réelle de $\alpha\sqrt{-1}$ soit négative; la partie réelle du deuxième terme est alors positive, et comme α est grand, ce terme croît très rapidement, et H peut devenir plus grand pour une certaine valeur de x que sur la surface. Or cela est impossible; il faut donc que B soit très petit devant A et finalement on peut écrire :

$$H = A e^{\alpha x \sqrt{-1}},$$

d'où

$$\frac{\partial H}{\partial n} = \alpha\sqrt{-1}\, H.$$

Nous aurons ainsi des équations analogues pour tous les points infiniment voisins de la surface du noyau, en prenant chaque fois comme axe ox la normale aux différents points de la surface.

A la limite, nous pourrons écrire l'équation :

$$\frac{\partial H}{\partial x} = \alpha\sqrt{-1}\, H$$

applicable à tous les points de la surface du noyau. C'est l'équation approchée que nous avions en vue d'établir.

Dans le cas d'un noyau circulaire on aurait l'équation :

$$\frac{\partial H}{\partial r} = \alpha H \sqrt{-1}.$$

On trouverait pour H une fonction exponentielle de r qui, on le sait, est une valeur asymptotique des fonctions de Bessel.

Influence des courants de Foucault sur les coefficients de l'appareil.

1° *Coefficient* M'. — Nous avons vu un peu plus haut que l'attraction du noyau sur la plaque était

$$H^2 \varphi(x),$$

H étant le champ total, et de là on tirait le coefficient M′. Cette formule supposait essentiellement le champ H constant ; s'il n'en est pas ainsi, l'attraction de la plaque à une distance donnée est proportionnelle à l'intégrale

$$\int (H_0 + H)^2 \, d\sigma,$$

H_0 étant le champ d'induction dû à l'aimantation permanente, et H celui dû à un courant i.

Par suite le coefficient M′, d'après ce que nous avons dit plus haut, est proportionnel à l'intégrale de surface

$$\int H_0 \times H \, d\sigma,$$

le champ de cette intégrale étant l'aire de la section droite du noyau cylindrique.

Si nous supposons que le champ permanent est uniforme, le coefficient M′ est alors proportionnel à

$$\int H \, d\sigma.$$

Or nous avons vu que la loi d'Ohm appliquée à la force électromotrice d'induction, donnait la relation

$$\omega \int_S H \, d\sigma = \frac{1}{C} \int_L (u \, dx + v \, dy),$$

l'intégrale curviligne étant prise suivant la courbe de section droite tracée sur le noyau, et comme

$$u = \frac{1}{4\pi\mu} \frac{\partial H}{\partial y},$$

$$v = -\frac{1}{4\pi\mu} \frac{\partial H}{\partial x},$$

il vient :

$$\int_S H \, d\sigma = \int_L \left(\frac{\partial H}{\partial y} dx - \frac{\partial H}{\partial x} dy \right) \frac{1}{4\pi\mu C\omega}.$$

Or, sur une courbe quelconque, θ étant l'angle de la tangente avec ox, on a :

$$dx = ds \cos\theta, \qquad dy = ds \sin\theta$$

d'où :

$$\frac{\partial H}{\partial y} dx - \frac{\partial H}{\partial x} dy = \frac{\partial H}{dn} ds,$$

$\frac{dH}{dn}$ étant la dérivée par rapport à la normale extérieure à la courbe. Ici la nor-

male à cette courbe de section droite, n'est autre que la normale à la surface cylindrique et on peut écrire en vertu de l'équation trouvée précédemment

$$\int_S \mathrm{H}\, d\sigma = \int_1 \frac{d\mathrm{H}}{dn} ds \times \frac{1}{\alpha^2} = \int_1 \mathrm{H}\sqrt{-1}\frac{ds}{\alpha},$$

car

$$\frac{d\mathrm{H}}{dn} = \alpha \mathrm{H}\sqrt{-1}$$

et comme sur la surface on a :

$$\mathrm{H} = \text{const.},$$

$$\int_S \mathrm{H}\, d\sigma = \frac{s\mathrm{H}\sqrt{-1}}{\alpha},$$

s est le périmètre du noyau.

On a, à un facteur près, la valeur de M'.

S'il n'y avait pas de courants de Foucault, le champ serait uniforme et sa valeur serait :

$$\int_S \mathrm{H}\, d\sigma = \mathrm{H}\sigma,$$

σ étant l'aire de la section du noyau.

Le rapport entre les deux coefficients M' que l'on obtient dans ces deux cas est donc :

$$\frac{s\mathrm{H}\sqrt{-1}}{\alpha \mathrm{H}\sigma} = \frac{s\sqrt{-1}}{\alpha . \sigma}.$$

Ce rapport est imaginaire, par suite cela revient à dire que l'effet des courants de Foucault est de décaler le champ par rapport aux oscillations de la membrane.

Ce décalage est d'ailleurs, puisque s et σ sont réels, la différence entre les arguments de $\sqrt{-1}$ et de α.

Or α^2 étant purement imaginaire, on a :

$$\arg \alpha^2 = \frac{\pi}{2}, \qquad \text{d'où} \qquad \arg \alpha = \frac{\pi}{4};$$

$$\arg \sqrt{-1} = \frac{\pi}{2}, \qquad \text{d'où} \qquad \arg \frac{s\sqrt{-1}}{\alpha\sigma} = \frac{\pi}{4}.$$

Quant au coefficient M', il est diminué dans le rapport

$$\frac{s}{\sigma . \alpha} = \frac{s}{\sigma\sqrt{8\pi^2\mu \mathrm{C} \times n}},$$

n étant la fréquence du courant.

Dans le cas actuel α n'est jamais extrêmement grand et cette formule est grossièrement approchée.

Nous avons supposé, dans tout ce qui précède, que le champ H_0 était constant; en réalité il n'en est pas ainsi. Le rapport entre les deux coefficients M' avec et sans courants de Foucault se trouve alors modifié et l'effet de ces courants peut être atténué.

5° *Coefficients* L *et* R. — Soient L' et R' la self-induction et la résistance vraies du cuivre de la bobine, et soit E la différence de potentiel aux bornes.

La loi fondamentale de l'induction

$$E = RI + \frac{d\Phi}{dt}$$

donne ici :

$$E = R'i + \omega \int H \, d\sigma.$$

S'il n'y avait pas de courants de Foucault, le flux passant à travers le noyau serait $L'i$ et on aurait :

$$E = R'i + \omega L'i.$$

Par l'effet des courants de Foucault, nous avons vu que le flux se trouve multiplié par

$$\frac{s\sqrt{-1}}{\alpha . \sigma}.$$

Cette quantité ayant un argument égal à $\frac{\pi}{4}$, on peut poser :

$$\frac{s\sqrt{-1}}{\alpha . \sigma} = \beta(1 + \sqrt{-1}),$$

d'où

$$E = R'i + \omega L'i \cdot \beta(1 + \sqrt{-1}).$$

Or si l'on pose :

$$E = R_1 i + L_1 \omega i,$$

R_1 et L_1 représenteront ce qu'on pourra appeler la résistance et la self *observées*.

En comparant ces deux expressions, et égalant les parties réelles et imaginaires, il vient :

$$R_1 = R' + \omega\sqrt{-1} . L'\beta,$$

$$L_1 = L'\beta.$$

Donc la self est multipliée par β, et par suite elle est diminuée puisque tout ceci suppose α très grand et par suite β très petit.

Comme vérification on remarque que :

$$R_1 = R - L_1 \omega \sqrt{-1}.$$

On a vu que :

$$R_1 = 272\,\Omega,$$

$$L = 24 \text{ mH},$$

$$R' = 140,$$

$$\omega \sqrt{-1} = \frac{2\pi}{T} = 2\pi.$$

car la période étant supposée égale à 1/1000e de seconde, on a vu que dans le système adopté, l'unité de temps était justement 0^s001.

On doit donc vérifier, si nos déductions sont exactes, la relation précédente, ce qui est à peu près vrai.

B. — *Courants dans la plaque.*

Nous allons maintenant étudier les courants de Foucault qui peuvent se produire dans la plaque vibrante.

L'amplitude des vibrations de cette plaque est très faible, et il doit en être de même des courants induits ; mais la chaleur produite par ces courants est de même ordre que le travail des forces qui produisent les vibrations, car cette chaleur et ce travail sont de l'ordre du carré de l'amplitude, de sorte que le rapport entre ces deux quantités est indépendant de cette amplitude.

Ceci posé, considérons notre plaque comme limitée par deux plans parallèles, indéfinis, et prenons pour axe ox la perpendiculaire à ces deux plans.

Si Ω est le potentiel magnétique de la plaque, les composantes de l'induction magnétique à l'intérieur sont :

$$\mu \frac{\partial \Omega}{\partial x}, \quad \mu \frac{\partial \Omega}{\partial y}, \quad \mu \frac{\partial \Omega}{\partial z}.$$

La vitesse de déplacement de la plaque a pour composantes x', 0, 0, et par suite les composantes de la force électromotrice qui donne naissance aux courants de Foucault sont :

$$0, \quad \mu x' \frac{\partial \Omega}{\partial z}, \quad -\mu x' \frac{\partial \Omega}{\partial y}.$$

et les composantes du courant lui-même sont, en négligeant la self-induction de ce courant de Foucault :

$$0, \quad \mu C x' \frac{\partial \Omega}{\partial z}, \quad -\mu C x' \frac{\partial \Omega}{\partial y}.$$

Il faudrait en réalité ajouter à ces trois composantes trois termes de la forme :

$$C \frac{\partial V}{\partial x}, \quad C \frac{\partial V}{\partial y}, \quad C \frac{\partial V}{\partial z},$$

V étant le potentiel électrique.

Mais le courant doit satisfaire à la condition solénoïdale, ce qui donne :

$$C \Delta V + \mu C x' \left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial z . \partial y} - \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y . \partial z} \right) = 0.$$

où

$$\Delta V = 0.$$

D'ailleurs sur les deux plans limitant la plaque, le courant est parallèle et par suite n'a pas de composantes suivant *ox*. Donc sur ces deux plans limites

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 0.$$

Par suite, d'après un théorème sur les fonctions harmoniques, cette fonction V reste constante à l'intérieur du volume limité par ces deux plans; comme d'ailleurs à l'infini elle est nulle, c'est qu'en tout point de la plaque, on a :

$$V = 0.$$

Donc, si C est exprimé en unités C. G. S., la chaleur produite est en ergs :

$$\mu^2 C x'^2 \, dt \int \left[\left(\frac{\partial \Omega}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Omega}{\partial z} \right)^2 \right] d\tau,$$

l'intégration étant étendue à toute la plaque.

Champ magnétique dans la plaque. — Pour pouvoir aller plus loin dans cette étude, il faut se faire une idée de la distribution magnétique à l'intérieur de la plaque.

Supposons le champ produit par un pôle magnétique A_0 de masse unité (*fig.* 5).

Soient

$$x = 0, \qquad x = a$$

les équations des deux plans limitant la plaque, et soit $-z$ la coordonnée du pôle A_0 : d'ailleurs comme ce pôle est hors de la plaque :

$$z > a.$$

Désignons par v_0 le potentiel magnétique qui serait dû au pôle A_0 s'il n'y avait pas de fer, et désignons par V le potentiel magnétique réel.

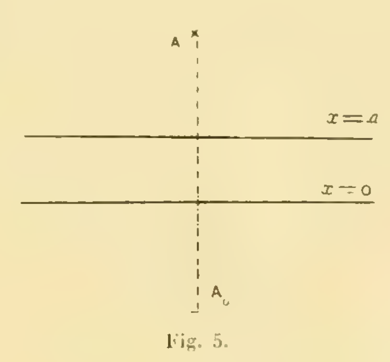


Fig. 5.

On a :

$$V \neq v_0$$

à cause précisément de la présence de la lame de fer. C'est cette fonction V que nous nous proposons de déterminer.

Nous emploierons pour cela la méthode dite des images.

Considérons les deux séries de points :

A_1	$x = +z.$	A_0	$x = -z.$
A_2	$x = 2a + z.$	A_{-1}	$x = -2a - z.$
A_3	$x = 4a + z.$	A_{-2}	$x = -4a - z.$
...	....	....	....
A_n	$x = 2(n-1)a + z;$	A_{-n}	$x = -2na - z.$

Il est évident que le point A_n est symétrique de A_{1-n} par rapport au plan $x = 0$ et qu'il est symétrique du point A_{2-n} par rapport au plan $x = a$.

Appelons v_i le potentiel dû à une masse unité, en l'absence de tout fer, située au point A_i.

A cause de la symétrie par rapport au plan $x = 0$, on a :

$$(1) \qquad \begin{cases} (v_n)_{x=0} = (v_{1-n})_{x=0}, \\ \left(\dfrac{dv_n}{dx}\right)_{x=0} = -\left(\dfrac{dv_{1-n}}{dx}\right)_{x=0}. \end{cases}$$

De même, à cause de la symétrie par rapport au plan $x = a$, on a :

(5)
$$\left\{ \begin{aligned} &(v_n)_{x=a} = (v_{2-n})_{x=a}, \\ &\left(\frac{dv_n}{dx}\right)_{x=a} = -\left(\frac{dv_{2-n}}{dx}\right)_{x=a}. \end{aligned} \right.$$

Désignons enfin plus particulièrement par

V_1 le potentiel magnétique dans la région $x < 0$,

V_2 » » $0 < x < a$,

V_3 » » $x > a$.

Je dis que :

$$V_1 = v_0 + \sum_{i=1}^{i=\infty} \alpha_i v_i,$$

$$V_2 = \sum_{i=1}^{i=\infty} \beta_i v_i + \sum_{i=0}^{i=\infty} \gamma_i v_{-i},$$

$$V_3 = \sum_{i=0}^{i=\infty} \delta_i v_{-i},$$

les α, β, γ, δ étant des constantes convenablement choisies.

En effet, à quelles conditions doit satisfaire le potentiel V produit par le pôle A_0 ?

1° V doit être une fonction continue ainsi que ses dérivées en tous les points de l'espace excepté en A_0 ;

2° En tout point de l'espace $\Delta V = 0$;

3° A l'infini on a $V = 0$;

4° Sur les surfaces de séparation des milieux, on doit avoir :

$$(V_1)_{x=0} = (V_2)_{x=0},$$

$$(V'_1)_{x=0} = \mu (V'_2)_{x=0} ;$$

$$(V_2)_{x=a} = (V_3)_{x=a},$$

$$(V'_3)_{x=a} = \mu (V'_2)_{x=a}.$$

(Ici V'_1 par exemple indique la dérivée de V_1 par rapport à x, etc.)

Les expressions que nous avons données relativement à V_1, V_2, V_3 satisfont-elles à ces conditions ?

1° Ces fonctions ne peuvent devenir infinies que si l'une des fonctions v le devient, et une fonction telle que v_i ne peut présenter de discontinuité qu'au pôle A_i.

Donc V_2 est continue dans la région $0 < x < a$ puisqu'il n'y a aucun pôle magnétique dans cette région. De même V_3 est continue dans toute la région $x > a$ puisque dans cette région il n'y a que des pôles $A_1, A_2, \dots, A_n$ et aucun des pôles $A_0, A_{-1}, A_{-2}, \dots$.

Enfin, pour la même raison, V_1 est continue en tous points de la région $x < 0$ sauf au point A_0.

Donc la fonction V est continue en tous les points de l'espace, ainsi que ses dérivées, excepté au point A_0.

2° En tout point de l'espace on a :

$$\Delta v_i = 0.$$

Donc

$$\Delta V_1 = 0, \quad \Delta V_2 = \Delta V_3 = 0$$

ou si l'on veut

$$\Delta V = 0.$$

3° A l'infini :

$$v_i = 0.$$

Donc :

$$V_1 = 0, \qquad x = -\infty;$$
$$V_3 = 0, \qquad x = +\infty.$$

4° Restent les conditions que doivent remplir V_1, V_2, V_3 sur les surfaces de séparation des milieux.

C'est justement en écrivant que les quatre conditions, indiquées plus haut, sont satisfaites, que nous allons déterminer les coefficients.

On devra avoir les identités suivantes :

$$v_0 + \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n + \dots = \beta_1 v_1 + \dots + \gamma_0 v_0 + \gamma_1 v_{-1} + \dots \gamma_{n-1} v_{1-n},$$
$$v'_0 + \alpha_1 v'_1 + \dots + \alpha_n v'_n = \mu(\beta_1 v'_1 + \dots + \gamma_0 v'_0 + \gamma_1 v'_{-1} + \dots + \gamma_{n-1} v'_{1-n}),$$
$$\delta_0 v_0 + \delta_1 v_1 + \dots + \delta_n v_{-n} = \beta_1 v_1 + \dots + \gamma_0 v_0 + \gamma_1 v_{-1} + \dots + \gamma_{n-1} v_{1-n} + \dots,$$
$$\delta_0 v'_0 + \delta_1 v'_{-1} + \dots + \delta_n v'_{-n} = (\beta_1 v'_1 + \dots + \gamma_0 v'_0 + \gamma_1 v'_{-1} + \dots + \gamma_{n-1} v'_{1-n} + \dots)\mu.$$

les deux premières identités ayant lieu pour $x = 0$; les deux dernières identités ayant lieu pour $x = a$.

En tenant compte des conditions (1) et (2), et égalant les coefficients des

termes semblables, il vient :

$$\left\{\begin{array}{l} 1+\alpha_1 = \beta_1 + \gamma_0, \\ \alpha_2 = \beta_2 + \gamma_1, \\ \alpha_3 = \beta_3 + \gamma_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ \alpha_n = \beta_n + \gamma_{n-1}; \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} 1+\alpha_1 = \mu(\beta_1 - \gamma_0), \\ \alpha_2 = \mu(\beta_2 - \gamma_1), \\ \alpha_3 = \mu(\beta_3 - \gamma_2), \\ \dots\dots\dots\dots\dots, \\ \alpha_n = \mu(\beta_n - \gamma_{n-1}); \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} \delta_0 = \beta_2 + \gamma_0, \\ \delta_1 = \beta_3 + \gamma_1, \\ \dots\dots\dots\dots \\ \delta_n = \beta_{n+2} + \gamma_n, \\ \beta_1 = 0; \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} \delta_0 = -\mu\beta_2 + \mu\gamma_0, \\ \delta_1 = -\mu\beta_3 + \mu\gamma_1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots, \\ \delta_n = -\mu\beta_{n+2} + \mu\gamma_n, \end{array}\right.$$

d'où l'on tire facilement, en posant :

$$\lambda = \frac{\mu - 1}{\mu + 1},$$

$$\alpha_1 = -\lambda,$$

$$\gamma_0 = \frac{2}{\mu+1} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ll} \beta_1 = 0, & \gamma_1 = \lambda^2\gamma_0, \\ \beta_2 = \lambda\gamma_0, & \gamma_2 = \lambda^4\gamma_0, \\ \beta_3 = \lambda^3\gamma_0, & \gamma_3 = \lambda^6\gamma_0, \\ \beta_4 = \lambda^5\gamma_0, & \dots\dots\dots, \\ \dots\dots\dots, & \gamma_n = \lambda^{2n}\gamma_0, \\ \beta_n = \lambda^{2n-1}\gamma_0; & \dots\dots\dots\dots \end{array}$$

La fonction V est donc complètement déterminée.

Si nous nous en tenons à la fonction V_2 qui est celle qui nous intéresse actuellement, on voit que ses coefficients forment deux progressions géométriques de raison λ^2, de sorte que le potentiel à l'intérieur de la plaque est le même que si nous avions une série de pôles de même signe, placés à une distance $2a$ les uns des autres et décroissant en progression géométrique de raison

$$\lambda^2 = \left(\frac{\mu - 1}{\mu + 1}\right)^2.$$

En particulier, si la perméabilité μ est très grande, la progression décroît très lentement ; si l'on a :

$$\mu = 1,$$

c'est-à-dire s'il n'y a pas de fer, tous les termes s'annulent à l'exception du terme $\gamma_0 v_0$ et on retrouve dans ce cas :

$$V_2 = \gamma_0 v_0 = \frac{2}{\mu+1} v_0 = v_0.$$

Intensité des courants de Foucault.

On peut maintenant se rendre compte de l'intensité du champ à l'intérieur de la plaque, car il suffit d'ajouter entre eux les effets de toutes les mesures magnétiques envisagées séparément.

Nous pouvons admettre que la plupart des lignes de force, après avoir traversé l'entrefer de AB en CD (*fig.* 6), vont de CD en C'D' à travers la

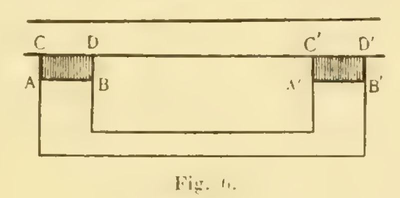


Fig. 6.

plaque vibrante, puis traversent de nouveau l'entrefer de C'D' à A'B'. Il en résulte que le champ d'induction magnétique est assez considérable dans la plaque entre CD et C'D' et est sensiblement parallèle à la direction de la plaque, et cela justement parce qu'il se concentre en grande partie dans une plaque très mince.

Ceci posé, nous avons vu que la chaleur Joule produite par ces courants était

$$\mu^2 C \omega^2 dt \int \left[\left(\frac{d\Omega}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\Omega}{dz}\right)^2 \right] d\tau = R x'^2 dt,$$

l'intégrale étant étendue à tout le volume de la plaque.

Calculons R.

Pour cela donnons-nous les dimensions du système :

Nous supposerons que la plaque a une surface de 1 cm² et une épaisseur de 0,1 mm; quant au noyau il a une section de 10 mm², soit 2 mm dans le plan de la figure et 5 mm en profondeur.

Le champ d'induction magnétique est à peu près de 1000 unités C. G. S. dans l'entrefer, par suite dans la plaque, la section de passage du flux étant 10 fois plus petite, cette induction devient égale à 10000.

Si nous la supposons uniforme on aura donc :

$$\mu^2 \left[\left(\frac{d\Omega}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\Omega}{dx}\right)^2 \right] = (10^4)^2 = 10^8.$$

$C = 10$ [illegible]

et enfin :

$$\int d\tau = 1\,\text{cm}^2 \times 0{,}1\,\text{mm} = 10^{-2}.$$

Donc finalement

$$R_{C.G.S} = 10^{8} \times 10^{-4} \times 10^{-2} = 100.$$

C. — *Application de cette théorie au récepteur téléphonique.*

Nous allons maintenant introduire les courants de Foucault dans les équations précédemment trouvées.

Soient j et j_1 les intensités moyennes des courants de Foucault dans le noyau et dans la plaque.

On peut écrire, en reprenant notre fonction H' du début :

$$H' = \frac{mx'^2}{2} + \psi,$$

ψ étant un polynome homogène du deuxième degré en i, j, j_1 et x.

On aura :

$$H' = \frac{mx'^2}{2} + \frac{Li'^2}{2} + M'i'x + \frac{Kx^2}{2} + \frac{Aj'^2}{2} + Bi'j' + Cj'x + \frac{Dj_1'^2}{2} + Gi'j_1' + Pj_1'x + Qj'j_1',$$

d'où l'on peut déduire quatre équations de Maxwell :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H'}{\partial x'}\right) - \frac{dH'}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H'}{\partial i}\right) = E - Ri,$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H'}{\partial j}\right) = -Sj,$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H'}{\partial j_1}\right) = -S_1 j_1.$$

Les deux premières équations ont déjà été obtenues au début de ces leçons, lorsqu'on négligeait les courants de Foucault dans le récepteur. Les deux dernières sont relatives à ces courants; Sj^2 et $S_1 j_1^2$ sont respectivement les quantités de chaleur qu'ils dégagent dans le noyau et dans la plaque.

En développant ces équations on trouve :

$$(m\omega^2 + k)x = M'i + Cj + Pj_1,$$

$$(L\omega + R)i = M'\omega x\, B\omega j + G\omega j_1 = E,$$

$$(A\omega + S)j + B\omega i + C\omega x + Q\omega j_1 = 0,$$

$$(D\omega + S_1)j_1 + G\omega i + P\omega x + Q\omega j = 0.$$

Remarquons qu'en réalité le système est beaucoup plus compliqué, car nous avons vu que ces coefficients que nous supposons constants dépendent en réalité de ω.

Nous allons cependant étudier le système en les supposant constants.

Remarquons d'abord que dans le cas pratique où les noyaux sont circulaires ou rectangulaires, les courants de Foucault qui s'y produisent ont été complètement étudiés, et on pourrait déterminer les coefficients A, B, C. En outre si nous supposions

$$D = G = Q = 0,$$

les résultats seraient simplifiés.

On aurait en effet :

$$(m\omega^2 + k)x = M'i + Cj - Pj_1,$$

$$S_1 j_1 + P\omega x = 0$$

et en combinant ces deux équations :

$$\left(m\omega^2 + \frac{P^2}{S_1}\omega + k\right)x = M'i + Cj.$$

Le coefficient $\frac{P^2}{S_1}$ joue ici le rôle du coefficient que nous avions appelé plus haut F.

D'autre part la chaleur de Joule produite par les courants de la plaque est pendant l'unité de temps :

$$S_1 j_1^2 = \frac{P^2}{S_1}\omega^2 x^2 = \frac{P^2}{S_1} x'^2.$$

Donc $\frac{P^2}{S_1}$ est précisément le coefficient que nous avons appelé R et que nous avons trouvé égal à 100. Comme nous avons vu que :

$$m = 1\,\text{g}, \qquad k = 3.10^6,$$

on voit que l'influence des courants de la plaque n'est pas très considérable, mais qu'elle n'est pas négligeable, elle est même plutôt utile, car elle introduit dans les oscillations propres du système un petit amortissement et atténue ainsi les effets de résonance et l'influence fâcheuse de la période variable.

Mais nous avons négligé les coefficients D, G, Q; reste à voir si nous en avons le droit. Pour cela, il faut étudier la signification physique de ces constantes.

1° D est le coefficient de j_1^2; c'est donc le terme qui représente la self-induction due aux courants de la plaque eux-mêmes; or ces courants sont disposés en filets parallèles, placés à peu près dans le même plan, puisque la plaque est extrêmement mince par rapport à sa largeur; donc l'induction de ces tubes les uns sur les autres est très faible; nous admettrons donc qu'on peut négliger D.

2° G est le coefficient de ij_1; il représente donc l'induction mutuelle du circuit de la bobine sur le circuit de la plaque, due à ce que le courant i est variable.

Si nous représentons en plan (*fig.* 7) la plaque avec les deux noyaux, le flux d'induction qui vient de l'entrefer pénètre normalement et, puisqu'il varie comme le courant i qui contribue à le produire en se superposant au champ

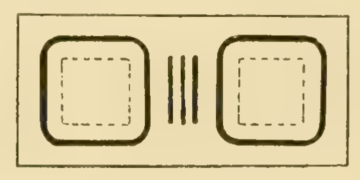


Fig. 7.

permanent, il donne naissance à des courants induits, parallèles au plan de la plaque, ayant des circuits dirigés suivant les lignes équipotentielles magnétiques représentées en trait pointillé sur la figure.

Comparons la valeur des courants ainsi produits à celle des courants qui résultent du mouvement de la plaque dans le champ.

D'après les données expérimentales, l'attraction permanente des noyaux sur la plaque est de 33^g. Quand on fait passer dans la bobine un courant de 0,01 A il en résulte une attraction supplémentaire de $0^g,3$ et une flexion de 1^μ. Comme la force d'attraction varie comme le carré du champ, on peut écrire :

$$k(h + h_1 i)^2 = 33^g + 0^g,3$$

et en remarquant que :

$$kh^2 = 33^g$$

et négligeant i^2 :

$$kh^2 + 2khh_1 i = 33^g + 0^g,3,$$

d'où :

$$2khh_1 i = \frac{1}{100} kh^2,$$

$$h_1 i = \frac{1}{200} h.$$

Donc un courant de 0,01 A produit un accroissement de champ de 0,5 %.

D'autre part, en vertu de ce même courant, la plaque se déplace de 1$^{\mu}$; elle se déplace donc de 1/100e de son épaisseur, et comme nous la supposons uniformément remplie de lignes de force, on peut dire approximativement que le champ à l'intérieur de la plaque a varié d'environ 1 %. Donc les variations de flux produites dans ces deux cas sont de même ordre, et l'on n'a pas le droit de négliger G devant P.

3° Q est le coefficient du terme jj_1; c'est donc l'induction mutuelle des deux courants de Foucault l'un sur l'autre. Or, comme nous avons vu que l'on ne pouvait négliger ni l'induction mutuelle des courants de la bobine sur ceux de la plaque (terme G), ni l'induction mutuelle des courants de la bobine sur ceux du noyau (terme C); on peut en conclure qu'on n'a pas le droit de négliger l'induction mutuelle des courants du noyau sur ceux de la plaque.

En résumé, si D est négligeable, G et Q ne le sont pas et il faudra intégrer le système complet, ce qui d'ailleurs ne présente pas d'intérêt particulier

VI. — Étude de l'hystérésis.

Soit B l'induction magnétique d'un noyau de fer et soit H le champ magnétisant.

A un accroissement dH de la force magnétisante correspond un accroissement dB de l'induction magnétique et :

$$\frac{dB}{dH} = \varphi(B, H).$$

Cette fonction n'est pas la même suivant que dH est positif ou négatif; par suite si l'on pouvait intégrer l'équation, on obtiendrait deux familles distinctes de courbes. Comme, dans le cas actuel, le fer est loin de la saturation, et que les variations du champ sont toujours faibles, nous pourrons remplacer φ par une constante qui aura deux valeurs différentes suivant le signe de dH.

Donc nous écrirons :

$$dB = \lambda_1 \, dH, \qquad dH > 0,$$
$$dB = \lambda_2 \, dH, \qquad dH < 0.$$

Si i est le courant magnétisant et s'il croît de di, il se produit dans le champ un accroissement dH. Cet accroissement se décompose en deux parties :

L'une due directement au courant qui se produirait si le milieu n'était pas magnétique ;

Et l'autre due à la variation de l'aimantation du noyau.

On posera donc :

$$dH = \alpha \, di + \beta \, dB = \alpha \, di + \beta\lambda \, dH,$$

α et β étant deux constantes ; d'où

$$\frac{dH}{di} = \frac{\alpha}{1 - \beta\lambda_1} = \mu_1 \qquad (di > 0),$$
$$\frac{dH}{di} = \frac{\alpha}{1 - \beta\lambda_2} = \mu_2 \qquad (di < 0),$$

Soit maintenant un son simple, et soit :

$$i = \sin \omega t$$

le courant correspondant, représenté ainsi par une sinusoïde, dont nous supposons l'amplitude égale à 1. Pendant que i augmente, H décrit un arc de sinusoïde d'amplitude μ_1.

Lorsque i diminue, H décrit un deuxième arc de sinusoïde qui se raccorde au premier et dont l'amplitude est μ_2, et ainsi de suite ; la courbe de H est donc déformée par rapport à celle de i et elle renferme des harmoniques d'ordre supérieur.

On peut même aller plus loin : soit un son composé de deux sons simples :

$$i = A \sin \omega t + A' \sin \omega' t,$$
$$= i_1 + i_2.$$

Si les deux sons simples étaient séparés on aurait deux champs distincts H_1 et H_2, et l'on aurait :

$$\frac{dH_1}{dt} = \mu A \omega \cos \omega t,$$
$$\frac{dH_2}{dt} = \mu A' \omega' \cos \omega' t$$

en prenant μ_1 ou μ_2 suivant que les fonctions sont croissantes ou décroissantes.

Supposons qu'à un instant donné la première fonction soit croissante et la deuxième décroissante :

$$\frac{dH_1}{dt} = \mu_1 A\omega \cos\omega t,$$

$$\frac{dH_2}{dt} = \mu_2 A'\omega' \cos\omega' t.$$

Les deux sons étant simultanés, la fonction i qui est une somme de deux fonctions, l'une croissante, l'autre décroissante, peut être croissante.

En ce cas, le champ résultant H est lié à i par la relation :

$$dH = \mu_1\, di$$

ou

$$\frac{dH}{dt} = \mu_1 A\omega \cos\omega t + \mu_1 A'\omega' \cos\omega' t.$$

On voit donc que dans ce cas on a forcément :

$$\frac{dH}{dt} \neq \frac{dH_1}{dt} + \frac{dH_2}{dt}$$

ou

$$H \neq H_1 + H_2.$$

Donc l'effet de l'hystérésis serait de déformer les sons les plus purs et d'y introduire des harmoniques. Il nous paraît d'ailleurs que cet effet est absolument négligeable vis-à-vis des courants de Foucault.

Enfin la perte par hystérésis est (en watts) :

$$NV\eta B^{1,6},$$

N étant la fréquence, V le volume du fer, η un coefficient qui dépend de la nature du métal, B l'induction magnétique.

Nous prendrons ici :

$$N = 1000,$$

$$\eta = 0{,}004,$$

$$\beta = 10000,$$

$$V = 10^{-2}.$$

Tout calcul fait on trouve pour cette perte de puissance dans la plaque :

$$10\,044 \times 10^3 \times 10^{-2} \times 10^{-7} = 10^{-2} \text{ environ.}$$

Or nous avons vu que la perte de puissance par seconde produite par les courants de Foucault de la plaque était

$$Rx'^2 = 100 \times \omega^2 x^2 = 100 \times \frac{4\pi^2}{10^{-6}} \times 10^{-8} = 4\pi^2$$

Donc la perte par hystérésis est moins de 1/3000e de la perte par courants de Foucault.

VII. — Influence de la ligne.

Nous avons supposé jusqu'à présent le récepteur et le transmetteur réunis par une ligne très courte; il faudrait voir maintenant quelle est l'influence d'une ligne un peu longue.

On sait que la propagation dépend d'une équation aux dérivées partielles; le récepteur et le transmetteur agissent sur les conditions aux limites.

Dans des paragraphes précédents on étudie une fonction :

$$\Phi = \frac{\gamma i}{\omega},$$

γ étant un coefficient qui dépend de la ligne.

Si l'on appelle Φ et V, Φ' et V' les valeurs que prennent cette fonction et le potentiel en amont et en aval de l'appareil, on peut dire que, quelle que soit la complication d'un récepteur, il est toujours caractérisé par ce fait qu'il y aura deux relations linéaires entre ces quatre quantités et leurs dérivées partielles par rapport au temps.

La connaissance de ces relations permet de résoudre le problème dans les cas les plus compliqués.

Nous allons rechercher ce que deviennent ces relations dans le cas qui nous occupe.

Ici, il n'y a pas de capacité; donc l'intensité est la même en amont et en aval, d'où

$$\Phi = \Phi' \quad (1^{\text{re}} \text{ relation}).$$

En outre, E étant la différence de potentiel aux bornes du téléphone, on a :

$$E = V - V'.$$

Si maintenant on élimine x, j, j_1 entre les quatre équations (A) on trouve

(π et π_1 étant deux polynomes entiers en ω) :

$$\pi(\omega) \times i = \pi_1(\omega) \times \mathrm{E}$$

ou bien :

$$\omega\pi(\omega)\frac{\Phi}{\gamma} = \pi_1(\omega) \times (\mathrm{V} - \mathrm{V}').$$

Or :

$$\omega^k \Phi = \frac{d^k \Phi}{dt^k},$$

$$\omega^k \mathrm{V} = \frac{d^k \mathrm{V}}{dt^k},$$

$$\omega^k \mathrm{V}' = \frac{d^k \mathrm{V}'}{dt^k}.$$

Donc on a bien ainsi la deuxième relation linéaire entre les trois fonctions Φ, V, V′ et leurs dérivées par rapport au temps.

A l'aide de ces deux relations on pourra étudier l'influence de la ligne.

Nous n'entrerons pas dans les calculs; mais nous mentionnerons un cas particulièrement simple : c'est celui où il existe entre les coefficients la relation indiquée antérieurement; dans ce cas on n'a plus, comme pour une ligne très courte

$$\mathrm{E} = \mathrm{E}_1.$$

E et E_1 étant les différences de potentiel entre les bornes du récepteur et du transmetteur, on trouve :

$$\mathrm{E} = k\mathrm{E}_1,$$

k étant un coefficient d'affaiblissement constant.

Dans ce cas, tout se passerait comme sur une ligne très courte; il se produirait seulement un affaiblissement du son.

SUR QUELQUES THÉORÈMES GÉNÉRAUX RELATIFS A L'ÉLECTROTECHNIQUE

L'Éclairage électrique, t. 50, p. 293-301 (2 mars 1907).

Une récente conversation que j'ai eue avec MM. Maurice Leblanc et Marius Latour a appelé mon attention sur certaines propriétés générales des systèmes électriques. Peut-être ne sera-t-il pas inutile de traiter ici cette question.

J'envisage un système pouvant comprendre des circuits fixes, des circuits mobiles, des pièces en rotation recevant le courant *par des bagues*, mais ne contenant *ni aimant permanent*, *ni pièces à collecteurs ou à résistance variable*, *ni condensateurs ou capacité sensible*, *et ne recevant pas du dehors du courant continu*. Je me propose en particulier d'établir qu'un pareil système, si compliqué qu'il soit d'ailleurs, ne pourra jamais constituer une génératrice *autoexcitatrice;* et que, s'il reçoit du dehors du courant alternatif, il y aura toujours décalage entre la force électromotrice et l'intensité.

L'énergie électrodynamique.

Supposons que le système comprenne n circuits; soient

$$i_1, \quad i_2, \quad \ldots \quad i_n$$

les intensités dans ces divers circuits; soit L_p le coefficient de self-induction du circuit i_p; soit M_{pq} le coefficient d'induction mutuelle des circuits i_p et i_q. Posons :

$$2T = \Sigma L_p i_p^2 + 2\Sigma M_{pq} i_p i_p.$$

La fonction T sera *l'énergie électrodynamique*. Cette fonction est *essentiellement positive*, car elle est égale à l'intégrale :

$$\frac{1}{8\pi}\int \mu\, d\tau\,(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2),$$

où μ représente la perméabilité magnétique, α, β, γ les composantes du champ magnétique et où l'intégration est étendue à tous les éléments de volume $d\tau$ de l'espace.

Nous supposerons dans la suite que la perméabilité est constante, que par conséquent les coefficients L et M sont indépendants des intensités, et que T est un polynome homogène du second degré par rapport à ces intensités. Les résultats seraient encore vrais si l'on abandonnait cette hypothèse; pour se rendre compte de la façon dont il conviendrait d'opérer si la perméabilité était supposée variable, il suffira de se reporter à ce que j'ai dit au début de mes leçons sur le téléphone [(*L'Éclairage électrique*, t. L, 16 février 1907, p. 222 (¹)].

Les coefficients L et M seront en général des fonctions du temps, parce que le système comprend des pièces mobiles; je regarderai le mouvement de ces pièces comme donné, ce qui me permettra de regarder L et M comme des fonctions connues du temps.

Fonction des résistances.

Je représenterai par $S\,dt$ la chaleur de Joule produite dans l'appareil pendant le temps dt. Il est clair que la *fonction des résistances* S sera comme T un polynome du second degré par rapport aux i; mais, à la différence de ce qui arrive pour T, les coefficients de ce polynome seront des constantes et non des fonctions du temps, puisque nous supposons que le système ne contient pas de résistance variable. Il est clair que la fonction des résistances S sera *essentiellement positive*.

Si les circuits étaient entièrement séparés les uns des autres, le polynome S ne contiendrait que des termes carrés; mais il peut se faire que deux circuits aient une partie commune. Si alors une portion de conducteur appartient à la fois aux deux circuits i_p et i_q, la résistance de cette portion nous donnera un terme en $(i_p+i_q)^2$ et par conséquent un terme en $i_p i_q$.

(¹) Ce tome p. 487.

Équations de Lagrange-Maxwell.

Je suppose que dans le circuit i_p, il y ait une force électromotrice E_p venue du dehors; alors les équations de Lagrange-Maxwell nous donnent :

$$(1) \qquad \frac{d}{dt}\frac{dT}{di_p} + \frac{dS}{di_p} = E_p.$$

Si nous posons :

$$V = \Sigma E_p i_p,$$

cela peut s'écrire :

$$(1 \textit{ bis}) \qquad \frac{d}{dt}\frac{dT}{di_p} + \frac{dS}{di_p} = \frac{dV}{di_p}.$$

Variables normales.

On peut quelquefois introduire une petite simplification par un changement de variables.

Si l'on désigne par i' des variables liées aux i par des relations linéaires, les équations (1 *bis*) prennent la forme :

$$(2) \qquad \frac{d}{dt}\frac{dT}{di'_p} + \frac{dS}{di'_p} = \frac{dV}{di'_p},$$

c'est-à-dire qu'elles conservent la forme des équations de Lagrange. Si d'ailleurs on pose :

$$\frac{dV}{di'_p} = E'_p,$$

il y a des relations linéaires entre les E' et les E, et on a identiquement

$$V = \Sigma E i = \Sigma E' i'.$$

On peut choisir les nouvelles variables de telle façon que S ne contienne que des termes carrés et que l'on ait

$$2S = \Sigma R'_p i'^2_p$$

comme si tous les circuits étaient séparés les uns des autres. On peut donc toujours se supposer ramené au cas où ces circuits sont séparés et où l'on a :

$$2S = \Sigma R_p i_p^2; \qquad \frac{dS}{di_p} = R_p i_p.$$

On pourrait même choisir les variables nouvelles de façon que les deux polynomes S et T ne contiennent l'un et l'autre que des termes carrés, si les coefficients L et M étaient constants, mais il n'en est pas ainsi en général.

Fonctions périodiques.

Toutes les quantités que nous aurons à considérer seront des fonctions périodiques ou quasi périodiques. Si une fonction $f(t)$ est périodique, on peut la développer suivant la formule de Fourier sous la forme :

$$f(t) = A + \Sigma B \cos \alpha t + \Sigma C \sin \alpha t,$$

les α étant des multiples d'une même quantité. La fonction $f(t)$ sera dite *quasi périodique*, si elle est développable en une série de même forme, les α étant quelconques.

La valeur moyenne de $f(t)$ est A; si cette valeur moyenne est nulle, $f(t)$ est la dérivée d'une fonction périodique ou quasi périodique. Dans ce qui va suivre, j'aurai presque toujours affaire à des fonctions périodiques proprement dites; je dirai donc ordinairement fonctions périodiques, mais ce que je dirai s'appliquera également aux fonctions quasi périodiques.

La valeur moyenne du carré de f est

$$A^2 + \sum \frac{B^2 + C^2}{2}.$$

On voit qu'elle est plus grande que le carré de la valeur moyenne.

La dérivée d'une fonction périodique a sa valeur moyenne nulle. Cela nous permet de faire une sorte d'intégration par parties et de dire que la valeur moyenne de $u\frac{dv}{dt}$ est égale à celle de $-v\frac{du}{dt}$, puisque celle de $\frac{d(uv)}{dt}$ est nulle, j'écris

$$\left[u\frac{dv}{dt}\right] = -\left[v\frac{du}{dt}\right]$$

en représentant par $[U]$ la valeur moyenne de U.

Théorème fondamental.

Reprenons l'équation (1), et supposons que l'on ne fournisse de l'extérieur à l'appareil que du courant alternatif; cela revient à supposer que la valeur

moyenne de E_p est nulle. Comme $\frac{dT}{di_p}$ est une fonction périodique, la valeur moyenne de $\frac{d}{dt}\frac{dT}{di_p}$ est nulle. Il en résulte que celle de $\frac{dS}{di_p}$ est nulle également. *Comme nous supposons qu'il n'y a pas de résistance variable*, il est clair qu'il en résulte que la valeur moyenne de i_p est nulle. Si par exemple

$$S = \frac{1}{2}\Sigma R_p i_p^2,$$

la valeur moyenne de

$$\frac{dS}{di_p} = R_p i_p$$

est nulle et elle ne diffère de celle de i_p que par le facteur constant, R_p. Je puis donc poser

$$i_p = \frac{dj_p}{dt},$$

j_p étant une fonction périodique. Je multiplie l'équation (1) par j_p et j'ajoute toutes les équations analogues ; il vient :

$$\sum j\frac{d}{dt}\frac{dT}{di} + \sum j\frac{dS}{di} = \sum Ej. \tag{3}$$

Je prends les valeurs moyennes des deux membres. Je représente la valeur moyenne d'une fonction U par la notation [U] ; j'ai alors, en intégrant comme plus haut par parties,

$$\left[\sum j\frac{d}{dt}\frac{dT}{di}\right] = -\left[\sum \frac{dj}{dt}\frac{dT}{di}\right] = -\left[\sum i\frac{dT}{di}\right] = -2[T]$$

en appliquant pour finir le théorème des fonctions homogènes. Cette partie moyenne est donc négative, puisque T est essentiellement positif.

J'ai ensuite, par les propriétés des formes quadratiques et en appelant S' ce que devient la fonction S quand on y remplace les i par les j correspondants :

$$\sum j\frac{dS}{di} = \sum i\frac{dS'}{dj}.$$

Or les coefficients de S', c'est-à-dire les résistances étant invariables, on aura :

$$\frac{dS'}{dt} = \sum \frac{dS'}{dj}\frac{dj}{dt} = \sum i\frac{dS'}{dj} = \sum j\frac{dS}{di},$$

d'où

$$\left[\sum j \frac{dS}{di}\right] = \left[\frac{dS'}{dt}\right] = 0.$$

Il reste donc

$$(4) \qquad \Sigma[\mathrm{E}j] = -2[\mathrm{T}] < 0.$$

Interprétation du théorème.

Supposons d'abord un appareil ne recevant rien du dehors, et formé par exemple d'une génératrice fermée sur une résistance, ou bien de l'ensemble d'une génératrice et d'une réceptrice. Alors, puisque nous ne recevons rien du dehors, on aura :

$$\mathrm{E}_p = 0; \qquad \Sigma[\mathrm{E}j] = 0,$$

ce qui est en contradiction avec l'équation (4). *Nous devons conclure que la machine ne pourra jamais s'amorcer elle-même par auto-excitation.*

Supposons maintenant que l'appareil reçoit d'une source extérieure du courant alternatif; soit

$$\mathrm{E} = \mathrm{A}\cos\omega t$$

la force électromotrice correspondante et soit :

$$i = \mathrm{B}\cos(\omega t + h) + \Sigma\,\mathrm{C}\cos\alpha t + \Sigma\,\mathrm{D}\sin\alpha t$$

le courant correspondant ; le premier terme du second membre est celui qui a même période que la force électromotrice. On a alors :

$$j = \frac{\mathrm{B}}{\omega}\sin(\omega t + h) + \sum \frac{\mathrm{C}}{\alpha}\sin\alpha t - \sum \frac{\mathrm{D}}{\alpha}\cos\alpha t$$

et la valeur moyenne de Ej est

$$[\mathrm{E}j] = \left[\frac{\mathrm{AB}}{\omega}\cos\omega t\sin(\omega t + h)\right] = \frac{\mathrm{AB}\sin h}{\omega},$$

les termes en αt ne donnant rien. Cette valeur moyenne doit être négative ; donc $\sin h$ ne doit pas être nul, donc le courant et la force électromotrice sont toujours décalés l'un par rapport à l'autre.

Second théorème.

Supposons maintenant que l'on fournisse du dehors au système *exclusivement* du courant continu, c'est-à-dire que les E_p soient des constantes.

Supposons d'abord

$$S = \frac{1}{2}\Sigma R i^2; \qquad \frac{dS}{di_p} = R_p i_p.$$

En égalant les valeurs moyennes des deux membres de (1) on trouve :

$$[R_p i_p] = R_p[i_p] = [E_p] = E_p$$

puisque E_p et R_p sont des constantes. Cela donne la valeur moyenne de i_p.

Cela posé l'énergie moyenne fournie au système est :

$$\Sigma[E_p i_p] = \Sigma E_p[i_p] = \Sigma R_p[i_p]^2.$$

La chaleur de Joule produite est

$$\Sigma[R_p i_p^2] = \Sigma R_p[i_p^2].$$

Mais nous avons vu que la valeur moyenne du carré d'une fonction périodique est toujours plus grande que le carré de sa valeur moyenne, on a donc :

$$[i_p^2] > [i_p]^2$$

La chaleur de Joule est donc toujours plus grande que l'énergie fournie (laquelle est d'ailleurs toujours positive).

Un appareil du genre de celui que nous étudions (c'est-à-dire sans collecteur) *ne peut donc fonctionner comme moteur, si on ne lui fournit que du courant continu.*

Il pourrait au contraire fonctionner comme générateur; c'est le cas d'un alternateur excité par un courant continu extérieur.

Si l'on n'avait pas $S = \frac{1}{2}\Sigma R i^2$, on n'aurait qu'à revenir aux variables normales en faisant le changement de variables indiqué plus haut.

Nous venons de voir que l'énergie fournie était toujours positive, ce qui montre que notre appareil ne peut non plus servir de générateur de courant continu.

Influence des aimants permanents.

Il est aisé de voir pourquoi les résultats précédents ne sont plus vrais quand il y a des aimants permanents.

Supposons que l'une des résistances R_p soit nulle, ainsi que la force électromotrice E_p correspondante. L'équation (1) se réduira alors à

$$\frac{d}{dt}\frac{dT}{di_p} = 0; \qquad \frac{dT}{di_p} = \text{const.},$$

mais nous n'aurons plus aucune raison de conclure que la valeur moyenne de i_p est nulle, si l'appareil ne reçoit du dehors que du courant alternatif.

Or, c'est précisément ce qui arrive dans le cas d'un aimant permanent. Les circuits d'Ampère qui constituent cet aimant peuvent être regardés comme des circuits dépourvus de résistance et dans lesquels n'agit aucune force électromotrice.

Influence des condensateurs.

Qu'arrive-t-il maintenant si le système comporte des condensateurs ou des capacités notables? Alors si nous désignons par U l'énergie électrostatique emmagasinée dans ces condensateurs et par j la charge de l'un d'eux, la fonction U sera un polynome du second degré par rapport aux j. La dérivée $\frac{dj}{dt}$ représente alors le courant i. Nous devons donc distinguer deux sortes de circuits dans le système :

1° Ceux qui sont interrompus par des condensateurs; le courant i_p qui y circule sera la dérivée

$$i_p = \frac{dj_p}{dt}$$

de la charge j_p du condensateur, et comme cette charge ne peut croître au delà de toute limite, il faut que la valeur moyenne de i_p soit nulle.

2° Les circuits fermés; pour ceux-là il n'y a plus de raisons pour que la valeur moyenne de i_p soit nulle.

Quoi qu'il en soit, notre équation (1) va devenir :

$$(5) \qquad \frac{d}{dt}\frac{dT}{di_p} + \frac{dU}{di_p} + \frac{dS}{di_p} = E_p.$$

Supposons que le système ne reçoive que du courant alternatif, c'est-à-dire que

$$[E_p] = 0.$$

Nous devons distinguer les équations (5) relatives aux circuits à condensateurs et les équations (5) relatives aux circuits fermés. Pour les premières, on a, comme on vient de le voir,

$$(6) \qquad [i_p] = 0.$$

Pour les secondes on a $\frac{dU}{dj_p} = 0$; elles se ramènent donc à la forme (1) et l'on verrait comme plus haut que l'on doit avoir :

$$(7) \qquad \left[\frac{dS}{di_p}\right] = 0.$$

Si les résistances sont invariables, les équations (7) sont des relations linéaires entre les $[i_p]$. Le nombre des équations (6) et (7) est égal à celui des circuits, nous avons donc autant d'équations linéaires entre les $[i_p]$ qu'il y a de $[i_p]$. On en conclut que toutes les valeurs moyennes $[i_p]$ sont nulles, ce qui permet de poser comme plus haut

$$i_p = \frac{dj_p}{dt}$$

mêmes pour les circuits fermés.

Si nous ajoutons les équations (5) après les avoir multipliées par j_p, il vient :

$$(8) \qquad \sum j \frac{d}{dt}\frac{dT}{di} + \sum j \frac{dU}{dj} + \sum j \frac{dS}{di} = \sum E j$$

ou en prenant les valeurs moyennes :

$$-\sum\left[i\frac{dT}{di}\right] + \sum\left[j\frac{dU}{dj}\right] = \sum[Ej]$$

car on verrait comme plus haut que :

$$\sum\left[j\frac{d}{dt}\frac{dT}{di}\right] = -\sum\left[\frac{dj}{dt}\frac{dT}{di}\right] = -\sum\left[i\frac{dT}{di}\right]; \qquad \sum j\frac{dS}{di} = 0.$$

Il reste donc :

$$\Sigma[Ej] = 2[U - T].$$

Il peut donc y avoir concordance de phase entre la force électromotrice et le courant; ou bien encore il peut y avoir auto-excitation, pourvu que

l'énergie électrostatique des condensateurs et l'énergie électrodynamique aient même valeur moyenne.

Il est clair que cette compensation ne se trouve réalisée que pour une seule vitesse.

Résistances variables et collecteurs.

Tous les raisonnements précédents supposent explicitement que les résistances sont constantes. Cela n'a plus lieu dès qu'il y a un collecteur. L'un des circuits sera alors formé par exemple par un circuit extérieur fixe, les balais, deux lames déterminées l et l' du collecteur et les spires de l'induit comprises entres ces deux lames. La résistance de ce circuit est constamment variable et elle devient infinie dès que les lames l et l' cessent d'être en contact avec les balais. Les lames suivantes l_1 et l'_1 viennent alors en contact avec les balais ; mais c'est alors un circuit entièrement différent qui entre en jeu ; il a pris la place du premier dans l'espace ; mais nous devons envisager chacun des circuits qui entre ainsi successivement en jeu comme donnant naissance à une équation (1) distincte.

S'il y a par exemple $2n$ lames au collecteur et qu'on les désigne par l_0, l_1, l_2, ... si nous désignons par bb' le conducteur fixe compris entre les balais, et par $l_i l_{i+1}$ l'ensemble des spires de l'induit comprises entre les deux lames l_i et l_{i+1} ; si l'on convient de désigner arbitrairement une même lame par l_p, l_{2n+p}, ..., l_{4n+p}, ..., l_{p-2n}, ... ; nous aurons à envisager séparément les $4n$ circuits

$$(9) \qquad b l_i l_{i+1} \ldots l_{i+n} b' b \qquad (i = 1, 2, \ldots, 2n),$$
$$(10) \qquad b l_i l_{i-1} \ldots l_{i-n} b' b \qquad (i = 1, 2, \ldots, 2n)$$

et à écrire pour chacun d'eux une équation (1). Les deux circuits (9) et (10) ne seront d'ailleurs parcourus par un courant que pendant le temps où les lames l_i et $l_{i+n} = l_{i-n}$ seront en contact avec les balais b et b'. Pendant le reste du temps, l'intensité correspondante sera nulle et la résistance infinie. *Nos équations restent donc applicables, mais à la condition d'y regarder les résistances comme variables.*

Passons au cas de la roue de Barlow. A l'instant t, le courant va du centre O de la roue au point A de la circonférence qui se trouve en contact avec le frotteur B, puis il revient du frotteur B au centre O de la roue par la partie fixe

du circuit : le circuit total que nous appellerons C se compose donc de deux parties :

rayon OA + conducteur fixe BO.

A l'époque t', la roue a tourné, le point A n'est plus en contact avec le frotteur B, qui touche maintenant un autre point A' de la circonférence. Le courant principal ne suit plus le circuit C, mais un nouveau circuit C' comprenant :

rayon A'O + conducteur fixe BO.

Ce nouveau circuit C' doit être regardé comme distinct du circuit C et l'on doit lui appliquer une nouvelle équation (1). Mais qu'est devenu à l'époque t' le circuit C lui-même ? Il comprend maintenant trois parties :

rayon OA + arc de circonférence AA' + conducteur fixe BO ;

car il doit rester formé des mêmes conducteurs matériels. Seulement sa résistance est devenue beaucoup plus grande.

Nous retrouvons donc le rôle des résistances variables, et nous pouvons dire que la roue de Barlow n'est autre chose qu'un collecteur à une infinité de lames.

Ce que nous venons de dire ne changera pas, si au lieu d'un frotteur fixe unique nous supposons un frotteur circulaire régnant tout le long de la roue de Barlow.

A l'instant t les points A_1, A_2, ... de la roue sont en contact avec les points B_1, B_2, ... du frotteur circulaire et les courants parcourent les circuits C_i comprenant

rayon OA_i + conducteur fixe B_iO $(i = 1, 2, \ldots)$.

A l'instant t' ce sont les points A_2, A_3, ... de la roue qui sont en contact avec les points B_1, B_2, ... du frotteur, les courants parcourent les circuits C'_i comprenant

rayon OA_{i+1} + conducteur fixe B_iO.

Ils sont distincts des C_i puisqu'ils ne sont pas formés des mêmes conducteurs matériels ; et quant aux circuits C_i eux-mêmes, ils sont devenus :

rayon OA_i + arc de circonférence A_iA_{i+1} + conducteur fixe B_iO

et leur résistance a augmenté.

Je précise, pour achever de définir la condition pour qu'un circuit puisse être regardé comme conservant son individualité et pour qu'on puisse lui appliquer une équation (1) qui lui appartienne en propre. Le nouveau circuit C_i se composera des molécules matérielles qui formaient le circuit C_i primitif, c'est-à-dire du rayon OA_i et du conducteur fixe B_iO, plus les parties de la roue qui sont, depuis l'instant t jusqu'à l'instant t', venues successivement en contact avec le frotteur B_i et qui sont représentées par l'arc A_iA_{i+1}.

On voit, dans ce court exposé, la raison des différences essentielles entre les propriétés des appareils sans collecteur, et celles des appareils à collecteur dont la roue de Barlow n'est en un sens qu'un cas particulier.

SUR

LA THÉORIE DE LA COMMUTATION

La Lumière électrique, 2[e] série, t. 2, p. 295-297 (6 juin 1908).

La théorie habituelle de la commutation conduit à des conséquences souvent paradoxales et qui ne sont pas toujours d'accord avec l'expérience. Pour discuter ces conséquences, il ne sera pas nécessaire d'envisager le problème complexe de la commutation : il suffira de considérer un problème beaucoup plus simple, mais où la même difficulté essentielle se présente.

Supposons un circuit fermé, on aura

$$L\frac{di}{dt} + Ri = E,$$

i étant l'intensité, L, la self-induction, E, la force électromotrice, R, la résistance.

Supposons que ce circuit comprenne un contact glissant analogue à celui qui se produit entre un balai et une lame de collecteur. Nous pouvons nous représenter par exemple deux parallélépipèdes métalliques, appliqués l'un sur l'autre, la surface de contact étant plane et variable si l'un des parallélépipèdes est mobile.

Supposons que le circuit soit rompu à l'époque $t = 0$, de telle sorte que la surface de contact soit nulle pour $t = 0$ et pour $t > 0$ et proportionnelle à $-t$ pour $t < 0$. Dans ces conditions, on aura :

$$R = R_0 - \frac{\rho}{t},$$

R_0 est la résistance du circuit en dehors de celle qui se produit au contact;

cette résistance peut être regardée comme constante. Quant à $-\frac{\rho}{t}$, c'est la résistance au contact, je mets le signe − parce que t est négatif.

L'équation devient donc :

$$L\frac{di}{dt} + \left(R_0 - \frac{\rho}{t}\right) i = E. \tag{1}$$

Supposons que E soit variable et developpable suivant les puissances entières de t, l'intégration de l'équation (1) nous donnera un développement contenant des termes de la forme t^m et $t^{\alpha+m}$, m étant un entier et α une quantité fractionnaire qu'il s'agit de determiner.

En prenant seulement les termes $t^{\alpha+m}$, on aura seulement la solution de l'équation sans second membre :

$$L\frac{di}{dt} + \left(R_0 - \frac{\rho}{t}\right) i = 0.$$

Soit At^α le premier terme du développement de i, on aura, en égalant à o le coefficient de $t^{\alpha-1}$ dans le premier membre de l'équation :

$$A\alpha L - \rho = 0, \qquad \text{d'où} \qquad \alpha = \frac{\rho}{L}.$$

Si $\frac{\rho}{L}$ est plus petit que 1, le terme At^α est le principal terme de i, et l'on voit que $\frac{di}{dt}$ et $\frac{i}{t}$, c'est-à-dire la densité du courant, devient infinie pour $t = 0$.

Nous trouvons en effet :

$$i = Ce^{-\int \frac{R\,dt}{L}} + e^{-\int \frac{R\,dt}{L}} \int \frac{E}{L} e^{\int \frac{R\,dt}{L}} dt,$$

les integrales étant prises entre o et t. Le premier terme n'est autre chose que la solution de l'équation sans second membre, et le second est divisible par t, à moins que E ne soit infini pour $t = 0$.

C'est là la conséquence qui, quoique un peu paradoxale, est généralement admise.

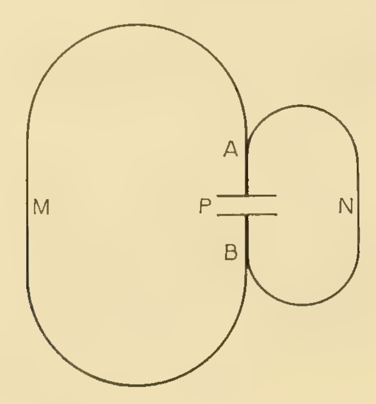
Elle subsiste quelle que soit la loi suivant laquelle varie E, à moins que E ne devienne lui-même infini pour $t = 0$.

Ces résultats ont paru paradoxaux à plusieurs électriciens, qui s'étonnaient de voir certaines machines fonctionner convenablement sans que l'inégalité en question fut satisfaite.

M. Bethenod, dont l'attention avait été attirée sur ce point par M. Latour, émit l'idée que l'explication pourrait être cherchée dans des effets de capacité. Cette idée était juste, ainsi que nous allons le voir. Cherchons donc à compléter la théorie précédente en tenant compte de ces effets.

Les deux surfaces, n'étant pas en contact absolu, forment une espèce de condensateur, et *il convient de faire le calcul comme si ce condensateur était en dérivation sur le circuit.*

Envisageons alors les deux circuits : MAPB, PANB.



Soient $\frac{dq_1}{dt}$, $\frac{dq_2}{dt}$, les courants qui circulent dans les deux circuits; la charge du condensateur pourra être représentée par $q_1 - q_2$, et sa capacité (proportionnelle à la surface de contact et par conséquent au temps) par — $\frac{t}{\gamma}$. La self-induction du premier circuit sera sensiblement L et sa résistance sensiblement R_0, car il ne comprend pas la résistance au contact. Soit N la self-induction du second circuit, et M le coefficient d'induction mutuelle. La résistance du second circuit sera sensiblement — $\frac{\rho}{t}$.

Les équations s'écrivent alors :

$$(1)\quad \begin{cases} L\frac{d^2q_1}{dt^2} + M\frac{d^2q_2}{dt^2} + R_0\frac{dq_1}{dt} + \frac{\gamma}{t}(q_1 - q_2) = E, \\ M\frac{d^2q_1}{dt^2} + N\frac{d^2q_2}{dt^2} + \frac{\rho}{t}\frac{dq_2}{dt} + \frac{\gamma}{t}(q_2 - q_1) = 0. \end{cases}$$

Il s'agit de savoir si, dans le développement de $\frac{dq_1}{dt}$ ou de $\frac{dq_2}{dt}$, il y aura un terme en t^α, α étant plus petit que 1. Supposons que ce terme existe et soit

$$A_1 t^{\alpha-1}, \quad A_2 t^{\alpha-1},$$

les termes correspondants de q_1 et de q_2. Égalons dans les deux membres des équations (2) les coefficients de $t^{\alpha-1}$: ces termes, s'ils existent, seront les termes du plus petit degré et ne pourront se détruire avec aucun autre. On obtient ainsi les équations

$$(3)\quad \left\{ \begin{aligned} L(\alpha+1)\alpha A_1 + M(\alpha+1)\alpha A_2 &= 0, \\ M(\alpha+1)\alpha A_1 + N(\alpha+1)\alpha A_2 - \rho(\alpha+1)A_2 &= 0, \end{aligned} \right.$$

d'où, en éliminant A_1 et A_2 :

$$L\left(N - \frac{\rho}{\alpha}\right) = M^2,$$

d'où

$$\frac{\rho}{\alpha} = N - \frac{M^2}{L}.$$

La condition, pour que la densité du courant ne devienne pas infinie, n'est donc pas

$$\rho > L,$$

mais

$$\rho > N - \frac{M^2}{L}.$$

Comparons ces deux conditions; nous observerons d'abord que $N - \frac{M^2}{L}$ est toujours positif, et toujours plus petit que N, et en second lieu que N est beaucoup plus petit que L.

Le circuit PANB est en effet beaucoup plus petit que le circuit MAPB. Il est formé par les lignes de courant qui vont d'une des surfaces en contact à l'autre, et fermé par les lignes de force électrique qui reviennent de la seconde surface à la première. Ces lignes de courant comme ces lignes de force sont sensiblement normales aux deux surfaces de sorte que les lignes de courant le long desquelles marche le courant de conduction d'aller et les lignes de force le long desquelles revient le courant de déplacement de retour coïncident à fort peu près, et que l'aire du circuit est presque nulle. Ainsi *la nouvelle condition sera presque toujours remplie.*

Ces résultats s'étendent immédiatement au cas plus complexe de la commutation. La quantité ρ doit être plus grande, non pas que la self-induction des spires mises en court-circuit, mais que la self du circuit presque infinitésimal formé par les lignes de courant qui vont de la surface du balai à celle du collecteur et fermé par les lignes de force qui reviennent du collecteur au balai.

Pour terminer, faisons la remarque suivante. C'est la présence de la capacité $\frac{l}{\gamma}$ qui est le point de départ de l'analyse précédente; c'est grâce à elle que la densité du courant ne devient pas infinie; et cependant dans les équations (3) et dans la formule finale, cette capacité ne figure pas.

Il y a là un paradoxe qui s'explique aisément.

Quelque petite que soit cette capacité, la densité du courant ne pourra devenir infinie, mais elle pourra dans certains cas devenir très grande et la valeur maximum qu'elle pourra atteindre sera d'autant plus grande que cette capacité sera plus faible. Et c'est pour cette raison que l'analyse donnait une densité infinie quand on ne tenait pas compte de cette capacité.

LA LUMIÈRE ET L'ÉLECTRICITÉ

D'APRÈS

MAXWELL ET HERTZ

Annuaire du Bureau des Longitudes, p. A.1-A.22 (1894).
Revue scientifique, 4e série, t. I, p. 106-111 (1894).

Au moment où les expériences de Fresnel forçaient tous les savants à admettre que la lumière est due aux vibrations d'un fluide très subtil, remplissant les espaces interplanétaires, les travaux d'Ampère faisaient connaître les lois des actions mutuelles des courants et fondaient l'Électrodynamique.

On n'avait qu'un pas à faire pour supposer que ce même fluide, l'éther, qui est la cause des phénomènes lumineux, est en même temps le véhicule des actions électriques; ce pas, l'imagination d'Ampère le fit; mais l'illustre physicien, en énonçant cette séduisante hypothèse, ne prévoyait sans doute pas qu'elle dût si vite prendre une forme plus précise et recevoir un commencement de confirmation.

Ce ne fut là pourtant qu'un rêve sans consistance jusqu'au jour où les mesures électriques mirent en évidence un fait inattendu; voici ce fait qui a été rappelé par M. Cornu, dans le dernier *Annuaire*, à la fin de la lumineuse Notice que ce savant a consacrée à la définition des unités électriques. Pour passer du système d'unités électrostatiques au système d'unités électrodynamiques, on se sert d'un certain *facteur de transformation* dont je ne rappellerai pas la définition puisqu'on la trouve dans la Notice de M. Cornu. Ce facteur, que l'on appelle aussi le *rapport des unités, est précisément égal à la vitesse de la lumière*.

Les observations devinrent bientôt assez précises pour qu'on ne pût songer à attribuer cette concordance au hasard. On ne pouvait donc douter qu'il n'y eût certains rapports intimes entre les phénomènes optiques et les phénomènes électriques. Mais la nature de ces rapports nous échapperait peut-être encore si le génie de Maxwell ne l'avait devinée.

Courants de déplacement.

Tout le monde sait que l'on peut répartir les corps en deux classes, les conducteurs où nous constatons des déplacements de l'électricité, c'est-à-dire des courants voltaïques, et les isolants ou diélectriques. Pour les anciens électriciens, les diélectriques étaient purement inertes et leur rôle se bornait à s'opposer au passage de l'électricité. S'il en était ainsi, on pourrait remplacer un isolant quelconque par un isolant différent sans rien changer aux phénomènes. Les expériences de Faraday ont montré qu'il n'en est rien : deux condensateurs de même forme et de mêmes dimensions, mis en communication avec les mêmes sources d'électricité, ne prendront pas la même charge, bien que l'épaisseur de la lame isolante soit la même, si la *nature* de la matière isolante diffère. Maxwell avait fait une étude trop profonde des travaux de Faraday pour ne pas comprendre l'importance des diélectriques et la nécessité de leur restituer leur véritable rôle.

D'ailleurs, s'il est vrai que la lumière ne soit qu'un phénomène électrique, il faut bien, quand elle se propage à travers un corps isolant, que ce corps soit le siège de ce phénomène; il doit donc y avoir des phénomènes électriques localisés dans les diélectriques; mais quelle en peut être la nature ? Maxwell répond hardiment : ce sont des courants.

Toute l'expérience de son temps semblait le contredire; on n'avait jamais observé de courant que dans les conducteurs. Comment Maxwell pouvait-il concilier son audacieuse hypothèse avec un fait si bien constaté ? Pourquoi, dans certaines circonstances, ces courants hypothétiques produisent-ils des effets manifestes et sont-ils absolument inobservables dans les conditions ordinaires ?

C'est que les diélectriques opposent au passage de l'électricité, non pas une résistance plus grande que les conducteurs, mais une résistance d'une autre nature. Une comparaison fera mieux comprendre la pensée de Maxwell.

Si l'on s'efforce de tendre un ressort, on rencontre une résistance qui va en croissant à mesure que le ressort se bande. Si donc on ne dispose que d'une force limitée, il arrivera un moment où, cette résistance ne pouvant plus être surmontée, le mouvement s'arrêtera et l'équilibre s'établira; enfin, quand la force cessera d'agir, le ressort restituera en se débandant tout le travail qu'on aura dépensé pour le bander.

Supposons au contraire qu'on veuille déplacer un corps plongé dans l'eau; ici encore on éprouvera une résistance, qui dépendra de la vitesse, mais qui cependant, si cette vitesse demeure constante, n'ira pas en croissant à mesure que le corps s'avancera; le mouvement pourra donc se prolonger tant que la force motrice agira et l'on n'atteindra jamais l'équilibre; enfin, quand la force disparaîtra, le corps ne tendra pas à revenir en arrière et le travail dépensé pour le faire avancer ne pourra être restitué : il aura tout entier été transformé en chaleur par la viscosité de l'eau.

Le contraste est manifeste, et il est nécessaire de distinguer la résistance *élastique* de la résistance *visqueuse*. Alors les diélectriques se comporteraient pour les mouvements de l'électricité comme les solides élastiques pour les mouvements matériels, tandis que les conducteurs se comporteraient comme les liquides visqueux. De là, deux catégories de courants : les courants de *déplacement* ou de Maxwell qui traversent les diélectriques et les courants ordinaires de *conduction* qui circulent dans les conducteurs.

Les premiers, ayant à surmonter une sorte de résistance *élastique*, ne pourraient être que de courte durée; car cette résistance croissant sans cesse, l'équilibre serait promptement établi.

Les courants de conduction, au contraire, devraient vaincre une sorte de résistance visqueuse et pourraient par conséquent se prolonger aussi longtemps que la force électromotrice qui leur donne naissance.

Reprenons la comparaison si commode que M. Cornu a empruntée à l'Hydraulique. Supposons que nous ayons dans un réservoir de l'eau sous pression; mettons ce réservoir en communication avec un tuyau vertical : l'eau va y monter; mais le mouvement s'arrêtera dès que l'équilibre hydrostatique sera atteint. Si le tuyau est large, il n'y aura pas de frottement ni de perte de charge, et l'eau ainsi élevée pourra être employée pour produire du travail. Nous avons là l'image du courant de déplacement.

Si au contraire l'eau du réservoir s'écoule par un tuyau horizontal, le mou-

vement continuera tant que le réservoir ne sera pas vide; mais, si le tuyau est étroit, il y aura une perte de travail considérable et une production de chaleur par le frottement; nous avons là l'image du courant de conduction.

Bien qu'il soit impossible et quelque peu oiseux de chercher à se représenter tous les détails du mécanisme, on peut dire que tout se passe comme si les courants de déplacement avaient pour effet de bander une multitude de petits ressorts. Quand ces courants cessent, l'équilibre électrostatique est établi et ces ressorts sont d'autant plus tendus que le champ électrique est plus intense. Le travail accumulé dans ces ressorts, c'est-à-dire l'énergie électrostatique, peut être restitué intégralement dès qu'ils peuvent se débander; c'est ainsi qu'on obtiendra du travail mécanique quand on laissera les conducteurs obéir aux *attractions électrostatiques*. Ces attractions seraient dues ainsi à la pression exercée sur les conducteurs par les ressorts bandés. Enfin, pour poursuivre la comparaison jusqu'au bout, il faudrait rapprocher la décharge disruptive de la rupture de quelques ressorts trop tendus.

Au contraire, le travail employé à produire des courants de conduction est perdu et tout entier transformé en chaleur, comme celui que l'on dépense pour vaincre les frottements ou la viscosité des fluides. *C'est pour cela que les fils conducteurs s'échauffent.*

Dans la manière de voir de Maxwell, *il n'y a que des courants fermés*. Pour les anciens électriciens, il n'en était pas de même; ils regardaient comme fermé le courant qui circule dans un fil joignant les deux pôles d'une pile. Mais si, au lieu de réunir directement les deux pôles, on les met respectivement en communication avec les deux armatures d'un condensateur, le courant instantané qui dure jusqu'à ce que le condensateur soit chargé était considéré comme ouvert; il allait, pensait-on, d'une armature à l'autre à travers le fil de communication et la pile, et s'arrêtait à la surface de ces deux armatures. Maxwell, au contraire, suppose que le courant traverse, sous forme de courant de déplacement, la lame isolante qui sépare les deux armatures et qu'il se ferme ainsi complètement. La résistance élastique qu'il rencontre dans ce passage explique sa faible durée.

Les courants peuvent se manifester de trois manières : par leurs effets calorifiques, par leur action sur les aimants et les courants, par les courants induits auxquels ils donnent naissance. Nous avons vu plus haut pourquoi les courants de conduction développent de la chaleur et pourquoi les courants de déplacement n'en font pas naître. En revanche, d'après l'hypothèse de Maxwell, les

courants qu'il imagine doivent, comme les courants ordinaires, produire des effets électromagnétiques, électrodynamiques et inductifs.

Pourquoi ces effets n'ont-ils encore pu être mis en évidence ? C'est parce qu'un courant de déplacement quelque peu intense ne peut durer longtemps, *dans le même sens;* car la tension de nos ressorts, sans cesse croissante, l'arrêterait bientôt. Il ne peut donc y avoir dans les diélectriques, ni courant continu de longue durée, ni courant alternatif sensible de longue période. Les effets deviendront au contraire observables si l'alternance est très rapide.

Nature de la lumière.

C'est là, d'après Maxwell, l'origine de la lumière; une onde lumineuse est une suite de courants alternatifs qui se produisent dans les diélectriques et même dans l'air ou le vide interplanétaire et qui changent de sens un quatrillion de fois par seconde. L'induction énorme due à ces alternances fréquentes produit d'autres courants dans les parties voisines des diélectriques, et c'est ainsi que les ondes lumineuses se propagent de proche en proche. Le calcul montre que la vitesse de propagation est égale au *rapport des unités*, c'est-à-dire à la vitesse de la lumière.

Ces courants alternatifs sont des espèces de vibrations électriques; mais ces vibrations sont-elles longitudinales comme celles du son, ou transversales comme celles de l'éther de Fresnel ? Dans le cas du son, l'air subit des condensations et des raréfactions alternatives. Au contraire, l'éther de Fresnel se comporte dans ses vibrations comme s'il était formé de couches incompressibles susceptibles seulement de glisser l'une sur l'autre. S'il y avait des courants *ouverts*, l'électricité se portant d'un bout à l'autre d'un de ces courants s'accumulerait à l'une de ses extrémités; elle se condenserait ou se raréfierait comme l'air, ses vibrations seraient longitudinales. Mais Maxwell n'admet que des courants fermés; cette accumulation est impossible et l'électricité se comporte comme l'éther incompressible de Fresnel, ses vibrations sont transversales.

Vérification expérimentale.

Ainsi nous retrouvons tous les résultats de la théorie des ondes. Ce n'était pas assez pourtant pour que les physiciens, séduits plutôt que convaincus, se

décidassent à adopter les idées de Maxwell ; tout ce qu'on pouvait dire en leur faveur, c'est qu'elles n'étaient en contradiction avec aucun des faits observés, et que c'eût été bien dommage qu'elles ne fussent pas vraies. Mais la confirmation expérimentale manquait : elle devait se faire attendre vingt-cinq ans.

Il fallait trouver, entre la théorie ancienne et celle de Maxwell, une divergence qui ne fût pas trop délicate pour nos grossiers moyens d'investigation. Il n'y en avait qu'une dont on pût tirer un *experimentum crucis*.

L'ancienne Électrodynamique exige que l'induction électromagnétique se produise instantanément ; d'après la doctrine nouvelle, elle doit au contraire se propager avec la vitesse de la lumière.

Il s'agit donc de mesurer ou au moins de constater la vitesse de propagation des effets inductifs ; c'est ce qu'a fait l'illustre physicien allemand Hertz par la méthode des interférences.

Cette méthode est bien connue par ses applications aux phénomènes optiques. Deux rayons lumineux issus de la même source interfèrent quand ils aboutissent au même point après avoir suivi des chemins différents. Si la différence de ces chemins est égale à une longueur d'onde, c'est-à-dire au chemin parcouru pendant une période, ou à un nombre entier de longueurs d'onde, l'une des vibrations est en retard sur l'autre d'un nombre entier de périodes ; les deux vibrations en sont donc à la même phase, elles sont de même sens et s'ajoutent. Si, au contraire, la différence de marche des deux rayons est égale à un nombre impair de demi-longueurs d'onde, les deux vibrations sont de sens contraire et se retranchent l'une de l'autre.

Les ondes lumineuses ne sont pas seules susceptibles d'interférence ; tout phénomène périodique et alternatif se propageant avec une vitesse finie produira des effets analogues. C'est ce qui arrive pour le son, c'est ce qui doit arriver aussi pour l'induction électrodynamique, si la vitesse de propagation en est finie ; si au contraire cette propagation était instantanée, il n'y aurait pas d'interférence.

Mais on ne pourrait mettre ces interférences en évidence si la longueur d'onde était plus grande que les salles des laboratoires, plus grande que l'espace que l'induction peut franchir sans trop s'affaiblir. Il faut donc des courants de période très courte.

Excitateurs électriques.

Voyons d'abord comment on peut les obtenir à l'aide d'un appareil qui est un véritable *pendule électrique*. Supposons deux conducteurs réunis par un fil : s'ils ne sont pas au même potentiel, l'équilibre électrique est rompu ; de même que l'équilibre mécanique est dérangé, quand un pendule est écarté de la verticale. Dans un cas comme dans l'autre, l'équilibre tend à se rétablir.

Un courant circule dans le fil et tend à égaliser le potentiel des deux conducteurs, de même que le pendule se rapproche de la verticale. Mais le pendule ne s'arrêtera pas dans sa position d'équilibre ; ayant acquis une certaine vitesse, il va, grâce à son inertie, dépasser cette position. De même, quand nos conducteurs seront déchargés, l'équilibre électrique momentanément rétabli ne se maintiendra pas et sera aussitôt détruit par une cause analogue à l'inertie; cette cause c'est la *self-induction*. On sait que quand un courant cesse, il fait naître dans les fils voisins un courant induit de même sens. Le même effet se produit dans le fil même où circulait le courant inducteur qui se trouve ainsi pour ainsi dire continué par le courant induit.

En d'autres termes, un courant persistera après la disparition de la cause qui l'a fait naître, de même qu'un mobile ne s'arrête pas quand la force qui l'avait mis en mouvement cesse d'agir.

Quand les deux potentiels seront devenus égaux, le courant continuera donc dans le même sens et fera prendre aux deux conducteurs des charges opposées à celles qu'ils avaient d'abord.

Dans ce cas comme dans celui du pendule, la position de l'équilibre est dépassée : il faut, pour le rétablir, revenir en arrière.

Quand l'équilibre est atteint de nouveau, la même cause le rompt aussitôt et les oscillations se poursuivent sans cesse.

Le calcul montre que la période dépend de la capacité des conducteurs ; il suffit donc de diminuer suffisamment cette capacité, ce qui est facile, pour avoir un *pendule électrique* susceptible de produire des courants d'alternance extrêmement rapide.

Tout cela était bien connu par les théories de Lord Kelvin et par les expériences de Feddersen sur la décharge oscillante de la bouteille de Leyde. Ce n'est donc pas ce qui constitue l'idée originale de Hertz.

Mais il ne suffit pas de construire un pendule, il faut encore le mettre en mouvement. Pour cela, il faut qu'une cause quelconque l'écarte de sa position d'équilibre, puis qu'elle cesse d'agir brusquement, je veux dire *dans un temps très court par rapport à la durée d'une période;* sans cela il n'oscillera pas.

Si, avec la main, par exemple, on écarte un pendule de la verticale, puis, qu'au lieu de le lâcher tout à coup, on laisse le bras se détendre lentement sans desserrer les doigts, le pendule, toujours soutenu, arrivera sans vitesse à sa position d'équilibre et ne la dépassera pas.

On conçoit donc que, avec des périodes d'un cent-millionième de seconde, aucun système de déclenchement mécanique ne pourrait fonctionner, quelque rapide qu'il puisse nous paraître par rapport à nos unités de temps habituelles. Voici comment Hertz a résolu le problème.

Reprenons notre pendule électrique, et pratiquons dans le fil qui joint les deux conducteurs une coupure de quelques millimètres. Cette coupure partage notre appareil en deux moitiés symétriques que nous mettrons en communication avec les deux pôles d'une bobine de Ruhmkorff. Le courant induit va charger nos deux conducteurs et la différence de leur potentiel va croître avec une lenteur relative.

D'abord, la coupure empêchera les conducteurs de se décharger; l'air qui s'y trouve joue le rôle d'isolant et maintient notre pendule écarté de sa position d'équilibre.

Mais quand la différence de potentiel sera assez grande, l'étincelle de la bobine éclatera et frayera un chemin à l'électricité accumulée sur les conducteurs. La coupure cessera tout à coup d'isoler et, par une sorte de déclenchement électrique, notre pendule sera délivré de la cause qui l'empêchait de retourner à l'équilibre. Si des conditions assez complexes, bien étudiées par Hertz, sont remplies, ce déclenchement est assez brusque pour que les oscillations se produisent.

Cet appareil appelé *excitateur* produit des courants qui changent de sens de cent millions à un milliard de fois par seconde. Grâce à cette fréquence extrême, ils peuvent produire des effets d'induction à grande distance. Pour mettre ces effets en évidence, on se sert d'un autre pendule électrique nommé *résonateur*. Dans ce nouveau pendule, la coupure du milieu et la bobine qui ne servent qu'au déclenchement sont supprimées; les deux conducteurs se réduisent à deux très petites sphères et le fil est recourbé en cercle de manière à rapprocher les deux sphères l'une de l'autre.

L'induction due à l'excitateur mettra ce résonateur en vibration, d'autant plus facilement que les périodes seront moins différentes. A certaines phases de la vibration, la différence de potentiel des deux sphères sera assez grande pour que des étincelles jaillissent.

Production des interférences.

On a ainsi un instrument qui met en évidence les effets de l'onde d'induction partie de l'excitateur. On peut faire cette étude de deux manières : ou bien exposer le résonateur à l'induction directe de l'excitateur à grande distance ; ou bien faire agir cette induction à petite distance sur un long fil conducteur que l'onde électrique va suivre et qui agira à son tour par induction à petite distance sur le résonateur.

Que l'onde se propage le long d'un fil ou à travers l'air, on peut produire des interférences par réflexion. Dans le premier cas, elle se réfléchira à l'extrémité du fil qu'elle suivra de nouveau en sens inverse ; dans le second, elle pourra se réfléchir sur une feuille métallique qui fera office de miroir. Dans les deux cas, l'onde réfléchie interférera avec l'onde directe et l'on trouvera des positions où l'étincelle du résonateur s'éteindra.

Les expériences faites avec le long fil sont plus faciles, elles nous fournissent beaucoup de renseignements précieux, mais elles ne sauraient servir d'*experimentum crucis*, car, dans l'ancienne théorie comme dans la nouvelle, la vitesse de l'onde électrique le long d'un fil doit être égale à celle de la lumière. Les expériences sur l'induction directe à grande distance sont au contraire décisives. Elles montrent que non seulement la vitesse de propagation de l'induction à travers l'air est finie, mais qu'elle est égale à la vitesse de l'onde propagée le long d'un fil, conformément aux idées de Maxwell.

Synthèse de la lumière.

J'insisterai moins sur d'autres expériences de Hertz, plus brillantes, mais moins instructives. Concentrant avec un miroir parabolique l'onde d'induction émanée de l'excitateur, le savant allemand obtient un véritable faisceau de rayons de force électrique, susceptibles de se réfléchir et de se réfracter régu-

lièrement. Les rayons, si la période, déjà si petite, était un million de fois plus courte encore, ne différeraient pas des rayons lumineux. On sait que le soleil nous envoie plusieurs sortes de radiations, les unes lumineuses parce qu'elles agissent sur la rétine, les autres obscures, ultraviolettes ou infrarouges, qui se manifestent par leurs effets chimiques ou calorifiques. Les premières ne doivent leurs qualités qui nous les font paraître d'une autre nature, qu'à une sorte de hasard physiologique. Pour le physicien, l'infrarouge ne diffère pas plus du rouge que le rouge du vert; la longueur d'onde est seulement plus grande; celle des radiations hertziennes est beaucoup plus grande encore, mais il n'y a là que des différences de degré et l'on peut dire, si les idées de Maxwell sont vraies, que l'illustre professeur de Bonn a réalisé une véritable *synthèse de la lumière*.

Conclusions.

Il ne faut pas cependant que notre admiration pour tant de succès inespérés nous fasse oublier les progrès qui restent à accomplir. Cherchons donc à nous rendre compte exactement des résultats qui sont définitivement acquis.

D'abord la vitesse de l'induction directe à travers l'air est finie, sans quoi les interférences seraient impossibles. *L'ancienne électrodynamique est donc condamnée.* Que doit-on mettre à la place ? Est-ce la doctrine de Maxwell (ou au moins quelque chose d'approchant, car on ne saurait demander à la divination du savant anglais d'avoir prévu la vérité dans tous ses détails) ? Bien que les probabilités s'accumulent, la démonstration complète n'est pas encore faite.

Nous pouvons mesurer la longueur d'onde des oscillations hertziennes; cette longueur est le produit de la période par la vitesse de propagation. Nous connaîtrions donc cette vitesse si nous connaissions la période; mais cette dernière est si petite que nous ne pouvons la mesurer : nous pouvons seulement la calculer par une formule due à Lord Kelvin. Ce calcul conduit à des chiffres qui sont d'accord avec la théorie de Maxwell; mais les derniers doutes ne seront dissipés que quand la vitesse de propagation aura été directement mesurée.

Ce n'est pas tout, les choses sont loin d'être aussi simples qu'on pourrait le croire d'après ce court exposé. Diverses circonstances viennent les compliquer.

D'abord il y a autour de l'excitateur un véritable rayonnement d'induction;

l'énergie de cet appareil *rayonne* donc au dehors et, comme aucune source ne vient l'alimenter, elle ne tarde pas à se dissiper et les oscillations s'éteignent rapidement. C'est là qu'on doit chercher l'explication du phénomène de la *résonance multiple* qui a été découvert par MM. Sarasin et de la Rive et qui avait d'abord paru inconciliable avec la théorie.

D'autre part, on sait que la lumière ne suit pas exactement les lois de l'Optique géométrique, et l'écart, qui produit la *diffraction*, est d'autant plus considérable que la longueur d'onde est plus grande. Avec les grandes longueurs des ondulations hertziennes, ces phénomènes doivent prendre une importance énorme et tout troubler. Sans doute il est heureux, pour le moment du moins, que nos moyens d'observation soient si grossiers, sans quoi la simplicité qui nous a séduit au premier abord, ferait place à un dédale où nous ne pourrions nous reconnaître. C'est de là probablement que proviennent diverses anomalies que l'on n'a pu expliquer jusqu'ici. C'est aussi pour cette raison que les expériences sur la réfraction des rayons de force électrique n'ont, comme je l'ai dit plus haut, que peu de valeur démonstrative.

Il reste une difficulté qui est plus grave, mais qui n'est sans doute pas insurmontable. D'après Maxwell, le coefficient d'induction électrostatique d'un corps transparent devrait être égal au carré de son indice de réfraction. Il n'en est rien, les corps qui suivent la loi de Maxwell sont des exceptions. On est évidemment en présence de phénomènes beaucoup plus complexes qu'on ne le croyait d'abord; mais on n'a encore pu rien débrouiller et les expériences elles-mêmes sont contradictoires.

Il reste donc beaucoup à faire; l'identité de la lumière et de l'électricité est dès aujourd'hui autre chose qu'une hypothèse séduisante : c'est une vérité probable, mais ce n'est pas encore une vérité démontrée.

Note I.

Depuis que ces lignes ont été écrites, un grand pas a été fait. M. Blondlot est en effet parvenu, grâce à d'ingénieuses dispositions expérimentales, à mesurer *directement* la vitesse d'une perturbation qui se propage le long d'un fil. Le nombre trouvé diffère peu du rapport des unités, c'est-à-dire de la vitesse de la lumière, qui est de 300 000 km par seconde. Comme les expériences d'interférence faites à Genève par MM. Sarasin et de la Rive ont montré, ainsi que je l'ai dit plus haut, que l'induction se propage à travers l'air avec la même vitesse qu'une perturbation

électrique qui suit un fil conducteur, nous devons conclure que la vitesse de l'induction est la même que celle de la lumière, ce qui est une confirmation des idées de Maxwell.

M. Fizeau avait trouvé autrefois, pour la vitesse de l'électricité, un nombre beaucoup plus faible, 180 000 km environ. Il n'y a là aucune contradiction; les phénomènes observés étaient en effet très différents. Les courants dont se servait M. Fizeau étaient intermittents, mais de faible fréquence; *ils pénétraient jusqu'à l'axe du fil*; les courants de M. Blondlot, alternatifs et de période très courte, restaient *superficiels* et confinés dans une couche mince de moins d'un centième de millimètre d'épaisseur. On conçoit que les lois de la propagation ne soient pas les mêmes dans les deux cas.

Note II.

J'ai cherché plus haut à faire comprendre, par une comparaison, l'explication des attractions électrostatiques et des phénomènes d'induction; voyons maintenant quelle idée se fait Maxwell de la cause qui produit les attractions mutuelles des courants.

Tandis que les attractions électrostatiques seraient dues à la tension d'une multitude de petits ressorts, ou, en d'autres termes, à l'élasticité de l'éther, ce seraient la force vive et l'inertie de ce fluide qui produiraient les phénomènes d'induction et les actions électrodynamiques.

Le calcul complet est beaucoup trop long pour trouver place ici, et je me contenterai encore d'une comparaison. Je l'emprunterai à un appareil bien connu, le régulateur à force centrifuge.

La force vive de cet appareil est proportionnelle au carré de la vitesse angulaire de rotation et au carré de l'écartement des boules.

D'après l'hypothèse de Maxwell, l'éther est en mouvement dès qu'il y a des courants voltaïques, et sa force vive est proportionnelle au carré de l'intensité de ces courants, qui correspond ainsi, dans le parallèle que je cherche à établir, à la vitesse angulaire de rotation.

Si nous considérons deux courants de même sens, cette force vive, à intensité égale, sera d'autant plus grande que les courants seront plus rapprochés; si les courants sont de sens contraire, elle sera d'autant plus grande qu'ils seront plus éloignés.

Cela posé, poursuivons notre comparaison.

Pour augmenter la vitesse angulaire du régulateur, et par conséquent sa force vive, il faut lui fournir du travail, et surmonter par conséquent une résistance que l'on appelle son *inertie*.

De même, augmenter l'intensité des courants, c'est augmenter la force vive de l'éther; et il faudra pour le faire fournir du travail, et surmonter une résistance, qui n'est autre chose que l'inertie de l'éther, et que l'on appelle l'*induction*.

La force vive sera plus grande si les courants sont de même sens et rapprochés; le travail à fournir et la force contre-électromotrice d'induction seront donc plus

grands. C'est ce que l'on exprime, dans le langage ordinaire, en disant que l'induction mutuelle des deux courants s'ajoute à leur self-induction. C'est le contraire si les deux courants sont de sens opposé.

Si l'on écarte les boules du régulateur, il faudra, pour maintenir la vitesse angulaire, fournir du travail, parce que, à vitesse angulaire égale, la force vive est d'autant plus grande que les boules sont plus écartées.

De même, si deux courants sont de même sens et qu'on les rapproche, il faudra, pour maintenir l'intensité, fournir du travail, puisque la force vive augmentera. On aura donc à surmonter une force électromotrice d'induction qui tendrait à diminuer l'intensité des courants. Elle tendrait au contraire à l'augmenter, si les courants étaient de même sens et qu'on les éloignât, ou s'ils étaient de sens contraire et qu'on les rapprochât.

Enfin, la force centrifuge tend à écarter les boules, *ce qui aurait pour effet d'augmenter la force vive si l'on maintient la vitesse angulaire constante*.

De même, quand les courants sont de même sens, ils *s'attirent*, c'est-à-dire qu'ils tendent à se rapprocher, *ce qui aurait pour effet d'augmenter la force vive si l'on maintient l'intensité constante*. S'ils sont de sens contraire, ils se repoussent et tendent à s'éloigner, ce qui aurait encore pour effet d'augmenter la force vive à intensité constante.

Ainsi les phénomènes électrostatiques seraient dus à l'élasticité de l'éther, et les phénomènes électrodynamiques à sa force vive. Maintenant, cette élasticité elle-même devrait-elle s'expliquer, comme le pense lord Kelvin, par des rotations de très petites parties de fluide ? Diverses raisons peuvent rendre cette hypothèse séduisante, mais elle ne joue aucun rôle essentiel dans la théorie de Maxwell, qui en est indépendante.

De même, j'ai fait des comparaisons avec divers mécanismes. Mais ce ne sont que des comparaisons, et même assez grossières. Il ne faut pas, en effet, chercher dans le livre de Maxwell une explication mécanique complète des phénomènes électriques, mais seulement l'exposé des conditions auxquelles toute explication doit satisfaire. Et ce qui fait justement que l'œuvre de Maxwell sera probablement durable, c'est qu'elle est indépendante de toute explication particulière.

LES RAYONS CATHODIQUES

ET

LES RAYONS RÖNTGEN

Revue générale des Sciences pures et appliquées, t. 7, p. 52-59 (1896).

I. — Expériences de Röntgen.

N'étant ni physicien, ni médecin, c'est grâce au hasard que j'ai été chargé de présenter à l'Académie des Sciences, la communication de MM. les Docteurs Oudin et Barthélemy. J'ai donc peu de choses à ajouter à ce que tout le monde sait.

Les lecteurs de la *Revue* sont déjà au courant des propriétés principales des rayons cathodiques par deux études de M. W. Crookes qui ont paru dans le tome II et par un article de M. Lucien Poincaré (t. V, p. 701) qui résumait les découvertes plus récentes de Hertz et de Lenard. Ils savent donc qu'un tube de Crookes où le vide est assez parfait devient fluorescent, quand il est le siège d'une décharge électrique et que cette fluorescence est attribuée à des radiations spéciales émanées de la *cathode* ou électrode négative.

Le Professeur Röntgen, ayant enveloppé d'un carton noir un tube de Crookes où se produisaient des rayons cathodiques, plaça ce tube dans une pièce obscure et en approcha un écran en papier recouvert de platinocyanure de baryum. Cet écran devint fluorescent, malgré l'interposition du carton noir, et cette fluorescence persistait à une distance de 2^m.

Il aperçut immédiatement la portée extraordinaire de cette découverte; il fallait admettre, en effet, l'existence d'un agent nouveau, susceptible de

traverser un carton noir assez épais, différent par conséquent de la lumière visible ou ultraviolette, mais produisant comme elle la fluorescence.

M. Röntgen ne tarda pas à découvrir que les radiations nouvelles impressionnent la plaque photographique, soient qu'elles aient une action chimique



Fig. 1. — Fil de fer enroulé, photographié à travers une épaisse planche de bois.

directe, soit que, sous leur influence, la matière de la plaque elle-même devienne fluorescente. Bien que ces radiations n'aient aucune action sur la rétine, il y a donc deux moyens d'en constater la présence et, par conséquent, de les étudier. Elles peuvent nous être révélées, soit par la photographie, soit par la fluorescence qu'elles communiquent à certains corps.

Mais la propriété la plus curieuse de ces rayons, que le savant professeur de Würzbourg appelle les rayons X, c'est la facilité avec laquelle ils traversent les corps opaques.

Un livre de 1000 pages, une planche de 2 ou 3^{cm} d'épaisseur, les laissent passer assez facilement. Les métaux sont moins transparents, surtout les métaux lourds comme le plomb et le platine.

En général, on peut dire que l'opacité d'un corps croît avec sa densité, mais notablement plus vite que cette densité.

On conçoit alors qu'un objet métallique, par exemple, enfermé dans une boîte en bois, puisse être reproduit par la photographie. La boîte, en effet, est transparente, tandis que l'objet est opaque; tout se passera donc comme si cet objet était placé dans une boîte en verre, et si, éclairé par une source de lumière ordinaire, il projetait son ombre sur une plaque photographique. Cette ombre viendrait évidemment en noir sur le positif. Un des résultats les plus surprenants obtenus dans cette voie est la photographie parfaitement nette (*fig.* 2) d'une aiguille aimantée, enfermée dans une boîte métallique probablement en aluminium ?

Les chairs sont transparentes; les os relativement opaques; aussi, dans la photographie d'une main, les os apparaîtront comme une ombre assez forte, tandis que les chairs ne donneront qu'une pénombre très légère; une bague donnera une image d'un noir intense (*fig.* 3).

La photographie d'une plaque de zinc laminé (p. 63) montre l'hétérogénéité du métal. M. Röntgen a bien voulu me faire l'honneur de m'envoyer un certain nombre de photographies dont quelques-unes sont reproduites ici (*fig.* 1 et 2).

Ces expériences excitèrent à un haut degré la curiosité du monde savant et furent aussitôt reproduites un peu partout. A Paris elles le furent d'abord par MM. les Docteurs Oudin et Barthélemy et, d'autre part, par M. Séguy.

MM. Oudin et Barthélemy ont opéré avec un tube de Crookes fourni par M. Séguy. Ce tube avait la forme d'une sphère de 7^{cm} de diamètre environ. La cathode se réduisait à un simple fil dont l'extrémité envoyait des radiations dans tous les sens, de sorte que toute la surface du verre était illuminée d'une lueur fluorescente causée par les rayons cathodiques.

On enveloppa ensuite une plaque Lumière bleue dans plusieurs doubles de papier noir : on la plaça à 10^{cm} environ du tube, et l'on posa la main dessus, la durée de pose fut de 20 minutes. L'image du squelette, reproduite dans la figure 3, est d'une netteté parfaite.

On peut donc espérer qu'on réussira à photographier à travers toute l'épaisseur du corps. On pouvait craindre que les rayons Röntgen ne fussent non seulement absorbés, mais diffusés dans les milieux relativement opaques. C'eût été un obstacle qui eût empêché de traverser les corps un peu épais.

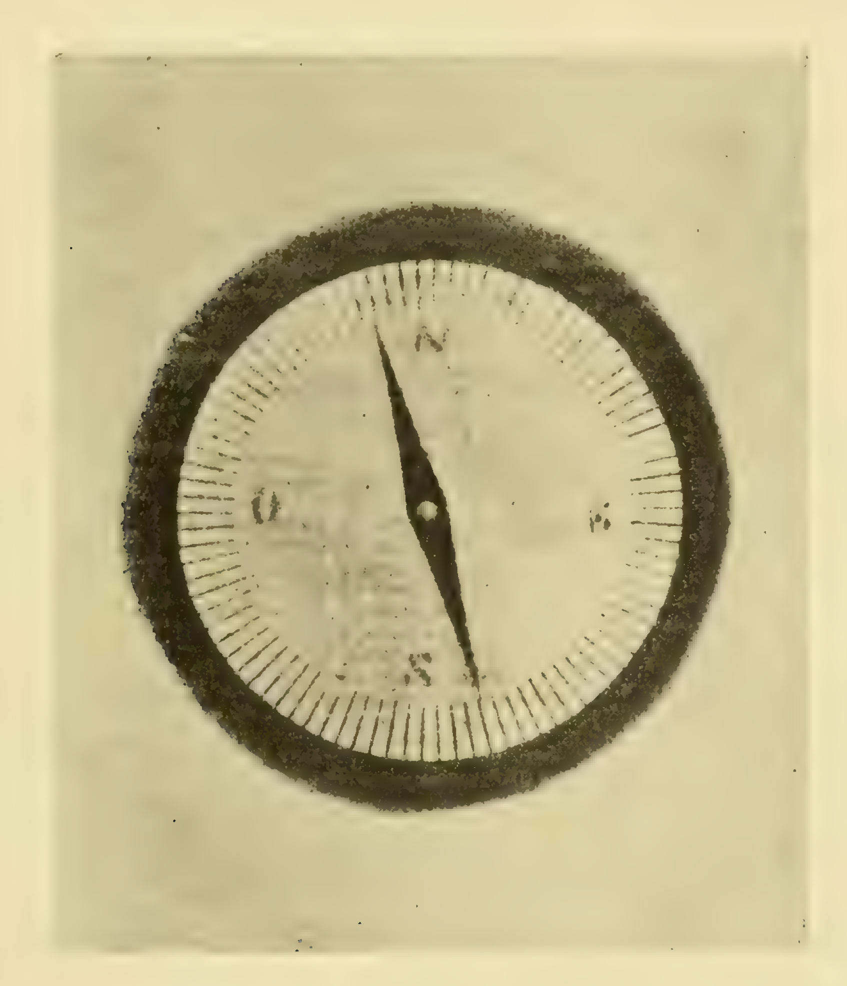


Fig. 2. — Cadran d'une boussole photographié à travers la boîte qui la contenait.

Cette diffusion ne paraît pas exister d'une façon notable. On n'a donc à vaincre que l'absorption, ce qui n'est qu'une affaire d'intensité et de durée de pose.

On conçoit, sans qu'il soit nécessaire d'insister, l'importance de ces résultats au point de vue chirurgical. Des expériences systématiques vont être entre-

prises dans quelques jours à l'hôpital Trousseau, sous la direction de M. le Professeur Lannelongue (1).

II. — Propriétés des Rayons X.

Quelle est la nature de ces phénomènes merveilleux et mystérieux ?

1° *Ce sont des rayons*, comme le démontrent les ombres portées par les corps relativement opaques, et dont les contours sont suffisamment nets pour permettre la reproduction photographique. Leur propagation est donc rectiligne.

2° *Ce ne sont pas des rayons lumineux*, dus à des vibrations transversales de l'éther. On sait que ces vibrations peuvent donner lieu, selon leur durée, aux manifestations les plus diverses. On trouve, successivement, en parcourant toute l'échelle, depuis les plus grandes longueurs d'onde jusqu'aux plus petites, les rayons hertziens, les rayons infrarouges ou calorifiques, les rayons visibles, les rayons ultraviolets ou chimiques. Malgré la diversité de ces effets, on sait qu'il n'y a entre eux qu'une différence quantitative ; il n'y a, en réalité, pas plus de différence entre les rayons hertziens et les rayons visibles, qu'entre la lumière rouge et la lumière verte.

Dès lors, semble-t-il, qui empêche, pour expliquer un ordre nouveau de manifestation, d'ajouter un échelon de plus à cette échelle ? Ne voit-on pas certains rayons ultraviolets traverser l'argent, qui est opaque pour les radiations ordinaires ? N'a-t-on pas même réalisé de la sorte, il y a quelques années, ce qu'on a déjà appelé la photographie de l'invisible ?

Cette hypothèse paraît devoir être rejetée. En effet, *les rayons Röntgen ne se réfractent pas* : ils ne se réfléchissent pas non plus, du moins régulièrement. C'est là leur propriété la plus extraordinaire, qui les distingue absolument des ondulations transversales ; ces dernières, en effet, depuis les ondes hertziennes jusqu'aux ondes ultraviolettes sont réfrangibles, et leur réfrangibilité va *en croissant* d'une façon régulière quand la longueur d'onde diminue.

---

(1) Dans le service de M. Lannelongue, ont déjà été obtenues d'importantes épreuves (*fig.* 4 et 5). (N. *de la Dir.*).

3° *Ce ne sont pas non plus des rayons cathodiques.* On sait, il est vrai, depuis Lenard, que les rayons cathodiques, produits dans le vide de Crookes,



Fig. 3. — Squelette d'une main photographié à travers les tissus. — La main portait une bague qui a, comme les tissus osseux, intercepté les rayons.

peuvent traverser une petite plaque d'aluminium, sortir du tube, et se propager ensuite soit dans l'atmosphère ordinaire, soit même dans le vide absolu.

Mais dans l'atmosphère ordinaire ils subissent une diffusion considérable et ne peuvent se propager qu'à quelques centimètres.

Les rayons X, au contraire, vont sans dévier jusqu'à 2^{m} de distance. D'autre part, les rayons cathodiques ordinaires seraient incapables de traverser la plupart des corps opaques, même sous une faible épaisseur.

Voilà donc deux différences entre les rayons cathodiques et les rayons Röntgen. Mais il y en a une autre, beaucoup plus importante encore : *les rayons Röntgen ne sont pas déviés par l'aimant.*

4° M. Röntgen a été ainsi amené à se demander si ces phénomènes ne sont pas dus aux *vibrations longitudinales de l'éther*. Il n'a pu qu'émettre une hypothèse; il était hors d'état de la vérifier. Les expériences d'interférence, qui seules pourraient nous renseigner, sont, en effet, presque impossibles avec des rayons qui poursuivent leur chemin rectiligne, sans que rien puisse les en faire dévier, ni la réfraction, ni l'aimant.

Quoi qu'il en soit, on est bien en présence d'un agent nouveau, aussi nouveau que l'était l'électricité du temps de Gilbert, le galvanisme du temps de Volta. Toutes les fois qu'une semblable révélation vient nous surprendre, elle reveille en nous le sentiment du mystère dont nous sommes environné, sensation troublante qui s'était dissipée à mesure que s'émoussait l'admiration pour les merveilles d'autrefois.

Il est à peine besoin de réfuter une foule de théories fantaisistes que la presse quotidienne a reproduites, peut-être en les dénaturant. On a dit, par exemple, que les rayons X n'étaient que les lignes de force magnétique; il serait étrange, alors, que ces lignes de force ne soient pas déviées par l'aimant.

III. — **Origine des rayons X.**

En revanche, ce que M. Röntgen a pu déterminer, c'est le centre d'émission des rayons X. On pouvait, en effet, faire plusieurs hypothèses.

On pouvait supposer que la cathode émet, outre les rayons cathodiques ordinaires, d'autres radiations, qui, jouissant de propriétés différentes, traverseraient le verre du tube et se propageraient ensuite dans l'atmosphère.

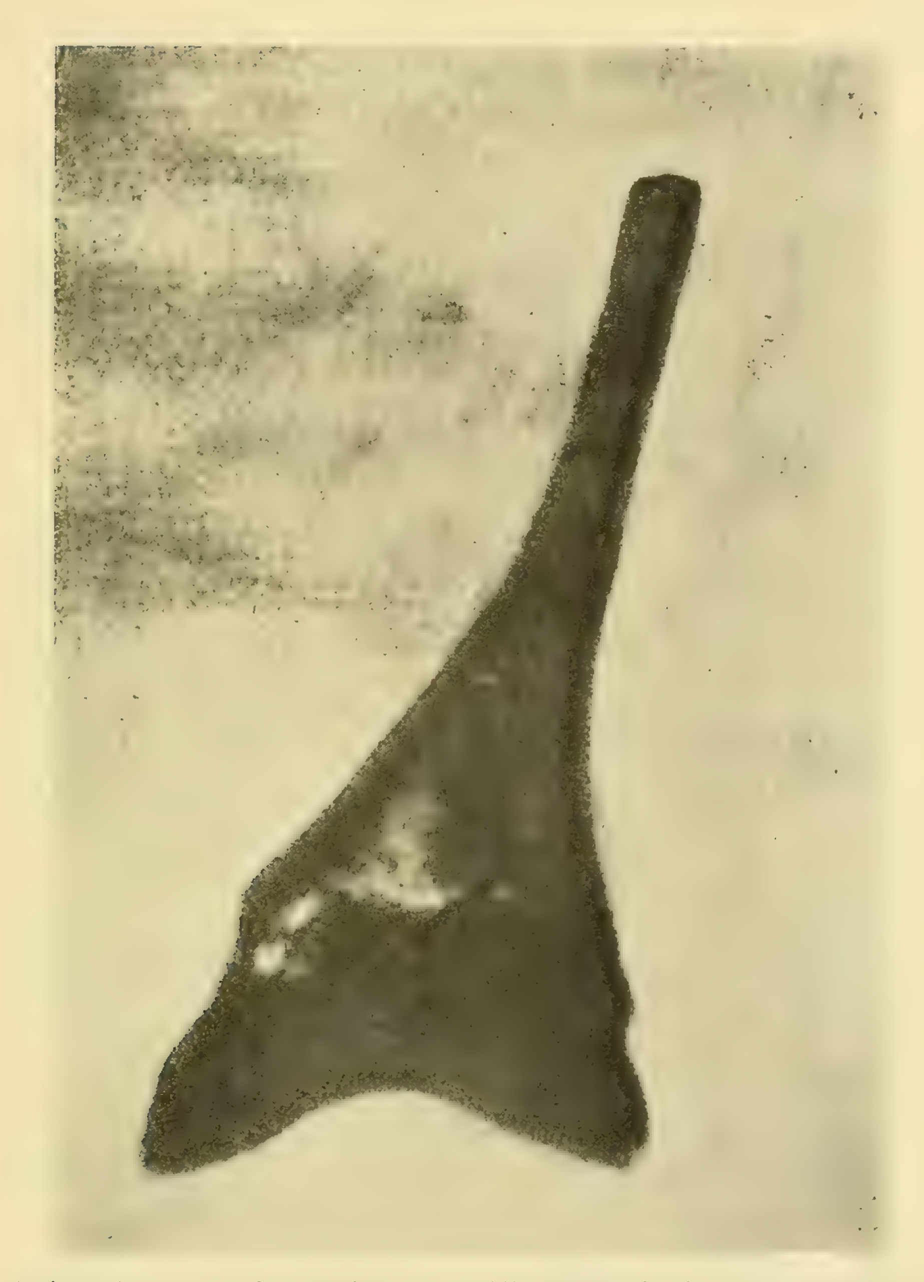


Fig. 4. — Fémur atteint d'ostéomyélite photographié au travers des tissus de la cuisse (Service du Professeur Lannelongue à l'hôpital Trousseau). — Des régions où le tissu osseux est demeuré intact ont arrêté les rayons; ceux-ci ont, au contraire, traversé la partie où le tissu osseux a été détruit. Cette épreuve montre que la destruction de la matière osseuse se fait du centre a la périphérie.

Ce n'est pas ainsi que les choses se passent; le rayon cathodique ordinaire, émané de la cathode, vient frapper la paroi du tube, qui devient fluorescente. Cette paroi devient alors, à son tour, un centre de radiation; elle émet d'abord des ondulations transversales qui sont cette lueur jaune verdâtre perçue par notre œil: mais elle émet, en outre, des radiations d'une autre nature, qui sont les rayons Röntgen.

L'étude des ombres portées le prouve; d'ailleurs, si l'on approche un aimant, non du trajet du rayon X, mais du tube de Crookes, on déforme les images photographiques.

Les rayons Röntgen, en effet, ne sont pas déviés, mais les rayons cathodiques le sont; comme le centre d'émission des rayons X est le point où finissent les rayons cathodiques, l'aimant peut déplacer le centre à partir duquel ils se propagent toujours en ligne droite et par conséquent déplacer les images.

Ainsi, c'est le verre qui émet les rayons Röntgen, et il les émet en devenant fluorescent. Ne peut-on alors se demander si tous les corps dont la fluorescence est suffisamment intense n'émettent pas, outre les rayons lumineux, des rayons X de Röntgen, *quelle que soit la cause de leur fluorescence ?* Les phénomènes ne seraient plus alors liés à une cause électrique. Cela n'est pas très probable, mais cela est possible, et sans doute assez facile à vérifier.

IV. — Interférences des rayons cathodiques.

Si les rayons nouveaux sont mystérieux, les rayons cathodiques ne cessent pas pour cela de l'être. Plusieurs théories ont été proposées, et je ne m'écarterai pas de mon sujet en en parlant, puisqu'il y a probablement un lien intime entre ces deux sortes de radiations et que ces deux mystères finiront sans doute par s'éclairer mutuellement.

Je voudrais profiter de l'occasion pour en dire quelques mots, et je désirerais surtout attirer l'attention sur une doctrine que j'ai combattue dans ses détails, mais qui n'en contient pas moins, très vraisemblablement, une part de vérité.

Nous voyons, pour ainsi dire, se continuer aujourd'hui, autour des rayons cathodiques, ce même combat qui se livrait sous la Restauration autour des rayons lumineux. Il y a des partisans de l'émission; les ondulations longitudinales et les ondulations transversales ont aussi leurs défenseurs.

Les idées de W. Crookes sur la matière radiante et le bombardement molé-

culaire, qui rappellent la doctrine newtonienne de l'émission, ne sont pas encore aujourd'hui abandonnées par tout le monde, malgré les expériences de Lenard.



Fig. 5. — Main dont un doigt (médium) est atteint d'ostéite tuberculeuse. — L'os de la première phalange du médium, étant gonflé, a intercepté les rayons sur une plus grande largeur que ne l'eût fait l'os normal (Service du Professeur Lannelongue à l'hôpital Trousseau).

Wiedemann et Lenard voient, dans les rayons cathodiques, des ondulations transversales de très courte période. Pour Wiedemann, ce seraient des rayons ultraviolets très absorbables; pour Lenard, l'onde serait plus courte encore et sa longueur serait comparable aux distances intermoléculaires.

M. Jaumann attribue, au contraire, ces phénomènes à des vibrations longitudinales. Il appuie sa manière de voir sur deux ordres de preuves expérimentales et d'abord sur des apparences qu'il considère comme dues à des interférences.

Ces interférences se produisent dans la lueur bleue qui entoure la cathode; si l'on prend deux cathodes formées de deux plans métalliques parallèles distants de 1^{cm}, on voit entre les deux plans et à égale distance se former une couche bleue plus lumineuse que le reste de l'intervalle compris entre les deux cathodes. Cette couche est plane, mince et nettement délimitée. M. Jaumann l'appelle un « plan d'interférence », parce qu'il l'attribue à l'interférence des rayons émanés des deux cathodes.

Mais, pour que cette apparence se produise, il faut que les deux cathodes soient réunies au pôle négatif de la bobine par deux fils d'*égale longueur*. Si les deux fils sont inégaux, non seulement la couche d'interférence se déplace, mais elle s'*élargit*, de sorte qu'elle finit par remplir tout l'espace compris entre les deux cathodes.

Cet élargissement correspond, d'après M. Jaumann, à un *spectre* de surfaces d'interférence qui appartiendraient à des rayons cathodiques de périodes différentes.

L'expérience peut être variée de bien des manières. C'est ainsi qu'avec deux cathodes, l'une plane, l'autre réduite à un fil parallèle au plan de la première, l'habile physicien a obtenu une surface d'interférence parabolique.

Il semble qu'il y ait là le germe d'une méthode expérimentale qui nous donnera un jour la clef du problème; mais l'assimilation avec les interférences, du moins telles que nous les connaissons, ne peut être admise qu'avec quelques réserves.

Dans les interférences ordinaires l'intensité varie avec la différence de marche, et la courbe qui représente cette variation est une sinusoïde. Il semble que la lueur de Jaumann devrait varier suivant une loi analogue. Il n'en est rien; si la période était courte, on verrait dans l'intervalle des cathodes plusieurs maxima; si elle est longue, comme l'auteur le suppose, on devrait voir non pas un maximum tranché, mais une plage lumineuse, lentement

dégradée sur les bords. *Il semble que le phénomène ne puisse se produire que si la différence de marche est presque rigoureusement nulle.*

Dès qu'il y a une dissymétrie quelconque, la couche d'interférence s'élargit; ce qui serait dû, d'après M. Jaumann, à ce que les radiations de période différente n'interféreraient plus à la même place.

Si la différence de marche devait être égale non à zéro, mais à un multiple de la longueur d'onde, les choses se passeraient ainsi, en effet. Mais la condition de l'interférence paraît être que cette différence soit nulle; donc, pour que deux radiations n'aient pas le même plan d'interférence, il ne suffit pas qu'elles n'aient pas la même période, *il faut que leur vitesse de propagation soit différente.*

J'ajoute que dans la couche d'interférence les rayons ne sont ni détruits ni renforcés; ils semblent être simplement *déviés*. « Les rayons cathodiques se propagent dans ce plan d'interférence parallèlement aux cathodes. »

V. — Influence sur la décharge.

La seconde série de preuves expérimentales est empruntée à l'action des radiations sur l'étincelle électrique; d'après M. Jaumann, une vibration ne facilite l'explosion de cette étincelle que si elle est normale à l'électrode.

La vérification a été faite pour les rayons hertziens.

On l'a faite aussi, avec un succès relatif, pour la lumière. On sait que les rayons ultraviolets provoquent les étincelles. Il paraissait naturel de chercher quelle est leur action quand ils sont polarisés. Mais il était difficile d'obtenir des rayons ultraviolets parallèles, polarisés et suffisamment intenses.

Heureusement MM. Elster et Geitel ont reconnu que la lumière visible agit sur les électrodes formées d'un métal alcalin, comme la lumière ultraviolette sur les électrodes ordinaires. La vérification de la loi de Jaumann, qui s'est faite dans un gaz raréfié, n'est que grossièrement approximative. Pour expliquer cette divergence, M. Jaumann suppose que, dans les gaz raréfiés, la lumière ordinaire elle-même serait accompagnée d'une composante longitudinale (?)

La même méthode, appliquée aux rayons cathodiques, montre que leurs vibrations sont longitudinales.

Il serait intéressant de faire tomber sur une même électrode, deux rayons cathodiques à angle droit; on verrait s'il y a un maximum d'effet quand la

normale à l'électrode est dirigée suivant la bissectrice des deux rayons; ou s'il n'y a pas de maximum; ou encore s'il y a deux maxima correspondant à la direction des deux rayons.

VI. — Théorie de Jaumann.

M. Jaumann cherche ensuite à rendre compte de la possibilité théorique des vibrations longitudinales, et c'est sur cette partie de son travail qu'ont porté mes critiques.

D'après lui, le pouvoir diélectrique des corps serait variable, et ces variations seraient notables dans les gaz raréfiés; elles seraient proportionnelles à la charge électrique.

Introduisant ces hypothèses dans les équations de Maxwell, l'auteur examine le cas où l'on a un champ électrique *constant* intense, superposé à des oscillations électromagnétiques très faibles, mais de période très courte. Il arrive ainsi à certaines équations que je ne transcrirai pas.

Ces équations, qui sont la conséquence nécessaire des hypothèses citées plus haut, montrent, en effet, qu'il doit exister des rayons longitudinaux qui jouiraient de quelques-unes des propriétés des rayons cathodiques.

Mais, en poussant le calcul jusqu'au bout, j'ai vu que ces rayons devraient suivre les lignes de force électrique du champ constant. Ils ne seraient donc pas rectiligne en général; ils iraient de la cathode à l'anode; ils ne seraient pas déviés par l'aimant.

Si donc j'ai été séduit au premier abord par les vues ingénieuses de M. Jaumann, si, malgré cette critique, je n'en persiste pas moins à penser que ce savant est sur la voie qui le mènera à la réalité; je crois néanmoins qu'il devra modifier ces hypothèses, au moins dans le détail.

VII. — Conditions des expériences de Röntgen.

Revenons aux expériences photographiques de M. Röntgen. La technique, comme nous l'avons vu, est très simple; la seule difficulté est de se procurer un tube de Crookes qui conserve ses propriétés assez longtemps; on en rencontrera avec un peu de chance. La plupart perdent rapidement leurs qualités,

à cause des gaz dégagés par les électrodes ; il faut, si l'on veut s'en servir, avoir une trompe à mercure pour maintenir le vide de Crookes.

Les rayons X ne se réfractant pas, on ne peut donc les concentrer à l'aide d'un objectif; les images que l'on photographie ne sont donc pas comparables aux images formées au foyer d'une lentille. Ce sont des ombres portées, des silhouettes.

D'autre part, la source lumineuse, je l'ai dit, n'est pas la cathode, c'est toute la surface fluorescente du verre; dans les expériences de MM. Oudin et Barthélemy par exemple, la source était comparable à une sphère lumineuse de 7^{cm} de diamètre. Un petit objet sphérique projette donc derrière lui un cône d'ombre assez court, entouré d'une pénombre.

Cela n'est pas sans inconvénient pour la netteté des images. Il conviendrait donc de donner à la cathode la forme d'un miroir sphérique concave, dont le centre serait voisin de la paroi (pas sur la paroi même, il pourrait en résulter du dégât). La partie la plus intense de la source serait ainsi d'étendue restreinte.

Si l'objet à photographier est plus grand que la source, on pourra le rapprocher de la source, et éloigner la plaque photographique; l'objet sera agrandi, mais les détails ne viendront pas.

Si l'objet est petit, il faudra le mettre le plus près possible de la plaque sensible, et pas trop près de la source.

Les premiers clichés de MM. Oudin et Barthélemy étaient moins nets que les derniers, parce qu'on avait placé la plaque trop près du tube de Crookes.

LES RAYONS CATHODIQUES

ET

LES RAYONS RÖNTGEN

Annuaire du Bureau des Longitudes, p. D.1-D.35 (1897).
Revue scientifique, 4e série, t. 7, p. 72-81 (1897).

I. — Considérations préliminaires.

La découverte inattendue du Professeur Röntgen, ses applications réalisées ou entrevues, ont excité autant de curiosité dans le public que dans le monde savant; mais, quand les gens du monde, désireux de connaître la véritable nature de cette lumière nouvelle, s'informent auprès des physiciens, ceux-ci sont obligés de confesser leur ignorance.

Malgré l'ardeur déployée dans tous les laboratoires, malgré les observations accumulées depuis quelques mois, on n'est guère plus avancé qu'au premier jour. Et, en effet, pour arracher à ces rayons mystérieux leur secret, il faudrait pouvoir agir sur eux, les modifier; mais, de même que l'argon résiste à l'action des chimistes, les rayons X sont rebelles à tous les efforts des physiciens; ils poursuivent leur course rectiligne sans se laisser dévier par aucun des agents dont nous disposons.

Encore nous résignerions-nous à ignorer les causes; nous ne sommes pas si pressés d'édifier une théorie, sachant bien que les meilleures ne sont qu'éphémères. Mais sur le détail même des faits, les observateurs ne sont pas encore tous d'accord et quelques divergences sont bien difficiles à expliquer.

Cette Notice pourra donc sembler prématurée, mais l'importance du sujet m'a fait penser que certains lecteurs pourraient être curieux de connaître l'état

actuel de la question, bien qu'il puisse être bouleversé d'un moment à l'autre par quelque découverte nouvelle.

Avant d'aborder mon sujet, je veux rappeler quelques faits, bien connus de tout le monde depuis longtemps, mais qui auraient pu, non certes faire prévoir les phénomènes extraordinaires récemment découverts, mais en atténuer le caractère paradoxal.

Diverses sortes de radiations. — Les radiations lumineuses connues et étudiées jusqu'ici, et qui sont dues, comme l'on sait, aux vibrations transversales de l'éther, peuvent se ranger sur une sorte d'échelle, dans l'ordre des longueurs d'onde décroissantes, c'est-à-dire des nombres croissants de vibrations.

Au bas de cette échelle se trouvent les oscillations *hertziennes*, dont l'analogie avec la lumière est maintenant bien établie, et que l'on a réalisées avec des longueurs d'onde variant de 6 m à 2 cm.

Viennent ensuite les rayons invisibles infrarouges, ou calorifiques, puis les rayons visibles rouges, jaunes, verts, bleus, violets; puis, enfin, les rayons invisibles ultraviolets qui nous sont révélés par leur action photographique. (*Voir* le tableau des longueurs d'onde à la page 656 de l'*Annuaire*).

On ne devrait pas s'étonner de voir à cette échelle s'ajouter quelques échelons nouveaux.

Mais ce n'est pas tout; rien ne prouve que l'éther ne soit pas susceptible d'*oscillations longitudinales*, analogues aux ondes sonores de l'air. En vain invoquerait-on les équations de Maxwell qui sont incompatibles avec de pareilles ondulations. On a mis dans ces équations ce qu'on a voulu, et, si on les a écrites sous leur forme actuelle, c'est justement parce que, n'ayant jamais observé de vibrations longitudinales, on a voulu écrire qu'il n'y en a pas. Si l'expérience nous apprenait le contraire, il suffirait de changer les équations d'un trait de plume.

Longtemps on a cru que la propagation de l'induction électromagnétique était instantanée; peut-être montrera-t-on un jour que l'induction électrostatique se propage avec une vitesse finie, ce qui entraînerait l'existence d'ondulations longitudinales. Lord Kelvin a proposé, pour trancher la question, des expériences ingénieuses qui n'ont pas été réalisées.

Transparence. — C'est un fait d'observation vulgaire qu'un même corps ne

présente pas la même transparence pour les diverses radiations. Un verre rouge laisse passer les rayons rouges et arrête les rayons verts, et c'est justement pour cela qu'il est rouge; pour un verre vert c'est le contraire.

Mais même un verre parfaitement incolore, qui est traversé par *tous* les rayons visibles, sera souvent opaque pour les rayons calorifiques ou infrarouges et pour les rayons ultraviolets.

Au contraire, l'argent, qui est opaque pour les rayons visibles, est assez transparent pour certaines lumières ultraviolettes, de sorte qu'on a pu photographier des objets contenus dans une boîte de verre argenté où ils étaient absolument cachés pour notre œil. C'était déjà là la *photographie de l'invisible*.

Si donc on découvre des rayons nouveaux, on devra s'attendre à ce qu'ils traversent certains corps que nous sommes habitués à regarder comme opaques.

Fluorescence. — J'ai maintenant à rappeler certains phénomènes connus depuis longtemps, mais auxquels les récentes découvertes donnent une importances inattendue.

Certaines substances, dites *phosphorescentes* ou *fluorescentes*, donnent naissance, lorsqu'elles ont été exposées à la lumière, à des radiations qu'elles n'auraient pu émettre d'elles-mêmes sans emprunter d'énergie à l'extérieur.

Tels sont le sulfure de zinc, le sulfure de calcium, les sels d'urane.

Ce phénomène aurait pu se confondre avec une sorte de réflexion irrégulière de la lumière excitatrice sans les deux circonstances suivantes :

L'éclat phosphorescent persiste une fraction de seconde après l'extinction de la lumière excitatrice, et de plus il n'est généralement pas de la même couleur.

On verra plus loin le rôle de la fluorescence dans les phénomènes nouveaux dont je vais enfin aborder l'étude.

II. — **Les rayons cathodiques.**

Supposons un tube de verre contenant de l'air raréfié et à l'intérieur duquel pénètrent deux fils conducteurs terminés chacun par un disque métallique formant électrode.

Si l'on met ces deux fils en communication avec les deux pôles d'une bobine de Ruhmkorff, les phénomènes observés seront très différents, suivant la pression de l'air contenu dans le tube. Aux pressions ordinaires, le courant ne passe pas, l'air étant mauvais conducteur.

Si le vide est poussé jusqu'à $\frac{1}{1000}$ environ, on a le *tube de Gessler*; le courant passe et l'intervalle compris entre les deux électrodes est occupé par une colonne lumineuse d'un rose violacé, souvent stratifiée; l'électrode négative ou *cathode* est entourée d'un petit espace obscur.

Si le vide est plus parfait, la colonne lumineuse diminue de longueur et l'espace obscur s'agrandit. Quand la pression est suffisamment faible, par exemple $\frac{1}{100000}$ ou $\frac{1}{1000000}$ l'espace obscur remplit presque tout le tube, et l'on a ce qu'on appelle le *tube de Crookes*. A ce moment les parois du tube s'illuminent d'une belle lueur verdâtre.

Enfin, si le vide est poussé plus loin encore, le courant ne passe plus et tous les phénomènes disparaissent.

On peut donc distinguer trois degrés de vide, le vide de Gessler, le vide de Crookes et le vide isolant.

Quel est donc l'agent qui, dans le tube de Crookes, provoque la fluorescence verte des parois? Ce ne peut être le courant électrique lui-même qui va d'une électrode à l'autre sans toucher la paroi. Ce qui est certain, c'est que cet agent se propage *en ligne droite* de la cathode à la paroi de verre; et, en effet, si l'on interpose sur son trajet un objet solide, cet obstacle l'arrête, et l'objet projette sur la paroi illuminée une ombre noire, tout à fait pareille à celle qui se produirait si la cathode était une source lumineuse.

La propagation de cet agent inconnu ne ressemble donc pas à celle d'un courant liquide ou d'un courant électrique qui contournerait les obstacles, ni à celle de la chaleur à travers les corps conducteurs; elle est rectiligne comme celle d'un rayon de lumière; c'est ce qui a fait donner au phénomène découvert par Hittorf et Crookes le nom de *rayons cathodiques*.

On peut, à l'aide des ombres portées, étudier la marche de ces rayons, et quelquefois même une faible lueur bleue dont brille sur leur trajet l'air raréfié permet d'observer ce trajet directement,

On voit ainsi que ces rayons émanent de la surface de la cathode *perpendiculairement à cette surface*. Ils ne dépendent donc que de la forme et de la position de cette cathode; la position de l'électrode positive ou anode semble n'avoir sur eux aucune influence.

Ils accompagnent la décharge électrique et ne peuvent se produire sans elle; mais ils sont parfaitement distincts de cette décharge, qui suit un chemin tout différent, généralement courbe, entre la cathode et l'anode.

Déviation magnétique. — Les phénomènes sont modifiés quand le tube est soumis à l'action d'un aimant; les rayons cathodiques sont déviés comme le serait un courant électrique.

Il cessent donc d'être rectilignes pour se courber plus ou moins.

D'autre part, d'après les observations de Goldstein, s'il y a dans un même tube deux cathodes et que les rayons émanés de l'une aillent passer près de l'autre, ils sont déviés comme s'ils étaient repoussés par cette cathode.

D'autres causes, souvent difficiles à discerner, viennent aussi quelquefois troubler les lois si simples que j'avais d'abord énoncées et qui ne doivent être regardées que comme une première approximation.

Phénomènes fluorescents. — Nous avons vu que le verre devient phosphorescent aux points où il est frappé par les rayons cathodiques; l'air lui-même brille sous leur action et c'est ce qui produit cette faible lueur bleue que l'on observe le long du trajet de ces rayons et qu'il ne faut pas confondre avec les rayons cathodiques eux-mêmes.

Ces phénomènes sont tout à fait analogues à la fluorescence de certaines substances exposées à la lumière.

Ainsi, et cela est important pour ce qui va suivre, *les rayons cathodiques possèdent, comme les rayons lumineux, la propriété de provoquer la phosphorescence:* j'ajoute qu'ils la possèdent *à un degré bien plus éminent.*

Bien des substances brillent sous leur influence qui ne seraient pas excitées sensiblement par la lumière. L'éclat des autres est plus vif et notablement plus durable. Un simple morceau de craie, enfermé dans un tube de Crookes, émet une lueur intense; avec certaines pierres précieuses, certaines terres rares, le spectacle devient presque éblouissant.

C'est d'ailleurs, grâce à cette propriété que l'existence des rayons cathodiques nous a été révélée.

Les rayons Lenard. — La question entra dans une phase nouvelle quand Hertz eut reconnu que les rayons cathodiques peuvent traverser une feuille d'aluminium très mince, quoique assez épaisse pour arrêter la lumière. Lenard eut l'idée de pratiquer une petite fenêtre dans la paroi du tube et de la fermer par une feuille d'aluminium. Je ne décrirai pas la façon d'assembler au verre l'aluminium avec la carcasse métallique qui le supporte, et d'assurer au joint assez d'étanchéité pour maintenir le vide de Crookes.

Grâce à cet artifice, les rayons cathodiques produits dans le vide de Crookes passent à travers la fenêtre d'aluminium et *peuvent sortir du tube*. On peut alors étudier leur propagation dans d'autres milieux que le vide de Crookes, par exemple dans l'air à la pression ordinaire ou dans le vide, plus parfait que celui de Crookes, que j'ai appelé plus haut le *vide isolant*.

Dans de semblables milieux, qui sont isolants et qui s'opposent à la décharge électrique nécessaire à la production de ces rayons, ils ne pourraient pas prendre naissance, mais ils peuvent se propager.

Dans le vide, leur propagation est rectiligne, souvent sur de grandes longueurs et ils sont déviés par l'aimant.

Dans l'air, à la pression ordinaire, ils se diffusent dans tous les sens, comme la lumière dans un milieu translucide, tel que le lait par exemple; aussi à quelques centimètres de la fenêtre de Lenard, on cesse de pouvoir les mettre en évidence. Cette diffusion n'a pas permis non plus d'étudier l'action de l'aimant.

Hétérogénéité des rayons cathodiques. — De même qu'il y a des rayons lumineux de différentes couleurs, il y a plusieurs sortes de rayons cathodiques, inégalement déviables par l'aimant. Les travaux de Lenard, et surtout une expérience toute récente de Birkeland, ne laissent aucun doute à cet égard.

Théories diverses des rayons cathodiques. — On est loin d'être d'accord sur l'explication de ces phénomènes.

Les Anglais ont adopté une théorie qui rappelle ce qu'était celle de l'émission en Optique. Le tube est plein d'air raréfié; les molécules gazeuses se chargeraient négativement au contact de la cathode et seraient ensuite repoussées violemment par cette cathode. Elles subiraient une répulsion assez forte pour acquérir une grande vitesse et continueraient leur course rectiligne sans que le milieu très raréfié puisse leur opposer d'obstacle. Ces molécules électrisées bombarderaient la paroi du tube et en provoqueraient l'illumination.

Ce courant matériel serait en même temps un véritable courant électrique, puisque les molécules sont chargées et transportent avec elles de l'électricité. Il devrait donc, comme tous les courants électriques, être dévié par l'aimant.

La déviation magnétique s'explique ainsi d'elle-même. Ce qui se comprend moins, c'est la faiblesse des déviations électrostatiques observées.

Les Allemands préfèrent voir dans les rayons cathodiques des phénomènes ondulatoires.

Pour les uns, ces rayons seraient de la lumière *ultra-ultraviolette*, c'est-à-dire de très courte longueur d'onde. Et cependant, la déviation magnétique et la faible vitesse de propagation (200^{km} par seconde), mesurée par J.-J. Thomson, semblent les distinguer nettement de la lumière.

Les autres font intervenir des vibrations longitudinales de l'éther ou de quelque milieu inconnu.

La théorie anglaise, longtemps en faveur, avait été presque abandonnée à la suite des travaux de Lenard. On ne pouvait comprendre que les molécules gazeuses traversassent l'aluminium, et la propagation des rayons dans un vide presque absolu semblait une objection sans réplique.

Et pourtant cette théorie a depuis regagné du terrain, grâce à une série d'expériences nouvelles, en contradiction avec celles de Hertz, et d'où Perrin a conclu que les rayons cathodiques sont toujours accompagnés d'un transport d'électricité négative.

III. — **Les rayons Röntgen.**

Le professeur Röntgen, ayant enfermé un tube de Crookes dans une boîte en carton noir, et opérant dans l'obscurité, remarqua qu'un écran fluorescent au platinocyanure de baryum s'illuminait dès que le tube entrait en activité.

Cette fluorescence ne pouvait être excitée par la lumière verte dont brillait la paroi du tube; cette lumière, en effet, ne pouvait traverser la boîte de carton; le savant physicien conclut donc à l'existence d'un agent nouveau, émanant du tube, capable de traverser le carton et susceptible de provoquer la fluorescence de certains corps.

Il avait découvert les rayons X.

Il avait été servi par un hasard heureux, mais par un de ces hasards comme chacun de nous en rencontre peut-être de temps en temps sans même sans douter et dont les plus clairvoyants savent seuls tirer parti.

Röntgen ne tarda pas à reconnaître que les rayons nouveaux traversent tous les corps beaucoup mieux que la lumière. Toutes les substances sont pour eux transparentes, mais *elles le sont inégalement*. Le bois, le diamant, la plupart des substances organiques sont très transparentes.

La chair des animaux se laisse traverser plus facilement que les os et c'est cette différence qui a permis les importantes applications dont nous parlerons plus loin.

Le verre de Bohême est beaucoup plus transparent que le cristal.

Enfin, parmi les métaux, l'aluminium est assez transparent, le plomb et surtout le platine sont presque opaques.

Les corps relativement opaques, placés sur le trajet des rayons X, projettent sur l'écran fluorescent des ombres qui permettent d'étudier la marche de ces radiations, ainsi que je l'ai expliqué plus haut pour les rayons cathodiques.

On reconnaît ainsi que *cette marche est rectiligne* comme celle des rayons lumineux et c'est ce qui justifie le nom de *rayons* donné à l'agent nouveau.

Action photographique. — Les rayons Röntgen impressionnent une plaque photographique soustraite à la lumière ordinaire par une enveloppe de papier noir. C'est là l'origine des plus précieuses applications de ces radiations, et c'est en même temps un nouveau moyen, plus commode, de les étudier.

Maintenant une question se pose. Les rayons X agissent-ils directement sur la plaque, ou bien, puisqu'ils sont capables de provoquer la fluorescence, est-ce la faible lueur dont ils illuminent le verre ou la gélatine qui produit l'action chimique ?

On ne saurait trop le dire, bien que la première hypothèse paraisse plus probable.

La question est plus complexe encore en ce qui concerne les rayons cathodiques qui, comme Lenard l'a montré, agissent également sur le gélatino-bromure. Les rayons cathodiques, non seulement provoquent la fluorescence, mais ils donnent naissance aux rayons X qui eux-mêmes peuvent engendrer la fluorescence. Sont-ce les rayons cathodiques qui impressionnent directement les plaques sensibles ; sont-ce les rayons X ou les rayons lumineux qu'ils excitent ?

Émission des rayons X. — Tout le monde connaît l'expérience de la chambre noire. Une boîte, opaque pour la lumière, a sa paroi antérieure percée d'un trou très petit. Tout objet extérieur qui émet ou qui réfléchit de la lumière vient alors former son image au fond de la boîte.

Opérons de même avec les rayons X ; au fond d'une boîte opaque pour ces rayons et percée d'un trou, plaçons une plaque sensible enveloppée de papier

noir. Tout point extérieur qui émet des radiations Röntgen viendra peindre son image sur cette plaque. Nous obtiendrons ainsi l'image de la source. Nous saurons *d'où partent ces rayons.*

On voit ainsi que les rayons X émanent de la région de la paroi du tube qui est frappée par les rayons cathodiques. C'est cette même région qui s'illumine d'une lueur verdâtre. Sous le choc des rayons cathodiques, elle émet à la fois des rayons lumineux verts et des rayons Röntgen invisibles. Les deux phénomènes sont du même ordre.

L'émission des rayons X est une véritable fluorescence et si les rayons cathodiques la produisent si facilement, c'est qu'ils ont, comme je l'ai dit, un pouvoir excitateur exceptionnellement intense.

Il importe toutefois de faire une remarque : *tous les corps solides frappés par les rayons cathodiques émettent des rayons* X; tous ne deviennent pas fluorescents; le platine, par exemple, ne donne pas du tout de lumière visible, il produit facilement des rayons Röntgen.

Réflexion. — Les rayons lumineux peuvent être déviés de leur marche par la réflexion et la réfraction; les rayons cathodiques peuvent l'être par l'aimant; il n'en est pas de même des rayons Röntgen : rien ne peut les détourner de leur trajet rectiligne.

Ils ne se réfléchissent pas. On a vu, il est vrai, des traces de réflexion, mais il ne s'agit pas d'une réflexion régulière, avec un angle de réflexion égal à l'angle d'incidence. Une surface frappée par les rayons X en renvoie également dans toutes les directions, en très petite quantité. Encore je ne crois pas que les choses se passent tout à fait ainsi. Ce n'est pas seulement à la surface de séparation de deux milieux que se produit cette réflexion irrégulière; les molécules intérieures d'un corps transparent renvoient également des rayons réfléchis dans tous les sens. Et la preuve, c'est que le verre pilé n'est pas plus opaque que le verre homogène. Il ne s'agit donc pas d'une *réflexion*, mais d'une sorte de *fluorescence.*

Les rayons X ne se réfractent pas. Perrin a bien cru observer avec un prisme d'aluminium une très faible déviation (avec un indice plus petit que 1), mais cette observation est contredite par Gouy, et il faut attendre de nouvelles expériences.

Enfin les rayons X ne sont pas déviés par l'aimant. *Ce ne sont donc pas des rayons cathodiques.* Ils sont *engendrés* par les rayons cathodiques, mais ils

en diffèrent autant que la lumière verte que ces mêmes rayons cathodiques engendrent également en frappant le verre.

Diffraction. — Les ombres produites par la lumière ordinaire ne présentent pas des bords nettement tranchés ; on peut voir sur ces bords des lignes alternativement brillantes et obscures : ce sont les *franges de diffraction.*

On les voit très facilement si l'on projette l'ombre d'un fil très fin ou si l'on fait passer la lumière à travers une fente très étroite.

Les franges sont d'autant plus fines et, par conséquent, d'autant plus difficiles à observer, que la longueur d'onde est plus petite et que le fil ou la fente sont plus *larges.*

On a cherché vainement des phénomènes analogues avec les rayons X, soit qu'ils n'aient aucun caractère vibratoire, soit que leur longueur d'onde soit trop petite.

Kümmell en Allemagne, Calmette en France, ont obtenu des apparences de diffraction, d'où ils ont conclu à des longueurs d'onde de $0^{mm},003$, c'est-à-dire beaucoup plus grandes que celles de la lumière. Mais comme ils ont opéré avec des fentes beaucoup plus larges que les observateurs qui n'ont rien vu, on peut se demander s'il ne faut pas chercher une autre explication de leurs résultats.

Polarisation. — On n'a pu réussir à polariser les rayons X. Comme ils ne se réfléchissent ni ne se réfractent, on ne pouvait essayer qu'un seul moyen : la tourmaline.

On sait qu'un rayon de lumière naturelle peut être considéré comme la superposition de deux rayons polarisés à angle droit.

Une tourmaline placée d'une certaine manière arrêtera la première composante et laissera passer la seconde ; ce sera le contraire si l'on fait tourner cette tourmaline de 90°.

Deux tourmalines croisées arrêteront donc les deux composantes et sembleront opaques ; placées parallèlement, elle n'en arrêteront qu'une et sembleront transparentes.

L'expérience échoue avec les rayons Röntgen, soit qu'ils ne puissent se polariser soit que la tourmaline n'agisse pas sur eux comme sur la lumière, ce qui n'aurait rien d'étonnant puisqu'ils paraissent différer entièrement des rayons lumineux en ce qui concerne la transparence.

Seul, le prince Galitzine a cru observer des différences légères; de nouvelles expériences seraient nécessaires pour trancher définitivement la question.

Action électrique. — L'action électrique des rayons X est une de leurs propriétés les plus importantes; c'est celle qui a été le mieux étudiée. Mais c'est également celle qui a donné lieu aux plus longues controverses; je ne puis songer à les raconter ici par le menu; je me bornerai donc à exposer les faits qui me semblent à peu près définitivement établis.

On sait que la lumière ultraviolette facilite l'explosion de l'étincelle électrique. De même les conducteurs électrisés perdent leur charge rapidement quand ils sont exposés aux rayons Röntgen.

On a supposé que sous l'influence des radiations ultraviolettes, la surface de l'électrode se désagrège et que la poussière des couches superficielles devient le véhicule de l'électricité. Cette explication, vraie ou fausse pour la lumière ultraviolette, n'est certainement pas applicable aux rayons X puisqu'ils peuvent agir, *sans rencontrer la surface du conducteur*.

On peut se demander si certaines substances, ordinairement isolantes, ne deviennent pas conductrices quand elles sont traversées par les radiations Röntgen. C'est ainsi que les rayons lumineux et, d'ailleurs, les rayons X eux-mêmes agissent sur le sélénium.

Mais ce n'est pas encore tout à fait comme cela que les choses se passent. Non seulement l'air cesse d'être isolant aux points où il est traversé par les rayons Röntgen, mais *tout le long de toutes les lignes de force électrique* qui sont croisées par ces rayons. C'est ainsi que Perrin a réussi à décharger un conducteur en faisant passer un faisceau Röntgen à 40^{cm} de sa surface.

L'air modifié par ces radiations conserve quelque temps la propriété nouvelle qu'il vient d'acquérir; il continue à décharger les corps électrisés après que le tube a cessé d'être excité.

Les rayons X n'agissent de cette façon que sur les gaz; ils semblent, d'après la plupart des observations, sans influence sur les diélectriques solides et liquides.

Tout se passe donc, comme si, sous l'action des rayons Röntgen, chaque molécule gazeuse se décomposait en deux atomes ou ions, chargés, l'un d'électricité négative, l'autre d'électricité positive. Dans un champ électrique, ces deux ions, attirés, l'un par le conducteur positif, l'autre par le conducteur négatif, chemineraient le long des lignes de force et iraient neutraliser les charges de ces deux conducteurs.

Hétérogénéité des rayons X. — Il est probable qu'il y a plusieurs espèces de rayons X. Nous sommes en présence d'un monde nouveau dont nous ne soupçonnons pas la variété : tel serait, en face de la lumière ordinaire, un homme dont les yeux ne discerneraient pas les couleurs.

Avec le prisme ou le réseau, on peut analyser la lumière blanche ; ces deux moyens nous font défaut avec les rayons Röntgen, rebelles à la fois à la réfraction et à la diffraction.

Mais s'il y a des rayons X de plusieurs espèces, certaines substances pourront être transparentes pour les uns et relativement opaques pour les autres. C'est le seul procédé qui nous permettra de les distinguer ; c'est le seul aussi qui nous permettra de les séparer.

Dans cette voie, presque tout reste à faire ; cependant Porter a constaté une différence bien nette. Pour certains rayons, la chair est transparente, pour d'autres, elle est presque aussi opaque que les os. Le tube de Crookes émet les premiers aux températures ordinaires, les seconds au-dessus de 20 à 25°.

Nous citerons dans le même ordre d'idées les observations de Roiti et celles, plus anciennes, de Benoît et Hurmuzescu.

IV. — Applications des rayons X.

La lumière nouvelle traverse les corps opaques ; c'est cette faculté qui nous la rend si précieuse ; de là les applications les plus variées. Il n'est pas jusqu'au directeur du Laboratoire municipal qui ne s'en soit servi pour examiner sans danger les engins anarchistes.

Mais ce sont les applications médicales qui sont de beaucoup les plus importantes. On comprend sans peine quel parti le chirurgien peut tirer d'un auxiliaire qui lui fait voir le squelette comme si les chairs n'existaient pas, ou qui lui permet d'apercevoir une balle logée dans le corps.

Cependant beaucoup de médecins, après les premiers moments d'enthousiasme, ont eu des périodes de découragement. La durée de pose était trop longues, vingt minutes pour une main, trois quarts d'heure pour un bras. Il semblait qu'on ne dut jamais songer à traverser toute l'épaisseur du corps. De nouveaux progrès étaient nécessaires, ils ont été accomplis.

On s'est d'abord préoccupé d'augmenter l'intensité pour diminuer la durée de pose. On y est parvenu en choisissant convenablement la force de la bobine,

la température. On a cherché quelle était la pression la plus favorable, pression qui, d'ailleurs, dépend des dimensions du tube.

On a essayé de mettre sur la plaque photographique un écran fluorescent, qui, rendu lumineux par les rayons X, agit par sa lumière sur le gélatino-bromure et permet d'abréger la pose.

Mais l'intensité des effets ne suffit pas : il faut surtout viser à la netteté du dessin, et, ici, une difficulté se présente. L'objectif photographique concentre sur chaque point de la plaque tous les rayons lumineux émanés du point correspondant de l'objet; on a donc, sur la plaque, une image réelle de cet objet.

Rien de pareil avec les rayons Röntgen *qui ne se réfractent pas*. Il n'y a plus d'image véritable, mais seulement des silhouettes, des *ombres chinoises* qu'on ne peut *mettre au point*.

L'optique géométrique nous apprend que chaque ombre est entourée d'une pénombre. Cette pénombre est d'autant plus étroite et les contours d'autant plus nets, que la source est plus petite, que sa distance à l'objet est plus grande et celle de l'objet à la plaque plus petite.

On ne peut accroître beaucoup la première de ces distances; on ne peut non plus diminuer à volonté la seconde si l'on veut traverser une épaisseur un peu considérable. Il reste donc à restreindre autant que possible les dimensions de la source.

La source des rayons X est la partie de la paroi du tube qui est frappée par les rayons cathodiques. Il faut donc *concentrer* ces rayons cathodiques sur une région aussi étroite que possible de cette paroi.

Pour cela on donne à la cathode la forme d'une calotte sphérique; les rayons cathodiques suivent un chemin normal à cette surface sphérique et vont concourir au centre de la phère qu'on place tout près de la paroi.

On a employé aussi l'aimant, qui dévie les rayons cathodiques; si le champ magnétique n'est pas uniforme, certains de ces rayons seront plus déviés que d'autres, et un faisceau parallèle pourra être transformé en faisceau convergent.

On est promptement arrêté dans cette voie; sous le choc des rayons cathodiques, le verre s'échauffe, il perd sa vertu fluorescente et finit par se ramollir et se percer. On a combattu cet échauffement en plongeant le tube dans un vase en celluloïd rempli d'eau. L'eau et le celluloïd sont en effet tout à fait transparents pour les rayons X.

Tubes focus. — Mais le véritable moyen d'échapper à cet inconvénient est

l'emploi du « tube focus ». Dans ce tube, la cathode a la forme d'un miroir sphérique concave; l'anode est une plaque de platine, bien plane, placée au centre de la surface sphérique du miroir.

Le platine émet alors des rayons X, *non parce qu'il sert d'anode*, mais parce qu'il est exposé aux rayons cathodiques.

L'émission est plus intense cependant lorsqu'il joue le rôle d'anode, sans doute parce que le jet cathodique le frappe plus violemment.

Avec le platine on n'a plus à redouter les effets fâcheux de l'échauffement.

Il ne faudrait pas croire non plus que les rayons cathodiques émanés du miroir concave viennent se réfléchir sur l'anode comme sur un miroir plan.

Les rayons X seraient alors renvoyés dans une seule direction, conformément aux lois de la réflexion; ils sont, au contraire, envoyés dans tous les sens. Un corps incandescent émet aussi de la lumière dans tous les sens, mais il en envoie plus dans la direction normale que dans les directions obliques. Gouy a montré que l'anode en platine envoie des rayons X *également* dans toutes les directions.

Si donc on regarde la lame de platine sous une incidence très oblique, cette lame n'émettra qu'un faisceau très délié de rayons Röntgen; comme son intensité *totale* demeure la même que sous l'incidence normale, sa « densité » sera beaucoup plus grande. Avec une lame incandescente émettant de la lumière ordinaire, les choses ne se passeraient pas ainsi. Le faisceau serait d'autant plus étroit que l'incidence serait plus oblique; mais son intensité totale irait en diminuant, sa densité restant constante.

On a ainsi une source de rayons X très intense et très étroite.

Le fait découvert par Gouy, en apparence paradoxal, s'explique géométriquement de la façon la plus simple.

Il tient simplement à cette circonstance que *la transparence du platine pour les rayons Röntgen excités*, quoique assez faible, *est beaucoup plus grande que pour les rayons cathodiques excitateurs.*

Grâce à tous ces perfectionnements, la durée de la pose a pu être réduite à quelques minutes ou même à quelques secondes.

On a construit également des tubes focus ayant la forme d'une sphère, non pas en verre, mais en métal, en partie en aluminium mince. L'anode plane est placée au centre; la sphère entière fonctionne comme cathode. Avec ces tubes, on peut, paraît-il, à une distance de 10^{m}, illuminer un écran fluorescent à travers une épaisseur de 1^{m} de bois.

Cryptoscope. — On a utilisé aussi la vision directe sans photographie, par le moyen d'un écran fluorescent. L'appareil appelé *cryptoscope* n'est que la reproduction de la première expérience de Röntgen. Le nom seul est nouveau. On a cherché toutefois à remplacer le platinocyanure de baryum par d'autres substances. Celle qui donne les meilleurs résultats paraît être le tungstate de calcium préparé d'une certaine façon.

V. — Théories des rayons X.

Théorie ultraviolette. — Toutes les théories proposées ne sont que des hypothèses qui ne s'appuient jusqu'ici d'aucune preuve sérieuse.

Les uns regardent les rayons Röntgen comme de la lumière ultra-ultraviolette. Ils devraient être embarrassés, semble-t-il, pour rendre compte de l'absence de réfraction. Les rayons violets sont plus réfrangibles que les rayons rouges, les rayons ultraviolets le sont plus encore; si la progression continuait, les rayons nouveaux devraient subir une réfraction énorme.

Mais, d'après certaines théories de la dispersion, celle de Helmholtz par exemple, l'indice, après avoir crû avec le nombre des vibrations, décroît ensuite rapidement et finit par devenir très voisin de l'unité. Sans doute cette application des formules de Helmholtz n'est qu'une extrapolation des plus hasardeuses; elle peut prouver, du moins, que l'hypothèse n'est pas absurde.

Nous verrons plus loin l'appui que la découverte des rayons Becquerel est venue apporter à la théorie ultraviolette.

Théorie longitudinale. — On a supposé aussi que les phénomènes nouveaux étaient dus aux vibrations longitudinales de l'éther.

Cette théorie acquerrait quelque probabilité si les expériences de Kümmel, sur la diffraction, venaient à être confirmées; la longueur d'onde serait la même que celle des ondes transversales infrarouges; si donc les rayons Röntgen étaient transversaux, ils devraient être identiques à ces ondes et posséder les mêmes propriétés. Comme cela n'est pas, on serait amené à conclure qu'ils sont longitudinaux.

Si, au contraire, les résultats du prince Galitzine sur la polarisation étaient confirmés, il faudrait conclure à la transversalité et adopter la théorie ultraviolette.

Théorie tourbillonnaire. — Michelson attribue les rayons Röntgen à des mouvements tourbillonnaires de l'éther. Ils n'auraient ainsi aucun caractère vibratoire ou périodique.

Théorie de l'émission. — Jusqu'ici nous avons toujours admis que les rayons X, quoique produits par les rayons cathodiques, en diffèrent aussi profondément que la lumière verte qui en est une autre manifestation. Nous pouvions donc chercher l'explication des radiations Röntgen, sans nous préoccuper de la rattacher à celle des phénomènes qui accompagnent la décharge dans le vide de Crookes.

Mais cette opinion n'est pas partagée par tout le monde. Bien des Anglais, Lodge entre autres, ne seraient pas éloignés de penser que les rayons X ne sont que des rayons cathodiques modifiés.

Dans le vide de Crookes, des molécules gazeuses électrisées chemineraient avec une grande vitesse; elles pourraient traverser le verre et sortir du tube, mais en se dépouillant de leur charge.

Le rayon cathodique, courant de matière électrisée serait déviable à l'aimant comme un courant électrique; mais il n'en serait pas de même du rayon X, simple courant de matière sans électricité.

L'effet Lafay. — S'il en était ainsi, on pourrait rendre aux rayons Röntgen la sensibilité aux actions magnétiques en leur rendant leur charge. L'expérience de Lafay, que je vais décrire, semble, au premier abord, confirmer cette manière de voir.

Si l'on fait passer un faisceau Röntgen à travers une plaque d'aluminium très mince, chargée d'électricité, ce faisceau devient susceptible d'être dévié par un champ magnétique. Mais cela reste vrai, que le faisceau rencontre le champ magnétique après la plaque électrisée, ou qu'au contraire il rencontre le champ *avant* la plaque.

Ce phénomène n'est donc pas une confirmation de la théorie de l'émission. Cette théorie exige, en effet, que les molécules en mouvement soient détournées de leur route par l'aimant, *après* qu'elles ont recouvré leur charge électrique; mais elle n'expliquerait pas que l'aimant agit sur des molécules qui *vont* être électrisées.

Il faut donc chercher une autre explication. Les rayons X rendent l'air conducteur; s'ils rencontrent un corps électrisé, il y aura sur leur passage

des courants électriques; quand ces courants seront déviés par l'aimant, ils sembleront entraîner les rayons eux-mêmes par un mécanisme encore inconnu.

L'expérience de Lafay a été contestée par Lodge.

Les rayons Lenard et les rayons Röntgen. — Jusqu'à nouvel ordre, on doit donc admettre que les rayons Lenard sont des rayons cathodiques sortis du tube et que les rayons X sont autre chose.

Il est certain que Lenard, avec son dispositif, a dû produire des rayons Röntgen qui sont venus troubler ses expériences sans qu'il ait pu en discerner l'influence. Cependant les apparences qu'il décrit sont très différentes des effets ordinaires de ces radiations et l'on doit supposer qu'il y avait autre chose.

Les rayons X émanent du verre, non seulement suivant le prolongement du rayon cathodique excitateur, mais dans toutes les directions. Les rayons Lenard se comportent de même en traversant la fenêtre d'aluminium qui semble les diffuser dans tous les sens.

A part cela le contraste est complet.

Les rayons Lenard sont déviables par l'aimant; les rayons X ne le sont pas, ni dans le vide, ni à la pression ordinaire.

Presque tous les corps absorbent les premiers, mais *surtout ils les diffusent;* si bien qu'ils sont arrêtés au bout de quelques centimètres, même dans l'air où les rayons Röntgen se propagent sans absorption sensible et *sans diffusion.*

VI. — **Autres radiations nouvelles.**

Les rayons Becquerel. — Un même agent, le rayon cathodique, produit deux manifestations différentes, la fluorescence visible et les rayons X; on peut se demander s'il n'y a pas entre elles quelque connexion, si les conditions qui produisent l'une ne favoriseront pas l'autre; il est donc naturel d'essayer si des corps les plus vivement fluorescents n'émane pas quelque chose d'analogue aux rayons Röntgen.

Après une première expérience de Ch. Henry sur le sulfure de zinc, H. Becquerel essaya les sels d'urane. Un cristal, placé sur une plaque photographique recouverte de papier noir, impressionne cette plaque, même à travers certains corps généralement regardés comme opaque.

Ce même cristal ne produirait de fluorescence visible qu'après avoir été

exposé à la lumière et perdrait son éclat en une petite fraction de seconde après l'extinction de la lumière excitatrice.

Au contraire, il émettra les rayons nouveaux dans l'obscurité et l'émission continuera pendant de longues heures, sans affaiblissement sensible. Il n'est même pas certain que la lumière augmente l'intensité du phénomène.

Il semble que ces corps aient accumulé en eux, depuis le moment où ils ont pris naissance, une provision d'énergie qu'ils dépensent sous forme de rayons Becquerel, que la lumière et les agents extérieurs ne peuvent renouveler, mais qui ne s'épuise que lentement. Au contraire, l'énergie qui est dépensée sous forme de lumière visible s'épuise rapidement, mais peut être renouvelée par les agents extérieurs.

Les résultats obtenus avec le sulfure de calcium et le sulfure de zinc ne sont pas moins curieux. M. Troost, avec du sulfure de zinc récemment préparé, a obtenu d'abord d'excellents résultats; au bout de quelques jours, son sulfure avait perdu toutes ses propriétés. Là aussi sans doute, la provision d'énergie primitive s'était épuisée et ne pouvait plus se renouveler.

Les sels d'urane la conservent beaucoup plus longtemps, peut-être indéfiniment. L'uranium métallique est très actif bien qu'il ne produise pas de fluorescence visible.

Propriétés des rayons Becquerel. — Les rayons Becquerel ont certaines propriétés qui les rapprochent des rayons Röntgen; ils traversent les corps opaques, ils agissent sur le gélatinobromure, ils déchargent les conducteurs électrisés.

D'autres les en éloignent; ils se réfléchissent et se réfractent; ils sont polarisés par la tourmaline; cette dernière propriété ne peut appartenir qu'à des ondes transversales.

Les rayons Becquerel sont donc des rayons lumineux.

Si l'on considère alors leurs analogies avec les rayons X, on est tenté de conclure qu'ils forment le trait d'union entre la lumière ordinaire et les rayons Röntgen et que ceux-ci ne doivent leurs singulières propriétés qu'à leur très courte longueur d'onde, comme le supposent les partisans de la théorie ultra-violette.

Effets de l'effluve. — Je ne puis passer sous silence les expériences de Moreau et de Lord Blythwood qui ont obtenu des effets analogues à ceux des

rayons Röntgen avec l'effluve ou l'étincelle électrique, *sans employer le tube de Crookes*.

Les deux hypothèses les plus naturelles sont que l'action photographique est due à la lumière de quelque étincelle secondaire, ou que les sels d'argent sont décomposés non par des radiations proprement dites, mais par des courants électriques traversant la gélatine.

Cependant Lord Blythwood a pu impressionner une plaque enfermée dans une boîte métallique entièrement close, avec une petite fenêtre d'aluminium mince. Ces deux hypothèses se trouveraient alors exclues.

Faudrait-il donc admettre que l'étincelle électrique peut, même à la pression ordinaire, communiquer à l'air une fluorescence invisible analogue à celle qui produit les rayons X ? On ne saurait le dire.

Les rayons Le Bon. — M. Le Bon enferme, dans un châssis métallique, un cliché négatif et un papier sensible ; il expose le tout à une source quelconque de lumière ; après une pose de plusieurs heures, le papier est impressionné et l'on obtient un positif. Cette action serait due à un agent nouveau, la « lumière noire ».

Quelques expérimentateurs ont recommencé avec succès l'expérience de Le Bon ; d'autres n'ont pu y parvenir et ont été jusqu'à penser que la lumière noire n'existe pas, que l'inventeur a été dupe de quelque erreur et que la lumière extérieure pénétrait par une fissure du chassis mal clos.

Quoi qu'il en soit, « le déterminisme de ces expériences, dit M. Le Bon, n'est pas encore bien établi ».

En présence de ces contradictions, je suis forcé de me montrer plus circonspect encore que je ne l'ai été jusqu'ici,

Les *rayons* Le Bon, s'ils existent, ne peuvent être regardés comme des éléments de la lumière blanche, qui chemineraient avec elle pour traverser ensuite les plaques métalliques. Il est plus probable qu'ils sont excités par cette lumière dans la matière même du métal, par une sorte de fluorescence. C'est ainsi que M. d'Arsonval explique les contradictions des auteurs. On comprendrait aussi comment une plaque métallique, exposée au soleil, pourrait conserver quelque temps la propriété d'émettre la lumière noire.

Mais a-t-on bien le droit de parler des *rayons* de la lumière noire ? D'après certaines expériences de Le Bon, encore incomplètes, cet agent n'est pas arrêté par les obstacles : il ne les traverse pas, il les *contourne*. Sa marche n'est pas

rectiligne et si l'on veut l'assimiler à des ondes, ce ne peut être qu'à des ondes de très grande longueur. Mais il se comporte encore plutôt comme un courant électrique dans la masse d'un conducteur.

Faut-il alors rapprocher ce phénomène des effets de l'effluve dont je viens de parler, ou de l'action des vapeurs métalliques sur les plaques photographiques, observée par MM. Pellet et Colson ?

Toute discussion à ce sujet serait oiseuse, tant que la réalité même du phénomène est contestée par quelques auteurs.

Il semble que la lumière noire traverse mieux les métaux que les rayons Röntgen, mais qu'en revanche elle est arrêtée par le papier noir.

Pour clore cette liste, je dois parler aussi de certaines radiations invisibles qui seraient émises par quelques corps organisés, principalement par ceux qui s'éclairent d'une phosphorescence visible.

Résumé. — Jusqu'à présent, le chapitre consacré à la phosphorescence et à la fluorescence restait isolé et était relégué dans un coin des traités de Physique.

Il semblait que la voie où s'était engagés les Becquerel dût aboutir à un cul-de-sac. Loin de là, on peut penser aujourd'hui qu'elle va nous ouvrir l'accès de tout un monde nouveau que nul ne soupçonnait.

A côté de la fluorescence visible nous avons maintenant la fluorescence invisible.

Certains corps émettent des rayons Becquerel ; ces mêmes corps, excités par la lumière, produisent d'autres rayons lumineux.

Les rayons cathodiques excitent les rayons Röntgen ; ils excitent aussi la fluorescence lumineuse.

Les rayons Röntgen à leur tour excitent la fluorescence visible et probablement aussi diverses radiations invisibles.

Tous ces faits seront sans doute un jour reliés entre eux et rattachés à une même cause. Bien d'autres alors viendront sans doute se grouper autour d'eux et compléter un tableau dont nous commençons à entrevoir l'esquisse.

1er octobre 1896.

NOTICE

SUR LA

TÉLÉGRAPHIE SANS FIL

Annuaire du Bureau des Longitudes, p. A.1-A.34 (1902).
Revue scientifique, 4e série, t. 17, p. 65-73 (1902).

Principe de la Télégraphie sans fil. — On sait depuis Faraday que si un circuit métallique est placé dans le voisinage d'un courant intermittent, alternatif, ou variable, il se produit dans ce circuit des courants secondaires appelés *courants induits*. Cette action se fait sentir à distance, aussi bien à travers un isolant ou à travers l'air qu'à travers un conducteur. Il y a là, théoriquement au moins, un moyen d'envoyer des signaux à distance sans l'intermédiaire d'aucun fil.

Mais cette idée a longtemps paru chimérique. Avec les ressources dont on disposait autrefois, les effets d'induction ne pouvaient être sensibles qu'à de très petites distances, beaucoup trop petites pour qu'on pût songer à en tirer parti.

Ce sont les expériences de Hertz en 1888 qui ont fait entrer la question dans une nouvelle phase. J'ai déjà rendu compte des principes et des résultats de ces expériences dans une Notice de l'*Annuaire* de 1894 (¹). Je me bornerai donc ici à quelques indications rapides.

Hertz produit des courants dont l'alternance est très rapide, puisqu'ils changent de sens de 100 millions à 1 milliard de fois par seconde, de telle façon que leur période est 2.10^{-8} à 2.10^{-9} secondes. Il se sert pour cela d'un appareil appelé *excitateur*, qui se compose simplement de deux conducteurs placés près

(¹) Ce tome, p. 557.

l'un de l'autre ; chacun de ces conducteurs se termine par une petite boule, et entre ces deux boules peut éclater une étincelle quand la différence de potentiel est assez grande. Ces deux conducteurs sont mis en communication avec les deux pôles du secondaire d'une bobine de Ruhmkoff.

Le temps que les courants secondaires de cette bobine mettent à naître et à disparaître est extrêmement court, si on le compare aux durées que nous sommes accoutumés à considérer. Il est très long au contraire, si on le compare aux durées dont je viens de parler et qui sont de l'ordre d'un cinquante-millionième de seconde. A ce point de vue, je puis donc dire que la bobine de Ruhmkorff chargera *très lentement* les deux conducteurs. Quand la différence de potentiel sera assez grande l'étincelle éclatera et les conducteurs se déchargeront *brusquement*. Mais cette décharge ne sera pas simple, elle se fera par une série d'oscillations. C'est ainsi qu'un pendule, écarté de sa position d'équilibre, n'y revient qu'après avoir oscillé quelque temps. Suivant les dimensions de l'appareil, la période de ces oscillations varie, comme je l'ai dit, de 2.10^{-8} à 2.10^{-9}.

Les effets d'induction, étant dus aux variations du courant primaire, sont d'autant plus intenses que ces variations sont plus rapides. Il est donc naturel que Hertz, avec de pareilles fréquences, ait pu observer ces effets à plusieurs mètres.

Il a démontré qu'ils ne se propagent pas instantanément comme on l'avait longtemps cru, mais avec la vitesse de la lumière ; que de plus, lorsqu'ils se répètent périodiquement et avec une alternance rapide, ils reproduisent toutes les propriétés de la lumière. Hertz avait donc fait une véritable synthèse de la lumière; ainsi se trouvait confirmée l'idée de Maxwell, d'après laquelle la lumière est due à des phénomènes électriques alternatifs de période très courte.

Les différences apparentes ne sont dues qu'à la durée de la période, ou à ce qu'on appelle la *longueur d'onde*, c'est-à-dire le chemin parcouru par la lumière pendant une période. Si cette longueur est de quelques dix-millièmes de millimètre on a les radiations visibles, si elle est de quelques centimètres ou de quelques mètres on a les radiations hertziennes ; de sorte qu'en passant des ondes les plus courtes aux ondes plus longues, on rencontre successivement les rayons chimiques ultraviolets invisibles, les rayons violets, bleus, verts, jaunes, rouges, les rayons calorifiques invisibles et enfin les rayons hertziens, de sorte qu'il n'y a pas d'autre différence entre ceux-ci et la lumière visible qu'entre la lumière verte et la lumière rouge.

Mais alors, si la lumière ordinaire permet d'envoyer au loin des signaux par la télégraphie optique, pourquoi la lumière hertzienne, si je puis m'exprimer ainsi, ne donnerait-elle pas aussi une solution du problème de la télégraphie sans fil ?

La télégraphie optique dispose, il est vrai, d'une ressource qui fait défaut à la télégraphie hertzienne ; elle concentre la lumière par le moyen de lentilles et de miroirs, transforme les rayons divergents, émanés d'une source, en un faisceau de rayons parallèles et les envoie dans une seule direction. Avec des radiations hertziennes, c'est-à-dire avec des ondes de grande longueur, cela n'est plus possible.

On dit communément que la lumière se propage en ligne droite, mais cela n'est qu'à peu près vrai ; sur les bords d'un faisceau lumineux, les rayons s'écartent plus ou moins de leur trajectoire rectiligne et ce phénomène qu'on appelle *diffraction* est d'autant plus accentué que la longueur d'onde est plus grande. Si la lumière visible se propage sensiblement en ligne droite et suit les lois connues de la réflexion et de la réfraction, c'est parce que sa longueur d'onde est plus petite qu'un millième de millimètre, extrêmement petite, par conséquent, par rapport aux dimensions des obstacles qu'elle rencontre, des lentilles qu'elle traverse, des miroirs qui la réfléchissent.

Pour concentrer les ondes hertziennes, il faudrait donc des lentilles énormément plus grandes que la longueur de ces ondes ; sans cela, le phénomène de diffraction deviendra prépondérant et la réfraction ne se fera plus régulièrement. Avec des ondes de quelques mètres, il faudrait donner aux lentilles un diamètre de plusieurs kilomètres ; avec des ondes de quelques centimètres, il faudrait encore de très grandes lentilles.

Il y a d'ailleurs une autre raison qui empêche de songer à employer ces ondes courtes.

Righi a bien pu obtenir des ondes très courtes, mais avec de très petits excitateurs de capacité très petite, où l'on ne peut, par conséquent, accumuler que très peu d'électricité, c'est-à-dire très peu d'énergie. Les effets deviennent alors trop faibles pour pouvoir être utilisés en télégraphie.

Donc, pas de concentration possible. On comprendra combien la difficulté est grande si l'on se rend compte de la faiblesse de l'énergie produite dans un excitateur et c'est ce qu'on pourra faire à l'aide de la comparaison suivante. A chaque décharge, une certaine quantité d'énergie est accumulée dans l'excitateur. C'est elle qui produit les oscillations et ces oscillations se poursuivraient

indéfiniment si cette énergie ne se dissipait pas. Mais elle se dissipe de deux manières : d'abord par rayonnement, elle se communique à l'éther ambiant sous forme d'ondes hertziennes ; c'est cette partie de l'énergie qui est utilisable. Ensuite par la résistance des conducteurs, qui agit sur les oscillations électriques comme le frottement agirait sur un pendule, de sorte que, les conducteurs s'échauffant, une partie de l'énergie est transformée en chaleur, et définitivement perdue. C'est le petit espace où l'étincelle éclate qui est de beaucoup le plus résistant, de sorte que presque toute cette énergie perdue est employée à produire la lumière et la chaleur de l'étincelle.

A première vue, et en nous contentant d'une évaluation grossière, nous pouvons admettre que l'énergie ainsi perdue est le dixième de l'énergie totale. Mais toute cette énergie perdue ne se retrouve pas sous forme de lumière visible ; la plus grande partie prend la forme de chaleur obscure. Toutefois, comme la température de l'étincelle est énorme, et par conséquent le rendement lumineux très bon, on peut admettre qu'un dixième de l'énergie de l'étincelle est de la lumière visible. A ce compte, l'énergie de la lumière de l'étincelle serait le centième de celle des ondes hertziennes ; toutes choses égales d'ailleurs, elle devrait donc pénétrer dix fois moins loin. (Je dis dix fois, à cause de la loi du carré des distances). Si donc la rétine humaine avait la même sensibilité que les appareils qui décèlent les ondes hertziennes à 300 km, nous devrions voir l'étincelle à 30 km et cela sans le secours d'aucun système de concentration. Nous sommes loin de compte, et nous devons conclure que la télégraphie sans fil n'aurait jamais pu fonctionner, si l'on n'avait inventé un appareil beaucoup plus sensible que notre rétine qui, cependant, est déjà un instrument d'une merveilleuse délicatesse.

Description succincte des appareils. — Cet appareil, d'une exquise sensibilité sans laquelle la télégraphie sans fil serait toujours restée une chimère, a reçu le nom de *cohéreur*. Il se compose simplement d'un tube de verre rempli de limaille métallique ; aux deux extrémités de ce tube se trouvent deux électrodes qui sont mises en communication avec les deux pôles d'une pile. Ordinairement le cohéreur est isolant parce que les contacts des grains de limaille entre eux sont mauvais ; et le courant de la pile ne passe pas. Mais, si le cohéreur est frappé par une onde hertzienne, il devient conducteur, et le courant passe. Il suffit ensuite d'un choc léger pour lui faire perdre sa conductibilité et pour faire cesser le courant.

Ainsi, une onde très faible *déclenche*, pour ainsi dire, le courant de la pile, et rien n'empêche de prendre cette pile assez forte pour faire marcher un appareil Morse, soit directement, soit par l'intermédiaire d'un relais ; le courant de la pile décèlera ainsi la présence des ondes.

Je reviendrai plus loin sur l'explication du phénomène ; je dirai seulement qu'il a été découvert indépendamment par M. Branly en France, puis par M. Lodge en Angleterre.

Un autre organe essentiel de la Télégraphie sans fil est *l'antenne*, c'est une longue tige métallique verticale de 10 à 50 m, soutenue par un mât. Elle est mise en communication avec une des deux moitiés de l'excitateur (qui se compose, je le rappelle, de deux conducteurs entre lesquels éclate une étincelle); l'autre moitié communique avec le sol.

Je discuterai plus loin le rôle de l'antenne.

L'appareil transmetteur se composera donc d'un excitateur dont une moitié communique avec l'antenne et l'autre avec le sol (*fig.* 1).

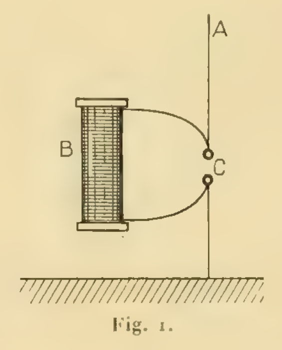


Fig. 1.

Cette figure représente l'appareil transmetteur, elle est schématique ; elle n'est pas à l'échelle, pas même grossièrement ; il est clair, en effet, que, l'antenne ayant 50^m, les autres parties de l'appareil n'auraient pu être représentées si les proportions avaient été conservées. Cette observation s'applique à toutes les figures suivantes.

A, antenne ; C, intervalle où éclate l'étincelle ; B, bobine de Ruhmkorff.

L'appareil récepteur se composera d'une antenne et d'un cohéreur dont une des électrodes communique d'une part avec l'antenne réceptrice (*fig.* 2) et d'autre part avec un des pôles d'une pile, tandis que l'autre électrode communique d'une part avec le sol, et d'autre part avec l'autre pôle de la pile.

Quand, à la station de transmission, on fera fonctionner la bobine de Ruhmkorff, des oscillations électriques se produiront dans le système formé par l'excitateur et l'antenne ; l'énergie de ces oscillations rayonnera au dehors

sous forme d'ondulations hertziennes ; elle atteindra l'antenne réceptrice; des courants induits oscillatoires se produiront alors de l'antenne au sol à travers le cohéreur; ces courants seront excessivement faibles, mais ils suffiront pour

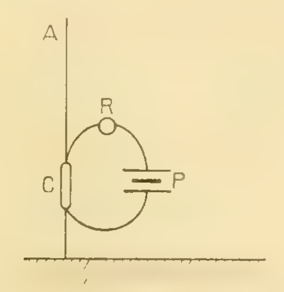


Fig. 2. — *Appareil récepteur.*

A, antenne; R, relais faisant fonctionner le Morse; P, pile locale; C, cohéreur.

impressionner le cohéreur qui deviendra conducteur. Le courant de la pile passera alors et actionnera un appareil Morse. Un petit marteau trembleur, en frappant périodiquement le cohéreur, lui fera perdre sa conductibilité et le rendra ainsi capable de recevoir un nouveau signal.

Explications théoriques. — Certains savants répugnent à admettre l'explication classique de la Télégraphie sans fil, ils invoquent divers arguments que nous allons examiner :

1° Ils s'étonnent que l'effet puisse être sensible à des centaines de kilomètres, s'il diminue, avec la distance, suivant la même loi que la lumière; et ils en concluent que la propagation s'effectue par quelque processus différent, tel que la décroissance avec la distance soit moins rapide. Mais ils n'ont jusqu'ici rien pu trouver qui paraisse d'accord avec ce que nous savons de l'électricité.

2° Ils remarquent que les ondes hertziennes contournent les obstacles et ne se propagent pas en ligne droite comme la lumière. Ils oublient que la lumière non plus ne marche qu'à peu près en ligne droite; que, par suite de la diffraction, un peu de lumière pénètre dans l'ombre géométrique. Or, la diffraction est d'autant plus marquée que la longueur d'onde est plus grande, donc, les ondes hertziennes, qui sont un million de fois plus longues que les ondes lumineuses, pénétreront beaucoup plus facilement dans l'ombre géométrique et

contourneront ainsi des obstacles qui nous paraissent énormes, tels que de petites collines, ou la convexité du globe terrestre qui, pour des distances de plusieurs centaines de kilomètres, représente un obstacle de plusieurs centaines de mètres de hauteur.

3° Ils font observer que la propagation est beaucoup plus facile sur mer que sur terre; c'est en effet ce que toutes les expériences confirment; ils en concluent que la conductibilité du sol joue un rôle prépondérant. Mais le fait tient-il à la conductibilité de l'eau de mer, qui est d'ailleurs très faible pour des courants de haute fréquence, ou s'explique-t-il par l'absence d'obstacles géométriques? C'est ce qu'il est encore difficile de dire.

D'ailleurs une expérience directe a montré qu'un cohéreur fonctionnait s'il était placé au fond d'un trou creusé dans la terre *sans être recouvert*, mais qu'il restait inactif s'il était enterré : ce qui prouve bien que les ondes ne passent pas à travers la terre par conduction, que par conséquent elles ne traversent pas les obstacles, mais qu'elles les contournent par diffraction.

Il est vrai, d'autre part, que la portée est considérablement augmentée quand l'excitateur communique avec le sol; nous verrons tout à l'heure pourquoi; mais quand on supprime cette communication la portée en est seulement amoindrie, tandis que la transmission devrait cesser complètement si elle se faisait par la terre.

En résumé, aucun de ces arguments n'a paru convaincant à la majorité des physiciens. Mais une autre question se pose : l'excitateur se compose de deux petites boules entre lesquelles éclate l'étincelle; les ondes ont-elles même période que si ces deux boules étaient isolées; ou bien le système de l'antenne, des deux boules et du sol fonctionne-t-il comme un grand excitateur, qui émettrait alors des ondes bien plus longues? Dans la première hypothèse, à laquelle on a cru longtemps, l'antenne ne jouerait que le rôle d'un fil conducteur, qui amènerait les ondes émises par les deux petites boules jusqu'à son extrémité supérieure et les transmettrait ensuite à l'éther ambiant.

Aucune de ces deux hypothèses n'est absurde : l'appareil pourrait émettre soit des ondes courtes, soit des ondes longues, de même qu'une corde vibrante peut donner plusieurs sons harmoniques. Mais l'expérience a décidé en faveur de la seconde. M. le Lieutenant de vaisseau Tissot a mesuré directement la période par le moyen d'un miroir tournant; il a trouvé 0,06 à $1,8.10^{-6}$ seconde. Les ondes sont donc cent à mille fois plus longues que celles obtenues par

Hertz, dix à cent mille fois plus longues que celles de Righi, un milliard de fois plus longues que les ondes lumineuses. C'est même grâce à cette circonstance que la mesure a été possible; les vibrations réalisées par Hertz auraient été trop rapides et le miroir tournant n'aurait pas pu décomposer l'étincelle. C'est là en même temps une vérification du caractère périodique du phénomène.

Il resterait, pour achever de contrôler la théorie, à mesurer la vitesse de propagation. Le problème ne paraît pas inabordable; il semble qu'un même ébranlement parti de l'excitateur pourrait être transmis à une même station par deux chemins : par un fil, et à travers l'air. Deux étincelles éclateraient à la station d'arrivée et un miroir tournant permettrait d'apprécier l'intervalle de temps qui les sépare. On pourrait donc comparer la vitesse des ondes hertziennes à travers l'air et dans un fil; quant à cette dernière, elle a été déterminée par l'expérience de Blondlot.

Il serait aussi intéressant de savoir quelle est la quantité d'énergie rayonnée dans les directions obliques; mais cela ne pourrait se faire que par des expériences en ballon.

Je terminerai ces considérations théoriques en parlant du rôle de l'antenne. L'expérience a montré que la longueur des antennes doit être proportionnelle à la racine carrée de la distance à franchir. Pourquoi? Est-ce pour que la droite qui joint les deux extrémités des deux antennes ne rencontre pas la terre? Non, il faudrait pour cela des antennes beaucoup plus grandes. C'est plutôt parce qu'en augmentant leurs dimensions on augmente la longueur d'onde et par conséquent le phénomène de diffraction par lequel peut être contourné l'obstacle dû à la rotondité du globe.

Si l'on a avantage à relier l'excitateur au sol, c'est parce que la capacité de la seconde partie de l'excitateur devient ainsi pratiquement infinie. La longueur d'onde est alors doublée.

Pourquoi maintenant l'antenne doit-elle être verticale? Les sources de lumière naturelle donnent des vibrations dont la direction change constamment; par conséquent, l'énergie est rayonnée également dans tous les sens. Avec une antenne verticale au contraire, la vibration est rectiligne et toujours verticale; elle est *naturelllement polarisée*. Il en résulte qu'il y a plus d'énergie rayonnée dans le plan horizontal, c'est-à-dire dans les directions utiles, que dans les directions verticale ou oblique. On peut calculer qu'il y a une fois et demie plus d'énergie rayonnée dans le plan horizontal que si l'émission se faisait comme celle de la lumière naturelle et trois fois plus d'énergie utilisable, parce

que l'antenne réceptrice utilise toute la vibration qu'elle reçoit et qui est verticale comme elle. Au contraire, dans le cas d'une radiation comparable à la lumière naturelle, un appareil récepteur quelconque ne pourrait utiliser que la moitié de l'énergie qu'elle recevrait, à savoir celle des vibrations qui auraient même direction que lui.

Mais on ne se ferait ainsi qu'une idée insuffisante de la supériorité des excitateurs rectilignes. Un excitateur courbé, formé par exemple d'un fil presque fermé réunissant les deux armatures d'un condensateur, ne serait nullement comparable à une source de lumière naturelle. Nous aurions une sorte de circuit fermé, et par conséquent un fil d'aller et un fil de retour dont les actions de sens contraire se feraient sentir à peu près simultanément, surtout si les dimensions de l'appareil étaient petites par rapport à la longueur d'onde. *Ces actions se compenseraient alors presque complètement.* Au contraire, avec un excitateur rectiligne, toutes les actions s'ajoutent (¹); avec une source de lumière naturelle, les vibrations de sens opposé ne sont pas simultanées, mais elles se succèdent et, comme cette succession est irrégulière, il n'y a pas de raison pour que la compensation se fasse.

Les lois du rayonnement émané d'un excitateur rectiligne sont donc les mêmes que celles des radiations lumineuses; l'amplitude des vibrations varie en raison inverse des distances et l'énergie qui est proportionnelle au carré de cette amplitude en raison inverse du carré des distances. Au contraire, dans le cas d'une compensation complète, l'amplitude varierait en raison inverse du carré de la distance, et l'énergie en raison inverse de la quatrième puissance. Avec un excitateur presque fermé, la compensation serait presque complète et l'on se rapprocherait de cette dernière loi.

J'ai dit que c'est pour augmenter la longueur d'onde qu'on augmente la hauteur des antennes. Mais il ne faudrait pas croire qu'on obtiendrait les mêmes résultats en augmentant la longueur d'onde par d'autres moyens, c'est-à-dire en augmentant d'une manière quelconque la capacité (²) ou la self-induction,

(¹) Cependant la transmission ne se ferait pas si les deux antennes étaient rectilignes, horizontales toutes deux et parallèles; parce que, dans ces conditions, la vibration directe interférerait avec la vibration réfléchie sur le sol ou sur la mer.

(²) Remarquons que la « capacité dynamique » qui intervient dans le calcul de la longueur d'onde n'est pas égale à la capacité mesurée par des procédés statiques, attendu que la distribution électrique pendant les oscillations diffère beaucoup de celle qui correspondrait à l'équilibre électrostatique. J'insiste sur ce point, parce qu'avec certaines antennes la capacité dynamique peut être dix ou quinze fois plus grande que la capacité statique.

la longueur d'onde étant, comme on sait, à un facteur constant près, moyenne proportionnelle entre ces deux quantités. D'après ce qui précède, la forme de l'excitateur est au contraire très importante, et nous venons de voir que l'excitateur ne saurait s'éloigner beaucoup de la forme rectiligne sans devenir incapable de rayonner.

Cependant M. Marconi semble avoir entrepris des expériences pour remplacer l'antenne par un cylindre large et court, mais les résultats en sont encore tenus secrets.

Théorie du cohéreur. — Le cohéreur a reçu bien des formes différentes. D'abord on a employé diverses limailles ou divers mélanges de limailles. Une condition qui semble essentielle, c'est que les métaux employés soient légèrement oxydables ; il est probable que les grains se recouvrent d'une mince couche d'oxyde qui s'oppose au passage du courant. Des limailles de métaux inoxydables le laisseraient toujours passer. Toutefois la couche d'oxyde ne doit pas être trop épaisse, sans quoi le tube resterait isolant même en présence des oscillations hertziennes. C'est pourquoi M. Lodge conseille de sceller le tube et d'y faire le vide quand les métaux ont atteint un degré convenable d'oxydation. On peut obtenir aussi de bons résultats avec de la limaille d'argent, légèrement sulfurée à la surface, la couche de sulfure jouant alors le même rôle que la couche d'oxyde.

On a construit également des cohéreurs à limaille inoxydable, mais en prenant pour les électrodes des métaux oxydables. Il est probable alors que la résistance a lieu au contact de la limaille et des électrodes.

C'est par tâtonnement qu'on est arrivé au mélange le plus avantageux ; celui qu'emploie Marconi comprend 96 % de limaille de nickel et 4 % de limaille d'argent.

Les contacts multiples entre des grains de limaille ne sont pas indispensables ; on a pu réaliser des cohéreurs où il n'y a qu'un contact unique ou un petit nombre de contacts entre des pièces métalliques de dimensions sensibles, par exemple de petites billes ou de petits ressorts d'acier appuyés l'un sur l'autre.

On a construit d'autre part des cohéreurs où le contact sensible a lieu entre charbon et métal, ou entre charbon et charbon (comme dans les microphones). Ces cohéreurs jouissent d'une propriété importante : ils sont *autodécohérents ;* c'est-à-dire qu'après le passage de l'onde ils reprennent d'eux-mêmes leur résistance primitive, sans qu'il soit nécessaire de leur faire subir un choc. On

conçoit que cette propriété puisse devenir précieuse pour les applications téléphoniques, car en téléphonie, les signaux à transmettre sont les vibrations sonores, qui, pour les sons aigus, se succèdent très rapidement. Il serait donc impossible, par des moyens mécaniques, de rendre au cohéreur, après chaque vibration, sa résistance perdue.

Mentionnons pour terminer des appareils que l'on a appelés *décohéreurs* et dont la résistance augmente, au lieu de diminuer, sous l'influence des ondes hertziennes. Ces appareils ont reçu diverses formes. La plus remarquable se compose de plaques métalliques superposées. Le contact des deux plaques présente une certaine résistance qui diminue quand les plaques sont mouillées; mais la résistance primitive reparaît quand les plaques mouillées sont soumises aux ondes électriques. Les décohéreurs n'ont pas toutefois jusqu'ici reçu d'applications pratiques.

Tels sont les faits à expliquer. Les deux inventeurs du tube à limaille lui ont donné deux noms différents : Lodge l'a appelé *cohéreur* et Branly *radioconducteur*. Ces deux dénominations correspondent à des idées théoriques très différentes. Branly suppose que les radiations hertziennes modifient le diélectrique qui sépare les grains de limaille. Lodge pense qu'entre ces grains les ondes hertziennes font éclater des étincelles qui percent les couches isolantes d'oxyde, arrachent des particules des grains de limaille et de ces particules forment des ponts qui soudent pour ainsi dire ces grains l'un à l'autre. Ces ponts, une fois formés, subsisteraient jusqu'à ce qu'un choc les force à s'écrouler; dans les appareils autodécohérents ils seraient plus fragiles encore et disparaîtraient dès que les radiations cesseraient de passer.

La plupart des physiciens ont adopté l'opinion de Lodge; car plusieurs expérimentateurs ont pu observer directement sous le microscope la production des étincelles et la formation des ponts. Ils ne s'étaient pas placés, il est vrai, dans des conditions tout à fait identiques à celles de la télégraphie pratique.

Ce qui est plus difficile à expliquer, dans cette manière de voir, c'est le fonctionnement des cohéreurs où les grains de limaille sont noyés dans un diélectrique solide, tel que la paraffine. On suppose que les étincelles creusent dans la paraffine de petits canaux dont les parois se revêtent de poussière métallique. Dans les décohéreurs, elles agiraient en volatilisant de petits ponts métalliques préexistants, ou en réduisant partiellement en vapeur l'eau qui mouille les plaques. Mais tout cela reste très hypothétique.

Le cohéreur doit être réglé; pour cela on rapproche plus ou moins les deux

électrodes pour faire varier la pression mutuelle des grains de limaille ; si cette pression est trop grande le courant passe toujours ; si elle est trop faible, les ondes hertziennes ne suffisent plus pour lui ouvrir le passage ; mais entre certaines limites la résistance qui est de l'ordre du méghom devient subitement un million de fois plus petite sous l'influence des radiations et tombe à l'ordre de l'ohm.

Si l'on réfléchit à l'explication de Lodge, l'extrême sensibilité du cohéreur paraîtra moins extraordinaire. Pour qu'il fonctionne, il suffit que l'étincelle éclate et pour cela qu'*à un moment quelconque* la différence de potentiel atteigne une certaine limite (limite d'ailleurs très faible puisque les intervalles des grains de limaille sont microscopiques) ; tout dépend donc de l'ébranlement *maximum*. Or celui-ci peut être considérable bien que l'énergie totale soit très faible parce que la durée de la perturbation est très courte.

Peu importe que ce maximum ne soit atteint que pendant un instant, car dès que l'étincelle a jailli, les ponts sont formés et livrent passage au courant de la pile locale. L'effet de l'onde persiste donc jusqu'à ce qu'un choc le fasse cesser. Il y a là quelque chose d'analogue à cette « persistance des impressions » à laquelle notre rétine doit en partie sa sensibilité.

L'énergie accumulée dans l'excitateur se dissipe par le rayonnement ; l'amplitude des oscillations décroît donc rapidement : c'est ce qu'on appelle l'*amortissement*. Il est clair que, plus cet amortissement sera grand, plus courte sera la durée totale de l'ébranlement ; plus par conséquent l'ébranlement maximum sera grand pour une même quantité d'énergie accumulée.

D'après ce que nous venons de dire, nous devons donc nous attendre à ce qu'un fort amortissement soit favorable aux transmissions lointaines. C'est en effet ce qu'ont démontré les expériences de M. Tissot. Et même quelques-unes de ces expériences semblent prouver que si la mise au sol de l'excitateur favorise la transmission, ce n'est pas seulement parce qu'elle augmente la longueur d'onde et par là la diffraction, ni parce qu'elle augmente la capacité et par là l'énergie totale accumulée, mais surtout parce qu'elle augmente l'amortissement.

Avantages et inconvénients de la Télégraphie sans fil. — La télégraphie hertzienne est comparable comme nous l'avons dit, à la télégraphie optique. Il y a cependant d'assez grandes dissemblances provenant toutes de la différence des longueurs d'onde. La longueur d'onde étant plus grande, la diffrac-

tion devient notable ; d'où la possibilité de contourner les obstacles. L'obstacle le plus important est celui qui est dû à la rotondité même du globe ; la lumière ordinaire ne peut ni le traverser, ni le tourner ; en télégraphie optique on ne pourra donc communiquer à de grandes distances qu'à la condition d'avoir des postes très élevés. Avec des ondes longues, la diffraction est assez grande pour qu'il soit possible de contourner la convexité terrestre ; on peut donc communiquer entre des points qui ne se voient pas. Ainsi a disparu la principale difficulté qui limitait la distance franchissable. Ainsi, avec la télégraphie optique on allait à 40 ou 50^{km} en choisissant des postes favorables ; avec la télégraphie sans fil on ira à 300^{km}.

D'autre part, la lumière visible est arrêtée par le brouillard, il n'en est pas de même de la lumière hertzienne ? Pourquoi ? Si la lumière est arrêtée, ce n'est pas précisément qu'elle soit absorbée, car elle traverserait sans peine la même quantité d'eau à l'état de liquide homogène ; elle est dissipée par les réflexions multiples qu'elle subit à la surface des innombrables vésicules du brouillard. C'est pour la même raison que le verre compact est transparent tandis que le verre pilé est opaque. Mais pour que ces réflexions se produisent, il faut que les dimensions de ces vésicules soient grandes par rapport à une longueur d'onde. Une observation vulgaire le fera comprendre. On voit souvent sur les bulles de savon, au milieu des plages colorées, des taches entièrement noires ; ce sont les places où l'épaisseur de la bulle est non pas nulle (elle ne l'est nulle part, puisque la bulle n'est pas crevée) mais notablement plus petite qu'une longueur d'onde. Dans ces conditions la surface de la bulle ne réfléchit plus de lumière et c'est pour cela qu'elle paraît noire.

Or, les dimensions des vésicules sont très grandes par rapport aux longueurs d'ondes lumineuses, très petites au contraire par rapport aux longueurs d'ondes hertziennes. C'est ce qui explique pourquoi elles se comportent si différemment dans les deux cas.

Cette transmission facile de la lumière hertzienne à travers le brouillard est une propriété précieuse, et l'on a proposé de s'en servir pour éviter les collisions en mer.

Nous avons vu que l'on doit renoncer à concentrer les ondes hertziennes dans une seule direction comme on le fait en télégraphie optique. Mais cet inconvénient emporte avec lui un avantage. Si les radiations sont concentrées dans une seule direction, il faut régler cette direction ; ce réglage est long et délicat, de sorte qu'on ne peut guère communiquer qu'entre des postes fixes. Au contraire,

les ondes hertziennes étant envoyées indifféremment dans toutes les directions permettront de communiquer avec un poste mobile quand même la position n'en serait pas connue. D'où l'importance du nouveau système pour la marine.

Voici maintenant les inconvénients. La télégraphie optique et la télégraphie hertzienne ont sur la télégraphie ordinaire un avantage commun : c'est qu'en temps de guerre l'ennemi ne peut pas interrompre les communications en coupant les fils. Mais avec la télégraphie optique, le secret est assuré à moins que l'ennemi ne puisse se placer sur la trajectoire du mince filet lumineux envoyé d'une station à l'autre, et qui passe le plus souvent à une grande hauteur. Les ondes hertziennes sont, au contraire, envoyées dans toutes les directions ; elles peuvent donc impressionner les cohéreurs ennemis aussi bien que les cohéreurs amis et, pour le secret, on ne peut plus se fier qu'à son chiffre. De plus, l'ennemi peut troubler les communications en envoyant des signaux incohérents qui viendront se confondre avec les signaux émis par la station amie. Même en temps de paix, il importerait d'assurer le secret des correspondances et, d'autre part, on peut prévoir un moment où, les appareils se multipliant, les signaux émis par plusieurs stations voisines se superposeront de façon à engendrer une confusion inextricable. On se souvient qu'Édison avait menacé ses concurrents européens, s'ils voulaient expérimenter en Amérique, de troubler leurs expériences de cette manière.

Perfectionnements récents. — Tels sont les inconvénients que les inventeurs ont cherché à atténuer. Bien des procédés ont été proposés, mais je ne parlerai que de ceux que l'on a commencé à soumettre à des essais pratiques et qui sont tous fondés sur le principe de « syntonisation », c'est-à-dire qui cherchent tous à imiter le phénomène acoustique de la résonance. On sait qu'un corps sonore, placé dans le voisinage d'un autre corps vibrant, entrera lui-même en vibration, mais que ces vibrations, très fortes si les sons propres des deux corps sont à l'unisson, seront presque insensibles pour peu que l'on s'écarte de cet unisson.

Si l'on pouvait obtenir les mêmes résultats avec des vibrations électriques, le problème serait résolu. Des signaux de période différente pourraient se superposer sans dommage, chaque récepteur démêlerait celui pour lequel il serait accordé. D'ailleurs nous n'aurions plus à craindre que l'ennemi inter-

cepte nos télégrammes, puisqu'il ne sait pas quelle est la période de notre excitateur.

Malheureusement il y a de grandes difficultés. Sans doute un récepteur vibre mieux s'il est à l'unisson de l'excitateur; mais si l'on s'écarte de cet unisson, l'amplitude des vibrations, au lieu de devenir presque brusquement insensible, comme en acoustique, décroît avec une certaine lenteur. Il y a donc résonance, mais résonance imparfaite.

Et encore, cette résonance, nous la connaissons par les anciennes expériences de Hertz qui n'employait pas le cohéreur. Nous l'ignorerions peut-être encore si l'on s'était toujours servi du tube à limaille. Le cohéreur, en effet, à cause de sa sensibilité même, ne saurait distinguer ces différences. Il est impressionné par des excitations très faibles et comme ce n'est qu'un appareil de déclenchement, il ne répond pas mieux aux excitations fortes qu'aux excitations faibles, pourvu que celles-ci dépassent la limite de sa sensibilité. C'est pourquoi la période peut varier de 1 à 30, comme pour deux sons distants de cinq octaves, sans qu'on constate de différence appréciable dans la qualité de la réception.

Pourquoi cette différence entre la résonance acoustique et la résonance électrique? C'est parce que les oscillations, nous l'avons vu, *s'amortissent* très rapidement; il en résulte que les vibrations électriques sont plutôt comparables à un bruit qu'à un son musical pur.

M. Slaby a imaginé, pour triompher de ces difficultés, un artifice fondé sur un principe fort ingénieux, mais sur lequel les détails nous manquent. Je m'étendrai donc seulement sur les procédés qui ont servi à M. Marconi pour communiquer de Wimereux à Douvres par dessus le Pas-de-Calais, et d'Antibes en Corse par dessus la Méditerranée.

Le nouveau transmetteur Marconi (*fig.* 3) se compose d'un excitateur primaire et d'un appareil secondaire. L'excitateur primaire est formé de treize bouteilles de Leyde, associées en quantité, dont les armatures sont réunies par un fil; ce fil est interrompu sur quelques millimètres et c'est dans cette interruption que jaillit l'étincelle. Les armatures sont d'autre part en connexion avec les deux pôles de la bobine de Ruhmkorff. La bobine charge les bouteilles, comme nous l'avons expliqué, et, quand l'étincelle éclate, les bouteilles se déchargent en oscillant. *On remarquera que cet excitateur n'est pas rectiligne, mais presque fermé sur lui-même.*

Le secondaire est formé par l'antenne directement reliée au sol. Il n'y a donc plus connexion directe entre l'antenne et l'excitateur; et l'ébranlement

ne se transmet à l'antenne que par induction; voici comment. On sait ce que c'est qu'un transformateur (¹) : c'est une bobine sur laquelle s'enroulent deux fils; quand on produit un courant variable dans l'un des fils, il naît un courant

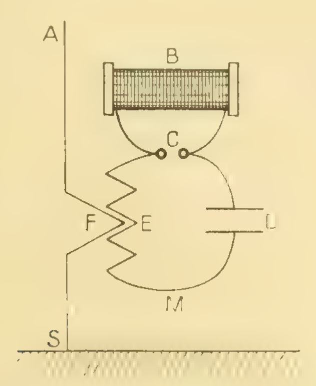


Fig. 3. — *Transmetteur Marconi.*

B, bobine de Ruhmkorff; CDME, excitateur primaire; C, intervalle où éclate l'étincelle; D, bouteilles de Leyde; E, enroulement primaire du transformateur; AFS, secondaire; A, antenne; F, enroulement secondaire du transformateur; S, sol

Les bouteilles de Leyde D et le transformateur EF sont représentés schématiquement suivant l'usage des électriciens.

induit dans l'autre fil. C'est un appareil analogue qui transmet ici l'ébranlement; autour d'un cadre de bois plongé dans l'huile s'enroulent, d'une part, quelques spires du fil primaire de l'excitateur et, d'autre part, une spire du fil secondaire qui relie l'antenne au sol.

On peut prévoir que ce dispositif réduira l'amortissement de sorte que l'oscillation électrique se rapprochera un peu du son musical pur. J'ai dit plus haut qu'un excitateur presque fermé rayonne très mal; c'est justement pour cela qu'il conserve son énergie et qu'il s'amortit lentement. Il la conserverait bien plus longtemps encore si, par le transformateur, il n'en transmettait une partie au secondaire et à l'antenne. Celle-ci rayonne rapidement ce qu'elle a reçu, et cependant l'amplitude de ses vibrations se maintient quelque temps, parce qu'à mesure qu'elle perd de l'énergie par rayonnement elle en reçoit du transformateur jusqu'à ce que la provision accumulée dans le primaire soit épuisée.

Ainsi l'amortissement doit être plus faible qu'avec les appareils ordinaires;

(¹) *Voir* la Notice de M. Cornu dans l'*Annuaire* de 1901, p. A. 54.

et il serait plus faible encore si l'antenne rayonnante n'était pas reliée au secondaire. C'est ce que confirment les expériences de M. Tissot. Ce savant officier, observant avec un miroir tournant l'étincelle de l'appareil ordinaire, obtenait au plus trois images de cette étincelle ; ce qui veut dire qu'au bout de trois vibrations les oscillations étaient devenues insensibles ; avec un dispositif analogue à celui de Marconi, il en obtenait dix; il en avait bien davantage quand l'antenne n'était pas reliée au secondaire.

J'ai dit qu'un fort amortissement était favorable aux transmissions lointaines. Ici l'amortissement est diminué sans que la portée soit amoindrie; car l'énergie totale accumulée est plus grande à cause de la grande capacité des bouteilles de Leyde. On peut calculer la provision d'énergie accumulée d'après cette capacité et la différence de potentiel mesurée par la longueur de l'étincelle ; d'autre part la durée de la perturbation, est, d'après l'expérience que je viens de citer, de dix oscillations ou de 1/100 000e de seconde ; c'est pendant cette durée que cette provision doit être dépensée ; on trouve ainsi que, pendant ce temps très court, la puissance moyenne sera d'une trentaine de chevaux-vapeur; on voit que l'*ébranlement maximum* peut rester considérable. De plus, si l'on obtenait réellement la résonance, cet ébranlement maximum se trouverait multiplié *pour les récepteurs à l'unisson*, parce que les effets des vibrations successives seraient concordants et s'ajouteraient les uns aux autres, Comme résultat final la portée serait augmentée pour les récepteurs à l'unisson et diminuée pour les autres.

Dans le récepteur, comme dans le transmetteur, l'antenne est directement reliée au sol (*fig.* 4). L'ébranlement reçu par cette antenne est transmis par induction au circuit du cohéreur, par le moyen d'un transformateur particulier appelé *jigger*. Ce transformateur diffère beaucoup de celui du transmetteur; il ne s'agit plus en effet de faire passer l'énergie du primaire (qui est ici l'antenne) au secondaire (qui est ici le circuit du cohéreur), *peu à peu*, afin d'obtenir un faible amortissement, mais au contraire *très rapidement* pour que l'ébranlement maximum reçu par le cohéreur soit aussi grand que possible.

Le secondaire du jigger se compose de deux bobines distinctes qui sont reliées : 1° aux deux armatures d'un condensateur; 2° aux deux électrodes du cohéreur; 3° aux deux pôles d'une pile locale par des fils traversant des bobines de self-induction. Le circuit parcouru par les courants oscillants comprend le condensateur, les bobines du jigger et le cohéreur; cet ensemble est donc analogue à un excitateur presque fermé. Le circuit parcouru par le courant de la

pile locale comprend la pile, les bobines de self-induction, les bobines du jigger et le cohéreur. Le courant continu de la pile ne peut emprunter le premier circuit puisqu'il ne peut passer à travers le condensateur; il ne passera donc que quand le cohéreur sera rendu conducteur par les oscillations hertziennes.

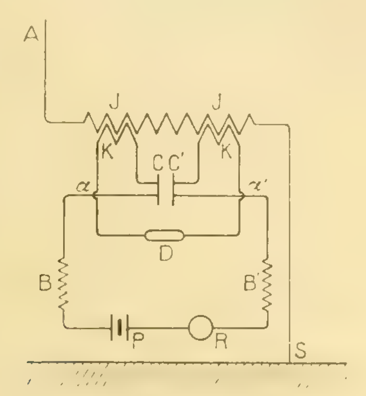


Fig. 4. — *Récepteur Marconi.*

AJS, primaire; A, antenne; J, enroulement primaire du jigger; S, sol; CKDK'C', circuit où se produisent les oscillations secondaires; CC', armatures du condensateur; KK', bobines secondaires du jigger; D, cohéreur; PRB'C'K'DKCBP, circuit de la pile locale; P, pile locale; R, relais actionnant le Morse; BB', bobines de self-induction.

Sur la figure, les deux circuits se croisent en α et en α', mais les fils passent l'un au-dessus de l'autre sans être en connexion.

D'un autre côté les bobines de self-induction n'opposent, comme on sait ([1]), aucune résistance aux courants continus, tandis qu'elles arrêtent les courants alternatifs rapides; elles ne gêneront donc pas le courant de la pile, tandis qu'elles arrêteront les oscillations hertziennes et les empêcheront d'aller se perdre dans le circuit de la pile locale.

Il paraît qu'avec ces dispositifs on peut, par un réglage convenable, obtenir une sorte de résonance. Est-ce parce que l'amortissement est plus faible? C'est possible, mais nous n'en savons pas assez pour que nous puissions l'affirmer.

Mais il ne faut pas se faire d'illusions sur la perfection de cette résonance. Un même récepteur sera indifféremment impressionné par des ondes de longueur assez différente; telle une oreille qui distinguerait l'octave, mais ne pourrait discerner les intervalles plus petits.

Le secret des correspondances n'est donc pas assuré; supposons que la transmission doive se faire à 50^{km}, les récepteurs placés à cette distance ne

([1]) *Voir* ci-après la Notice de M. Cornu, p. B. 29, *Bobines de réaction.*

fonctionneront que s'ils sont *à peu près* à l'unisson du transmetteur ; mais dans un rayon de 5^{km}, par exemple, tous les cohéreurs, accordés ou non, seront également impressionnés. Et même à grande distance, il ne faut pas de longs tâtonnements pour obtenir un unisson suffisant.

En revanche les nouveaux procédés suffiront peut-être pour éviter la confusion des signaux émanés d'un certain nombre d'antennes voisines.

NOTES ET COMMENTAIRES.

XXIV_2
CRITIQUES, DISCUSSIONS ET EXPOSÉS SUR LES THÉORIES PHYSIQUES.

Sur la théorie de l'élasticité (p. 221).

Le nombre des coefficients indépendants à considérer dans les déformations les plus générales des milieux élastiques et les réductions de ce nombre résultant d'hypothèses complémentaires sur la structure de ces milieux (réseau cristallin, hypothèse moléculaire, forces centrales, etc.) ont fait l'objet de très nombreuses discussions. H. Poincaré en a donné une mise au point très complète dans son Ouvrage : *Leçons sur la théorie de l'Élasticité* (Paris, 1892). Un exposé précis de ce problème est également donné par L. Brillouin (*Les tenseurs en mécanique et en élasticité*, Paris, 1938, chap. X, p. 232).

La réédification moderne de la théorie de l'élasticité des cristaux en partant de la structure atomique a retrouvé les conclusions de H. Poincaré et de W. Voigt (*Lehrbuch der Kristallphysik*, Leipzig, 1910) en faisant appel à la théorie des forces centrales (*voir*, par exemple : M. Born, *Atomtheorie des Festen Zustandes*, Berlin, 1923). Une discussion des travaux récents sur ce sujet se trouve dans l'article de I. Stakgold : *The Cauchy relations in a molecular theory of Elasticity* (*Quart. J. Appl. Math.*, t. 8, 1950-1951, p. 160-186). J. Laval (*C. R. Acad. Sc.*, t. **232**, 1951, p. 1947), étudiant la théorie atomique de l'élasticité cristalline restreinte aux déformations conformes à la loi de Hooke et en ne supposant pas les forces atomiques centrales introduit un système de 45 constantes élastiques.

Sur les tentatives d'explication mécanique des principes de la Thermodynamique (p. 231).

H. Poincaré a repris et développé les arguments exposés dans cette Note sur l'impossibilité d'expliquer l'irréversibilité thermodynamique au moyen de la théorie de Helmholtz dans son traité de *Thermodynamique* (Paris, 1892 et 1908). Au chapitre XVII (p. 392, 1re édit. : *Réduction des principes de la Thermodynamique aux principes généraux de la Mécanique*), Poincaré conclut en déclarant « ... les phénomènes irréversibles et le théorème de Clausius ne sont pas explicables au moyen des équations de Lagrange ».

Un exposé historique sommaire des recherches sur l'interprétation mécanique du second principe de la Thermodynamique se trouve dans le traité de Physique de O. D. Schwolson (trad. française, t. III, 1909, p. 537-542 et bibliographie, p. 550). Une discussion plus complète est donnée dans l'*Encykl. der Math. Wiss.*, d'une part dans l'article de G. H. Bryan : *Allgemeine grundlegung der Thermodynamik* (t. 5, *Physik*, vol. 1, p. 146-160. *Ableitung des zweiten Hauptsatzes aus den Prinzipien der Mechanik*) et, d'autre part, dans l'article de L. Boltzmann et J. Nabl : *Kinetische Theorie der Materie* (t. 5, vol. 1, V_8, § 14, p. 519 : *Einwendungen gegen die Anwendung der Statistik auf die Gastheorie*).

De nombreux travaux ont essayé de déduire l'irréversibilité thermodynamique de la Mécanique quantique en utilisant la dissymétrie entre passé et avenir introduite par le processus de mesure. Précisé notamment par les travaux de von Neumann (*Mathematische grundlagen der quanten mechanik*, Berlin, 1932), S. Watanabe (*Thèse*, Paris, 1935), et de M. Born (*Ann. Inst. H. Poincaré*, t. 11, 1949, p. 1), il semble qu'une justification de l'irréversibilité soit rattachable à l'interaction entre l'objet observé et un observateur dont la connaissance est associée à une direction privilégiée du temps. [*Voir*, par exemple, les articles de S. Watanabe et de O. Costa de Beauregard dans l'Ouvrage : *Louis de Broglie, Physicien et Penseur* (Paris, 1952, p. 385 et 401)].

Sur une objection à la théorie cinétique des gaz (p. 240).

Sur la théorie cinétique des gaz (p. 244).

L. Boltzmann et J. Nabl : *Kinetische Theorie der Materie* (*Encykl. der Math. Wiss.*, t. V_1, vol. 1, V_8, § 25 : *Hydrodynamische Gleichungen mit Reibung, Wärmeleitung und Diffusion*), signalent (p. 539) l'erreur de calcul rectifiée par H. Poincaré (*C. R. Acad. Sc.*, t. 116, 1893, p. 1020-1021 ; ce tome, p. 243) et également par L. Boltzmann (*Wien. Ber.*, t. 66_2, 1872, p. 332 ; *Gaztheorie*, t. 1, p. 180, trad. française : *Leçons sur la théorie des gaz*, t. 1, p. 170). L. Boltzmann (*Leçons sur la théorie des gaz*, t. 1, § 20, p. 140) rappelle la remarque de Poincaré de la fin de la page 1019 (ce Tome, p. 242) et donne le calcul rectifié.

Entropy (p. 264).

L'analyse du second principe de la Thermodynamique et les caractères de l'Entropie ont notamment fait l'objet d'une étude approfondie de J. Perrin [*Traité de Chimie-Physique. Les Principes* (Paris, 1903) ; chap. V : *Le principe d'évolution* ; *Le contenu essentiel des principes de la Thermodynamique* (*Bull. Soc. Phil.*, t. 6, 1906, p. 81) ; *Œuvres Scientifiques de J. Perrin*, p. 57-80].

La Thermodynamique a été développée axiomatiquement d'une façon mathématiquement rigoureuse à la suite des travaux de C. Carathéodory [C. Carathéodory, *Untersuchungen über die Grundlagen der Thermodynamik* (*Math. Ann.*, t. 67, 1909, p. 355) ; *Ueber die Bestimmung der Energie und der absoluten Temperatur mit Hilfe von reversiblen Prozessen* (*Berl. Ber.*, 1925, p. 39) ; T. Ehrenfest-

Afanassjewa, *Zur Axiomatisierung des zweiten Hauptsatzes der Thermodynamik* (*Zeit. Physik*, t. 33, 1925, p. 933 et t. 34, 1925, p. 638); A. Landé, *Axiomatische Begründung der Thermodynamik durch Carathéodory* (*Handbuch der Physik*, t. 9, p. 281-300)].

Sur le spectre cannelé (p. 287).

L'Analyse de l'expérience de Foucault et Fizeau sur le spectre cannelé donnée par H. Poincaré a été réfutée par A. Schuster (*C. R. Acad. Sc.*, t. 120, 1895, p. 987-989).

Rappelant la discussion détaillée du phénomène publiée antérieurement par lui [*On interference phenomena* (*Phil. Mag.*, 5e série, t. 37, juin 1894, p. 509-545)] dont les résultats sont en contradiction avec ceux de H. Poincaré, A. Schuster recherche l'origine de la divergence. Étant jusque-là en accord avec celui-ci, M. Schuster signale la phrase de H. Poincaré : « ... L'expérience de M. Fizeau nous apprend que cette amplitude est proportionnelle à $(1 + e^{iqh})$ ... » et continue : « ... je ne connais pas d'expérience dont on peut tirer cette conclusion; M. Fizeau a montré en effet que le spectre observé présentait des cannelures, c'est-à-dire des maxima et des minima, mais il n'a pas prouvé qu'aux minima l'intensité fut zéro ». Après une analyse poussée plus loin, M. A. Schuster conclut : « En d'autres mots, il n'y a pas de spectres continus montrant une permanence des vibrations et l'équation (4 *bis*) de M. Poincaré ne peut exister si la lumière examinée n'est pas homogène ».

Le Mémoire de M. A. Schuster est discuté par M. von Laue [*Wellen Optik* (*Encykl. Mathem. Wiss.*, t. 5, vol. 3, § 27-28, p. 400)].

Sur la loi électrodynamique de Weber (p. 292).

H. Poincaré a développé ce calcul dans son Ouvrage : *Électricité et Optique* (2e édit., 1901; 2e partie, chap. III; *Théorie de Weber*, § 259, p. 267-272 : *L'induction dans la théorie de Weber*).

Sur l'équilibre des diélectriques fluides dans un champ électrique (p. 297).

A la suite de la publication de cette Note, M. P. Duhem [*Sur les pressions à l'intérieur des milieux magnétiques ou diélectriques* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 112, 1891, p. 657-658)] a signalé qu'il avait également repris la théorie de H. von Helmholtz sur les pressions dans les milieux magnétiques, dans deux Mémoires et un Ouvrage alors en cours de publication [P. Duhem, *Sur les propriétés diélectriques* (*Travaux et Mémoires des Facultés de Lille*, n° 2); *Sur les propriétés d'un sel magnétique en dissolution* (*Ann. Éc. Norm. Sup.*, 1890); *Leçons sur l'Électricité et le magnétisme* (t. II, *Aimants et corps diélectriques*, 1892)]. M. P. Duhem a, en outre, développé cette théorie dans trois Mémoires ultérieurs [*Sur les lois générales de l'induction électrodynamique* (*Ann. Fac. Sc. de Toulouse*, 1re série, t. 7, 1893, p. B.1-28 et G.1-52; t. 8, 1894, p. A.1-57)] et dans un fascicule : *Sur l'électrodynamique des milieux diélectriques* (Paris, 1896).

Remarques sur une expérience de M. Birkeland (p. 310).

P. Appell (*Mécanique rationnelle*, 5ᵉ édit., t. I, 1926, § 221, p. 371-376) a examiné les cas particuliers d'intégration des équations différentielles du mouvement d'une particule électrisée soumise à l'action d'un champ électrique et d'un champ magnétique. P. Appell rappelle l'explication des expériences de M. Birkeland par H. Poincaré et les travaux de C. Störmer [*Cas de réduction des équations différentielles de la trajectoire d'un corpuscule électrisé dans un champ magnétique* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 146, 1908, p. 462, 529 et 623; t. 147, 1908, p. 527; *Arch. Sc. Phys. Nat.* (Genève), 4ᵉ pér., t. 24, juill.-oct. 1907)]. C. Störmer signale (*loc. cit.*, p. 462) que le résultat de l'intégration des équations du mouvement d'une particule électrisée dans le champ d'un seul pôle magnétique donné par H. Poincaré avait déjà été indiqué par G. Darboux [*Problème de mécanique* (*Bull. Sc. Math.*, 1878, p. 433)].

L'Énergie magnétique d'après Maxwell et d'après Hertz (p. 341).

Ces calculs sont également développés par H. Poincaré dans l'Ouvrage : *Électricité et Optique* (2ᵉ édit., 1901, 3ᵉ partie, chap. II : *Électrodynamique des corps en mouvement*, p. 363-421).

Sur l'induction unipolaire (p. 355).

Le phénomène d'induction unipolaire et les diverses théories proposées pour son interprétation sont examinés notamment dans le *Traité de Physique* de O. D. Chwolson (trad. française par E. et F. Cosserat, t. 5, fasc. I, p. 120-122) ; bibliographie, p. 127-128).

L'explication de ce phénomène par la théorie de la relativité est donnée par R. Becker [*Théorie des électrons* (trad. française, § 62 : *La machine unipolaire*, p. 370)].

A propos des expériences de M. Crémieu (p. 391).

Sur les expériences de M. Crémieu (p. 421).

Les expériences de Rowland, les travaux de V. Crémieu, de Pender et de Pender et Crémieu sont exposés d'une façon détaillée par H. A. Lorentz (*De Ingenieur*, t. 23, 1908, p. 86; *Collected Papers*, t. 8, p. 125-151). Celui-ci insiste notamment sur l'exemple remarquable de collaboration scientifique donné par les expériences de Pender et Crémieu.

De même, dans l'*Encyclopédie des Sciences Mathématiques* (édit. française, *Physique*, t. 5, vol. 3, V_{15} : *Actions à distance, exposé d'après l'article allemand de R. Reiff et A. Sommerfeld*), E. Rothe écrit :

« ...On se rappelle les difficultés que présentent les expériences de A. Rowland, les expériences qu'elles ont entraînées et les discussions de H. Pender et V. Crémieu effectuées en commun à Paris afin d'éviter toute contradiction [*Recherches contradictoires sur l'effet magnétique de la convection électrique* (*Bull. Soc. franç. Phys.*, 1903, p. 136)]. En présence des résultats opposés obtenus sur une question aussi fondamentale, H. Poincaré avait pris l'initiative de provoquer une étude contradictoire entre ces deux physiciens qui avaient obtenus des résultats inverses. D'accord avec W. Thomson (Lord Kelvin), le laboratoire de E. Bouty fut choisi comme lieu le plus favorable aux expériences. La Johns Hopkins University mit tous les appareils nécessaires à la disposition de H. Pender et la Carnegie Institution fournit les sommes suffisantes pour couvrir les frais de déplacement, l'Institut de France accorda au laboratoire Bouty les ressources nécessaires.

Ces expériences conduisirent nettement aux conclusions suivantes :

1° Un disque métallique continu chargé, tournant dans son propre plan en face d'armatures fixes entraîne sa charge avec lui ;

2° L'entraînement de cette charge produit un champ magnétique, dans le sens prévu pour l'effet de la convection électrique et d'accord avec le calcul à 10 % près ;

3° Des secteurs chargés, isolés et mobiles dans leur plan sans interposition d'aucune armature fixe, produisent des effets magnétiques dans le sens et de l'ordre de grandeur prévu pour la convection électrique.

Rapportant les résultats de leurs travaux en commun, V. Crémieu et H. Pender (*C. R. Acad. Sc.*, t. 136, 1903, p. 607 et 955) signalent notamment (p. 956) :

« ...5° La différence essentielle entre les expériences de Pender et celles de Crémieu résidait dans le fait suivant :

Dans le but d'éviter les aigrettes ou les pertes par l'air, Crémieu avait recouvert ses disques et leurs armatures de couches diélectriques minces. Ce que l'on sait sur les diélectriques solides ne permettait pas de prévoir de perturbations attribuables à l'une de ces couches.

Or nous avons constaté que si, dans l'une quelconque des expressions précédentes, on recouvre les disques, secteurs ou armatures de couches de caoutchouc mince ou de mica paraffiné, les effets magnétiques de la convection électrique diminuent ou disparaissent complètement. »

Théorie de la balance azimutale quadrifilaire (p. 438).

L'étude de la balance azimutale quadrifilaire décrite par M. V. Crémieu (*C. R. Acad. Sc.*, t. 138, 1904, p. 893-897) faite par H. Poincaré a été complétée dans une seconde Note de V. Crémieu [*Sensibilité de la balance azimutale* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 138, 1904, p. 1090-1093)]. Dans celle-ci, M. Crémieu écrit notamment :

« Dans une précédente Note, M. H. Poincaré a établi pour la balance azimutale que j'ai publiée (*C. R. Acad. Sc.*, t. 138, 1904, p. 893) la formule de sensibilité

suivante :

$$d\omega_2 = \frac{dp}{p} \frac{l \sin \varphi}{\left[\overline{G_0 P_1} \sin \varphi + \frac{\overline{\alpha E}^2}{\lambda} \right]}.$$

On arrive à cette expression en supposant que les fils des bifilaires sont sensiblement verticaux et que le trapèze formé par leurs points d'attache supérieurs est très voisin d'un quadrilatère. Si ces approximations ne peuvent être faites, ce qui sera le cas dans la pratique, il faut ainsi que le montre un complément de la théorie de H. Poincaré (complément qui sera publié ultérieurement), modifier la formule qui devient :

$$d\omega_2 = \frac{dp}{p} \frac{l \sin \varphi}{\left[\overline{G_0 P_1} \sin \varphi + \frac{\overline{\alpha E}^2 \varepsilon_1 + \overline{\gamma E}^2 \varepsilon_2}{\lambda(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)} \right]}.$$

Dans cette formule, ε_1 et ε_2 sont les angles des plans $M\alpha\beta$ et $N\gamma\delta$ avec la verticale. »

Etude de la propagation du courant en période variable (p. 445).

Les résultats de l'étude de la solution générale de l'équation des télégraphistes établis par H. Poincaré dans ce Mémoire sont rappelés notamment dans le *Handbuch der Exp. Phys. de Wien-Harms* t. 11, vol. 3 : *Schwachstromteknik*, par K. Kupfmulller, III, *Telegraphie*, p. 452) et dans le *Handbuch der Physik* (t. 17, *Elektrotechnik*, 1926; F. Breisig, *Telegraphie und Telephonie auf Leitungen*, p. 4-6).

Une étude approfondie de l'équation des télégraphistes et de ses solutions se trouve dans le *Cours d'Électricité théorique*, de J. B. Pomey (t. I, 1914, chap. IX; t. II, 1928, chap. I, II, III, IV; t. III, 1931, chap. XI).

Étude du récepteur téléphonique (p. 487).

La théorie de H. Poincaré est citée comme première théorie du récepteur téléphonique dans le *Handbuch der Exp. Phys. de Wien-Harms* (t. 11, vol. 3 : *Schwastromteknik* par K. Kupfmuller, p. 265; t. 17, vol. 2 : *Technische Akustik*, III, *Telephone*, par W. Geffcken et H. Heisig, 1934, chap. X : *Téléphone électromagnétique*, p. 233).

F. Breisig ((*Theoretische Telegraphie*, 1910, § 178, p. 259-263) expose la théorie de H. Poincaré.

J. B. Pomey (*Cours d'Électricité théorique professé à l'École supérieure des P. T. T.*, t. 2, 1928, chap. X, p. 205) développant la théorie du récepteur téléphonique d'après les travaux de A. E. Kennelly [*J. télégraphique* (Bern), t. 54, 1922, p. 244; t. 55, 1923, p. 4 et 25] et de M. Le Corbeiller rappelle (p. 211-216) la théorie de H. Poincaré et signale notamment qu' « . . . avec le concours de M. Devaux-Charbonnel et celui de M. Abraham, il a été possible à H. Poincaré de déterminer

les valeurs numériques approchées de tous les coefficients qui entrent dans les équations du problème où l'on réunit par un circuit n'ayant que de la résistance un appareil transmetteur microphonique à un récepteur téléphonique ».

Un exposé d'ensemble et une bibliographie sommaire sur les développements moderne de la théorie du récepteur téléphonique se trouvent dans le *Memento d'Électrotechnique* de A. Curchod-L. Vellard (t. 3, *Applications de l'Électricité*, p. 112-132).

Sur la théorie de la commutation (p. 552).

La théorie de la commutation a été développée dans les Cours à l'École Supérieure d'Électricité de M. M. Latour.

Dans son Ouvrage : *La commutation dans les machines à courant continu et à courants alternatifs. Moteurs monophasés et à collecteurs* (Cours professé à l'École Supérieure d'Électricité, 1922-1923, p. 6), M. Latour rappelle que la capacité statique du contact, envisagée par M. Béthenod a été introduite pour la première fois dans le calcul par H. Poincaré dans cet article.

La lumière et l'électricité d'après Maxwell et Hertz (p. 557).

La télégraphie sans fil (p. 604).

Les textes de ces deux Notices se trouvent intégralement mais dans un exposé remanié et complété dans l'Ouvrage de H. Poincaré publié dans la collection *Scientia* sous le titre : *La théorie de Maxwell et les oscillations hertziennes. La télégraphie sans fil* (3e éd., 1907, in-8°, 90 pages).

TABLE DES MATIÈRES

DU TOME X.

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS, 55, QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS.
Dépôt légal imprimeur, 1954, n° 895. — Dépôt légal éditeur, 1954, n° 522.
Achevé d'imprimer le 30 avril 1954.




Stechert Hafner, Inc.
31 East 10TH Street
New York 3